This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Mathematisches Wörterbuch

oder

Erklärung

der

Begriffe, Lehrsätze, Aufgaben und Methoden

der Mathematik

mit den nöthigen Beweisen

und literarischen Nachrichten begleitet

in alphabetischer Ordnung,

angefangen

von

Georg Simon Klügel,

fortgesetzt

von

Carl Brandan Mollweide,

ehemals Professoren der Mathematik zu Halle und Leipzig

und beendigt

von

Johann August Grunert,

Dr. und Professor der Mathematik zu Brandenburg a. d. H.
Ehrenmitglede der Königl. Preuß. Akademie der Wissenschaften zu Erfurt.

Erste Abtheilung.

Die reine Mathematik.

Fünfter Theil. Erster Band.

T und U.

Leipzig, 1831.

Bey E. B. Schwickert.

187. f. 11.

Mathematisches Wörterbuch

oder

Erklärung

der

Begriffe, Lehrsätze, Aufgaben und Methoden

der Mathematik

mit den nöthigen Beweisen

und literarischen Nachrichten begleitet

in alphabetischer Ordnung,

angefangen

von

Georg Simon Klügel,

fortgesetzt

von

Carl Brandan Mollweide,

ehemals Professoren der Mathematik zu Halle und Leipzig

und beendigt

von

Johann August Grunert,

Dr. und Professor der Mathematik zu Brandenburg a. d. H.

Mitgliede der Königl. Preuß. Akademie der Wissenschaften zu Erfurt.

Erste Abtheilung.

Die reine Mathematik.

Fünfter Theil. Erster Band.

T und U.

Leipzig, 1831.

Bey E. B. Schwickert.

187. f. 11.

Vorrede.

Ich übergebe hiermit den Freunden des Klügelschen mathematischen Wörterbuchs dessen fünften Theil, mit dem Wunsche, daß die Ausführung der Arbeit der Lust und Liebe, mit welcher sie unternommen wurde, einigermaßen entsprechen, und daß ich nicht zu weit hinter meinen beiden verdienten Vorgängern zurückgeblieben seyn möge. Vorarbeiten habe ich nicht gefunden. Nur über die Artikel Taylor's Lehrsatz, Umkehrung der Reihen, Unendlich und Zahlzeichen hatte der verewigte Klügel noch Einiges aufgesetzt. Aber nur die Notizen über den zuletzt genannten Artikel sind mir bei meiner Arbeit von einigem Nutzen gewesen. Jedoch wird man auch bei diesem Artikel die Zusätze und Erweiterungen von meiner Seite nicht unbemerkt lassen. Bei manchen Artikeln mehr zu geben verbot der beschränkte Raum, und die Auswahl ist mir nicht selten schwer geworden. Mit diesem Bande ist die erste Abtheilung des ganzen Werkes, welche der reinen Mathematik gewidmet ist, zu Ende geführt, und die Verlagshandlung hat mich nun zu-

isciplinen dieſer Wiſſenſchaft wohl
nen, erſcheinen wird, muß lediglich
der Kenner, und von der erhöhete
des mathematiſchen Publicums an
en erſten Abtheilung abhängen, i
ere Verlagshandlung für das i
on verwandte bedeutende Kapital n
ntſchädigung finden kann.
e denn das Werk in ſeiner ſo n
Geſtalt fortfahren, zur immer weit
des ſo wichtigen mathematiſchen G
n.

denburg a. H., im September

Der Verfaſ

T.

Tabula foecunda, heißt bei Regiomontan die Tafel der Tangenten. Thl. I. S. 669.

Tabula mirifica, heißt bei einigen ältern Schriftstellern, z. B. in Clavii Geometria pract. Lugd. 1607. 4. p. 278., die Tafel der Binomial-Coefficienten. M. s. diesen Art. (4). Clavius geht bis zur 17ten Potenz, bis zu dem Coefficienten, von welchem an die vorhergehenden wiederkehren.

Tabula pythagorica, ist das sogenannte Einmaleins, dessen Erfindung gewöhnlich dem Pythagoras zugeschrieben wird. Der Name scheint beim Beda (Opp. Colon. 1612. p. 77.) zuerst vorzukommen. Die Tafel selbst haben Nikomachus (Paris. 1538. p. 28.) und Boethius (Basil. 1570. p. 1314.) Der Abacus pythagoricus (s. Abacus) scheint hiervon wesentlich verschieden gewesen, und nur durch eine Verwechslung auch auf das Einmaleins übergetragen zu seyn, worüber Reimer in Bossut's Geschichte der Math. I. Hamb. 1804. S. 31., und Mannert de numerorum, quos arabicos vocant, vera origine pythagorica. Norimb. 1801. zu vergleichen sind.

Tactio, s. Kreis. (78. am Ende).

Tafel, in der Perspectiv. S. diesen Art. (6.)

Tafelgrund, eigentlich Grundlinie der Tafel, ist in der Perspectiv die Durchschnittslinie der Tafel mit der Fundamentalebene.

iner gewiſſen Gränze enthalten. c. D
ymen für die Functionen log. vulg. x un
natürlichen Zahlenwerthe von x bis zu ei
. d. Die trigonometriſchen Tafeln fi
ſin x, cos x, tang x, cot x, in Bez
ıten Radius, und die einzelnen Werth
er Bogens x wenigſtens von Minute
ıche kleinere Tafeln, wie z. B. zur Ber
ıgen, als Functionen der zugehörenden
eſtimmten Radius, der Binomial-C
lliſchen Zahlen, u. ſ. f. f. Tafeln der
er transcendenten Functionen, wie z. L
ıithmus in Soldner Théorie et Ta
le function transcendante. Munic.
des Integrals $\int e^{-tt} \partial t$ für beſtim
n Kramp Analyse des réfraction
ı et terrestres. Leips. 1798. p. 193.
scendenten Functionen in Legendre
ul intégral. T. III. Paris. 1816. u. d

: dieſe Tafeln ſind zur Erleichterung und
ommender Rechnungen beſtimmt, inde
l berechnet enthalten, was man ſonſt fi
fall immer beſonders berechnen müßte.

ſetzt. In beſondern Fällen können indeß Abkürzungen möglich ſeyn, wie z. B. bei den gemeinen Logarithmen- und trigonometriſchen Tafeln. Gewöhnlich kommen aber dieſe Abkürzungen darauf zurück, daß öfter wiederkehrende Zahlen nur einmal geſchrieben werden. Iſt die Function $= \varphi(x, y)$, und enthält alſo zwei veränderliche Größen; ſo werden die Werthe von x in eine Vertikalreihe, die Werthe von y in die erſte Horizontalreihe geſetzt, und die zweien beſtimmten Werthen von x und y entſprechenden Werthe von $\varphi(x, y)$ in die Punkte geſchrieben, wo eine durch den Werth von x gezogene Horizontallinie die durch den Werth von y gezogene Vertikallinie ſchneidet. Für Functionen dreyer veränderlichen Größen müßte die Einrichtung natürlich zuſammengeſetzter ausfallen. Solche Tafeln ſind aber auch nur von ſeltnem Gebrauch in der Mathematik, und nur in ganz ſpeciellen Fällen. Jenachdem die Tafeln Functionen mit einer oder mit zwei veränderlichen Größen darſtellen, heißen ſie Tafeln mit einfachem oder doppeltem Eingang. Gewöhnlich enthalten die Tafeln eine beſondere Spalte der Differenzen oder Proportionaltheile, welche zur Erweiterung der Tafel über die ihr urſprünglich geſteckten Gränzen mittelſt des Interpolirens oder Einſchaltens dienen, worüber dieſer Artikel nachzuſehen. Die Berechnung der Tafeln erfordert nach der Natur der Function, welche ſie darſtellen ſollen, verſchiedene Methoden. Hat man indeß nur erſt eine Grundreihe von Werthen der Function berechnet; ſo laſſen ſich mittelſt der Interpolations-Methoden die übrigen Werthe in die Grundreihe einſchalten. Man wird ſich von dieſen Methoden am beſten einen Begriff aus der Berechnung der trigonometriſchen Linien im Art. Cyclotechnie (Thl. I. S. 676.) oder aus dem Art. Logarithmus (54), ſo wie auch aus dem Art. Einſchalten verſchaffen. Gute allgemeine Bemerkungen über dieſen Gegenſtand findet man in einer Abhandlung von Olivier in Crelle's Journal der Math. B. 2. H. 3. S. 252. Hier geſtattet der Raum keine weitere Ausführung. Ferner enthalten aber

2. mathematiſche Tafeln auch nur gewiſſe Verwandlungen und Zerlegungen gewiſſer Zahlen, ohne eigentlich die Werthe einer Function darzuſtellen, wohin u. A.

ıur durch ihre Logarithmen gegeben
) ſ. m. Trigonometrie. (14). Indeß l
auf Erleichterung ſolcher Rechnungen
urch Tafeln, ſondern nur durch Formeln
715. Käſtners Anal. endl. Größen.
Auch hat man Tafeln, welche zur Erl
ung gewiſſer unbeſtimmten Gleichunge
er Canon Pellianus. Auct. C. F. D
1817., welcher für die Werthe der
1000 die einfachſten Auflöſungen der
ıng $y^2 = ax^2 + 1$ in ganzen Zahlen e
ıte Analytik. 46.), und andere Tafeln
der Rechnungen in der unbeſtimmten A
in Legendre Théorie des nom
am Ende.
Endlich verſteht man unter Tafeln a
mathematiſcher Formeln, deren m
ng bei der täglich ſich erweiternden
lyſis ſehr zu wünſchen iſt. Z. B. E
netriſcher Formeln in verſchiedenen W
agnoli Traité de Trig. Paris. 18
entwickelter Functionen in den ſogena
ln, deren Meier Hirſch (Berlin.

Tangens secunda, ſ. Cotangente.

Tangente, wird in einer doppelten Bedeutung gebraucht: a. gleichbedeutend mit Berührende Linie (ſ. dieſen Artikel), wo ſie alſo von unbeſtimmter Länge iſt; b. gleichbedeutend mit trigonometriſcher Tangente (Goniometrie. 8.), wo ſie von beſtimmter Länge iſt. Die letztere Bedeutung iſt in dieſem Wörterbuche feſtgehalten worden.

Ueber die umgekehrte Methode der Berührenden ſ. Inversa methodus tangentium.

Ueber die trigonometriſchen Tangenten vergl. m. Goniometrie, Cyclometrie, Cyclotechnie, und auch Product, da aus den dort entwickelten Producten für $\sin x$ und $\cos x$ auch leicht ein Product für $\text{tang}\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$ abgeleitet werden kann. Die Darſtellung von $\text{tang}\, \varphi$ durch einen Kettenbruch ſ. m. Quadratur. (61.) Eine Darſtellung von $\text{tang}\, nz$ durch ein Product von Tangenten giebt Euler in der Introd. in An. inf. I. Cap. 14. §. 254. Die Summirung von Bögen, deren Tangenten nach einem gegebenen Geſetze fortgehen, lehrt nach Eulers Vorgange (Comm. Petrop. T. IX. p. 234. Nov. Comm. T. IX. p. 40—52.) Pfaff in einer ſcharfſinnigen Abhandlung in ſeinen Disquisitiones analyticae. Helmst. 1797. Disq. I., auch Einiges ſchon im Verſuch einer neuen Summationsmethode. Berlin. 1788.

Künſtliche Tangenten nennt man die Logarithmen der trigonometriſchen Tangenten in den trigonometriſchen Tafeln.

Linie der Tangenten, ſ. Proportionalzirkel. (10.)

Tarif, (tarifa), zuweilen für Rechenknecht.

Taun, und Tauntel nennt J. F. C. Werneburg in ſeiner Teliosadik (ſ. dieſen Artikel) das, was ſonſt gewöhnlich zwölf und Zwölftel heißt. Die Einführung einer neuen, auf die Dodekadik gegründeten, Rechenkunſt im gemeinen Leben beabſichtigend, war natürlich auch die Bildung einer neuen Sprache nöthig, da unſere Zahlwörter ſich unmittelbar auf die Dekadik beziehen. Eilf heißt bei ihm

eitende Reihe entwickelt dargeſtellt wird
mit einer veränderlichen Größe kon
rſt in des berühmten brittiſchen Geome
›r Methodus incrementorum direc
ond. 1715. Prop. VII. Cor. II. vor
g des Satzes nach ſeinem Erfinder ſchei
lier in ſeiner Exposition éléme
›es des calculs supérieurs. Berlin
zu ſeyn, und iſt ſeitdem gewöhnlic
und Käſtner gedenken Taylor
r.

Taylor deutet folgenden Weg an,
ſatze zu gelangen. Sey y irgend eine
he in y' übergehe, wenn x in x + n
nan nun (Arithmetiſche Reihen höher
) A = y, a = Δy, b = Δ²y,
und n für das dortige x; ſo iſt

$$\frac{n}{1}\cdot\Delta y+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\Delta^2 y+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot$$

$$\frac{\Delta x}{1}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x}+\frac{n(n-1)\Delta x^2}{1\cdot 2}\cdot\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)\Delta x}{1\cdot 2\cdot 3}$$

ſt man ſich nun, daß n Δx, indem

über, und man erhält:

$$y' = y + \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{i}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{i^2}{1.2} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$\Delta y = y' - y = \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{i}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{i^2}{1.2} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

welches die berühmte Taylorſche Reihe iſt.

2. Dieſer Beweisart, welche ſich auch auf ähnliche Art in Euleri Inst. calculi diff. II. §. 46. ff., ſo wie auch noch bei Prony im Journal de l'école polytechnique. Cah. 4. p. 544. findet, iſt die neuere Analyſis wegen Einmiſchung der Idee vom Unendlichen abhold. Lagrange, die Wichtigkeit der Taylorſchen Reihe als Grundlage der Differentialrechnung und Functionentheorie ganz erkennend, ſuchte ſie auf rein analytiſchem Wege zu begründen (Théorie des fonctions analytiques. Nouv. éd. Paris, 1813. Chap. I. II. Léçons sur le calcul des fonctions. Nouv. éd. Paris, 1806. Léçon II.). Er führt den Beweis auf folgende ſehr ſinnreiche Art.

3. Sey $fx = y$ irgend eine Function von x. Sie gehe, wenn x ſich um i verändert, in $f(x+i) = y'$ über; ſo ſoll $f(x+i)$ in eine Reihe nach Potenzen von i entwickelt werden. Da $f(x+i)$ für $i = o$ wieder in fx übergeht; ſo muß die geſuchte Reihe nothwendig ein von i unabhängiges Glied, welches $= fx$, enthalten. Folglich wird die Reihe ſeyn:

$$fx + pi^{\alpha} + qi^{\beta} + ri^{\gamma} + \ldots.$$

Lagrange zeigt nun zuerſt, daß kein Exponent von i eine gebrochene, keiner eine negative Zahl ſeyn kann, ſo lange nämlich x und i als ganz unbeſtimmte Größen betrachtet, und ihnen keine beſtimmten Werthe beigelegt werden. Unter dieſer Vorausſetzung haben nämlich fx und $f(x+i)$ offenbar wegen der gleichen Functionszeichen auch gleich viele Werthe. Wäre nun aber auch nur ein Exponent von i, z. B. γ, eine gebrochene Zahl; ſo hätte ri^{γ} mehr als einen Werth und die Entwickelung

$$fx + pi^{\alpha} + qi^{\beta} + ri^{\gamma} + \ldots.$$

von $f(x+i)$ würde alſo, indem man jeden Werth von fx mit jedem einzelnen Werthe von ri^{γ} verbinden könnte, mehr

$f(x+i) = fx + pi + qi^2 + ri^3 + \ldots$.

der Folge nun immer geſchehen ſoll.

ndung, welche gegen dieſe Darſtellung vo

t werden kann, ſcheint die zu ſeyn,

ohne weitern Beweis die Möglichkeit

$(x+i)$ in die allgemeinere Reihe

$$fx + pi^{\alpha} + qi^{\beta} + ri^{\gamma} + \ldots$$

mmen wird. Lacroix, in der Einl

oßen Werke über höhere Analyſis, ge

der Entwickelung in Reihen nach den

tenzen der veränderlichen Größe für

onen beſonders.

Zur Beſtimmung der Coefficienten p,

gelangt nun Lagrange auf folge

nan $i+k$ für i; ſo erhält man, nur

n k beibehaltend, leicht:

$$f(x+i+k) = fx + pi + qi^2 + ri^3 + \ldots$$
$$+ (p + 2qi + 3ri^2 + \ldots)k$$

tzt man aber überall $x+k$ für x, und

de, in welche dadurch p, q, r, u. ſ.

$p + p'k + \ldots$, $q + q'k + \ldots$, $r + r'k + \ldots$,

lben nach dem Obigen von dieſer Form

für jedes i. Alſo $2q = p'$, $3r = q'$, $4s = r'$, u. ſ. f.; $q = \frac{1}{2}p'$, $r = \frac{1}{3}q'$, $s = \frac{1}{4}r'$, u. ſ. f.

Die Functionen p, q, r, s, u ſ. f., als Coefficienten der Reihe für $f(x+i)$, ſind offenbar von der beſondern Beſchaffenheit der Function fx abhängig, und können daher als von derſelben abgeleitete oder derivirte Functionen betrachtet werden. Nach derſelben Art der Derivation aber, nach welcher p von fx abgeleitet wird, werden, wie aus dem Obigen unmittelbar folgt, p', q', r', s', u. ſ. f. aus p, q, r, s, u. ſ. f. abgeleitet. Bezeichnet man daher mit Lagrange die erſte derivirte Function von fx durch $f'x$; die erſte von $f'x$, d. i. die zweite von fx, durch $f''x$; die erſte von $f''x$, d. i. die dritte von fx, durch $f'''x$; u. ſ. f.; ſo iſt nach dem Obigen:

$$p = fx,\ p' = f'x;\quad q = \tfrac{1}{2}p' = \tfrac{1}{2}f'x,\ q' = \tfrac{1}{2}f''x;$$

$$r = \tfrac{1}{3}q' = \frac{1}{2.3}f''x,\ r' = \frac{1}{2.3}f^{IV}x;\quad s = \tfrac{1}{4}r' = \frac{1}{2.3.4}f^{IV}x,\ s' = \frac{1}{2.3.4}f^{V}x;$$

u. ſ. f.

weil p' die erſte derivirte Function von p, q' die erſte von q, u. ſ. f., iſt. Demnach iſt alſo

$$f(x+i) = fx + \frac{i}{1}f'x + \frac{i^2}{1.2}f''x + \frac{i^3}{1.2.3}f''x + \ldots.$$

Es erhellet hieraus, daß die erſte derivirte Function einer Function fx, welche die primitive genannt wird, der Coefficient von i in der Entwickelung von $f(x+i)$ iſt. Denſelben nennt man auch nach den neuern Anſichten den Differentialquotienten von fx, und auf ähnliche Art die zweite, dritte u. ſ. f. derivirte Function den zweiten, dritten, u. ſ. f., Differentialquotienten, ſo daß alſo

$$fx = y,\ f'x = \frac{\partial y}{\partial x},\ f''x = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},\ f''x = \frac{\partial^3 y}{\partial x^3},\ \text{u. ſ. f.}$$

wobei die Artikel Differenzen-, und Differentialrechnung zu vergleichen ſind. Alſo nach dieſer eigentlich nur veränderten Bezeichnung für $f(x+i) = y'$:

$$y' = y + \frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{i}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\cdot\frac{i^2}{1.2} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\cdot\frac{i^3}{1.2.3} + \ldots.$$

wie vorher.

5. Setzen wir den Binomiſchen Lehrſatz für poſitive ganze Exponenten voraus; ſo iſt $(x+i)^n = x^n + nx^{n-1}i + \ldots$, $\Delta.x^n = (x+i)^n - x^n = nx^{n-1}i + \ldots$; alſo

ich für $x + i = y$:

$$y = A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots$$

bnet man nun die Binomialcoefficienten durch $(n_1), (n_2), (n_3), \ldots (n_n)$; so erg

$$+ A_1 (x + i) + A_2 (x^2 + 2xi + i^2)$$
$$+ A_3 (x^3 + 3x^2 i + 3xi$$
$$\{x^n + (n_1)\, x^{n-1} i + (n_2)\, x^{n-2} i^2 + \ldots + (n$$

ifferentiation giebt:

$$_1 + A_2 . (2_1)\, x + A_3 (3_2)\, x^2 + \ldots\ldots + A_n (n_1$$

$$_2 . 1 . (2_1) + A_3 . 2 . (3_2)\, x + A_4 . 3 . (4_3)\, x^2 + \ldots$$
$$+ A_n . (n-1) . (n$$

$$_2 + A_3 . (3_1) x + A_4 . (4_2)\, x^2 + \ldots\ldots + A_n . (n_n$$

erhaupt

$$m . (n_m) = (n - m + 1) . (n_{m-1})$$

ial-Coefficienten. 8.)
ist auf ähnliche Art:

$$\{A_3 . 1 . (3_1) + A_4 . 2 . (4_2)\, x + \ldots\ldots + A_n . (n-2) . (n_1$$

$$_3 + A_4 . (4_1) x + A_5 . (5_2) x^2 + \ldots\ldots + A_n . (n_{n-1}$$

, wie leicht erhellet, allgemein:

$$= A_n + A_{n+1} . ((n+1)_1) . x + A_{n+2} . ((n+1$$

$$y' = y + \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{i}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{i^2}{1.2} + \ldots\ldots + \frac{\partial^n y}{\partial x^n} \cdot \frac{i^n}{1.2\ldots n} + \ldots$$

6. Andere Beweiſe ſ. m. außer in den ſchon angeführten Schriften in Käſtners Anal. des Unendl. §. 144—150. L'Huilier Principiorum calculi diff. et int. expositio elem. Tub. 1795. p. 48. J. F. Pfaff Programma inaugurale, in quo peculiarem differentialia investigandi rationem ex theoria functionum deducit. Helmst. 1788. §. XIII., wobei auch Bohnenbergers höhere Anal. Tüb. 1811. S. 36. zu vergleichen. Pfleiderer Dem. theorematis Tayl. Tub. 1789. Beck de theoremate Tayl. Halae, 1791. Kramp Élémens d'Arith. universelle. Cologne, 1808. p. 289. Scherk mathem. Abh. Berlin, 1825. S. 109. Zwei Beweiſe von Ampère in den Annales de Math. XVI. p. 348. XVII. p. 317., welche auf ganz eigenthümlichen Betrachtungen beruhen, und einer von Poiſſon in der Corrésp. sur l'école polyt. Nr. 3. Ueber D'Alemberts und Cauchy's Beweiſe unten ein Mehreres. Noch ſ. m. Bouvier Critique des princip. dém. données jusqu'a ce jour du theorême de Taylor, et Essai d'une dém. rig. du dit theorême. Genève, 1824.

7. Sey nun $y = f(x, x')$ irgend eine Function zweier veränderlichen Größen. Wenn man zuerſt x' als conſtant betrachtet, und die partiellen Differentialquotienten einklammert; ſo erhält man nach dem Obigen:

$$f(x+i, x') = y + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) \cdot \frac{i}{1} + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) \cdot \frac{i^2}{1.2} + \left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right) \cdot \frac{i^3}{1.2.3} \cdot + \ldots$$

Nun ſetze man $x' + i$ für x', und entwickele die veränderten Werthe von y, $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)$ ꝛc. alle nach der Taylor'ſchen Reihe für eine veränderliche Größe; ſo ergiebt ſich leicht:

$$\begin{aligned} f(x+i, x'+i) = {} & \\ & y + \left(\frac{\partial y}{\partial x'}\right) \cdot \frac{i}{1} + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x'^2}\right) \cdot \frac{i^2}{1.2} + \left(\frac{\partial^3 y}{\partial x'^3}\right) \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots \\ & + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) \cdot \frac{i}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial x' \partial x} \cdot \frac{ii}{1.1} + \frac{\partial^3 y}{\partial x'^2 \partial x} \cdot \frac{i^2 i}{1.2.1} + \ldots \\ & + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) \cdot \frac{i^2}{1.2} + \frac{\partial^3 y}{\partial x' \partial x^2} \cdot \frac{ii^2}{1.1.2} + \ldots \\ & + \left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right) \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots \end{aligned}$$

$$+\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x'^2}\right)\cdot\frac{i'^2}{1.2.}$$

en wir nun die nte Claſſe der Combinat
olungen, wenn man jede Combination in
ıszahl multiplicirt, durch $[n]\,C_n$; ſo
i, x' + i) ſo darſtellen:

$$f(x+i, x'+i) =$$
$$+\frac{\partial y}{1}[1]\,C_1 + \frac{\partial^2 y}{1.2}[2]\,C_2 + \ldots + \frac{\partial^n y}{1\ldots n}[n]\,C_n + \ldots$$

Zeiger $\left[\frac{i}{\partial x}, \frac{i'}{\partial x'}\right]$.

), wenn die nte Variationsclaſſe mit
$= V_n$ geſetzt wird:

$$f(x+i, x'+i) =$$
$$y + \frac{\partial y}{1}V_1 + \frac{\partial^2 y}{1.2}V_2 + \ldots + \frac{\partial^n y}{1\ldots n}V_n + \ldots$$

Zeiger $\left[\frac{i}{\partial x}, \frac{i'}{\partial x'}\right]$.

die beiden obigen Entwickelungen von f(x+
, i' gelten, und demnach identiſch ſeyn m
n durch Vergleichung der zu einerlei Din
en i, i' gehörenden Gliedern leicht:

$$\frac{\partial^{n+n'} y}{\partial x'^n \partial x^{n'}} = \frac{\partial^{n+n'} y}{\partial x^{n'} \partial x'^n},$$

erhält einerlei Reſultat, wenn man ei

mit n + 1 Veränderlichen, deren zwei willkührliche wir durch z, u bezeichnen wollen. Haben die beiden Differentialquotienten die Form $\frac{\partial^m y}{\partial z^p P}$, $\frac{\partial^m y}{\partial z^p P'}$, wo P, P', die Differentiale derſelben n veränderlichen Größen, nur in veränderter Ordnung enthalten; ſo iſt nach der Annahme: $\frac{\partial^{m-p} y}{P} = \frac{\partial^{m-p} y}{P'}$, und folglich, wenn man pmal nach z differentiirt, natürlich auch: $\frac{\partial^m y}{\partial z^p P} = \frac{\partial^m y}{\partial z^p P'}$.

Sind die Differentialquotienten aber von der Form: $\frac{\partial^m y}{\partial z^p P}$, $\frac{\partial^m y}{\partial u^q Q}$, wo P, Q nur die Differentiale von n veränderlichen Größen enthalten; ſo kann man, da der Satz für n veränderliche Größen gilt, ſetzen:

$$\frac{\partial^m y}{\partial z^p P} = \frac{\partial^m y}{\partial z^p\, du^q P'}, \quad \frac{\partial^m y}{\partial u^q Q} = \frac{\partial^m y}{\partial u^q \partial z^p Q'},$$

und folglich, da der Satz für zwei veränderliche Größen gilt, auch $\frac{\partial^m y}{\partial u^q Q} = \frac{\partial^m y}{\partial z^p \partial u^q Q'}$, wodurch die beiden gegebenen Differentialquotienten offenbar auf einerlei Form gebracht, und demnach einander gleich ſind, der Satz alſo für Functionen mit n + 1, alſo einer beliebigen Anzahl von veränderlichen Größen gilt.

9. Um nun die Gültigkeit der Reihe in 7. für jede Function y, deren n+1 veränderliche Größen $x, \overset{1}{x}, \overset{2}{x}, \ldots \overset{n}{x}$, ſind, zu beweiſen, bezeichne man die Function

$$\partial^\alpha y\,[\alpha]^{C}_{\alpha}$$

$$\left[\frac{i}{\partial x}, \frac{\overset{1}{i}}{\partial \overset{1}{x}}, \frac{\overset{2}{i}}{\partial \overset{2}{x}}, \ldots \frac{\overset{n-1}{i}}{\partial \overset{n-1}{x}}\right],$$

wo nur $x, \overset{1}{x}, \ldots \overset{n-1}{x}$ als veränderlich betrachtet werden, durch $\varphi\alpha$, die Function

$$\partial^\alpha y\,[\alpha]^{C}_{\alpha}$$

$$\left[\frac{i}{\partial x}, \frac{\overset{1}{i}}{\partial \overset{1}{x}}, \frac{\overset{2}{i}}{\partial}, \ldots \frac{\overset{n}{i}}{\partial \overset{n}{x}}\right]$$

wo $x, \overset{1}{x}, \ldots \overset{n}{x}$ als veränderlich betrachtet werden, durch $\varphi'\alpha$; ſo iſt immer

$$\varphi'\alpha = \varphi\alpha + \frac{\partial\varphi(\alpha-1)}{\partial \overset{n}{x}} \cdot \frac{\overset{n}{i}.\alpha}{1} + \frac{\partial^2\varphi(\alpha-2)}{\partial \overset{n2}{x}} \cdot \frac{\overset{n}{i}^2\alpha\,(\alpha-1)}{1.2} + \ldots\ldots$$

$$\left[\frac{i}{\partial x}\ \frac{\overset{1}{i}}{\partial^1_x},\ \frac{\overset{2}{i}}{\partial^2_x},\ \ldots\ \frac{\overset{n-1}{i}}{\partial^{n-1}_x}\right]$$

plicirt, wenn nur jedes Glied noch di
tionszahl vervielfältigt wird. In der
n Seite des Gleichheitszeichens iſt

$$\frac{\partial^{\alpha-k}\varphi k}{\partial^{n\alpha-k}_x} \cdot \frac{\overset{n}{i}{}^{\alpha-k} \cdot \alpha\,(\alpha-1)\,..\,(k+}{1.2\,3\,...\,(\alpha-k)}$$

erſelben Potenz von $\frac{\overset{n}{i}}{\partial^n_x}$ entſprechende Gl
ührten Bezeichnung iſt

$$\left[\frac{i}{\partial x},\ \frac{\overset{1}{i}}{\partial^1_x},\ \frac{\overset{2}{i}}{\partial^2_x},\ \ldots\ \frac{\overset{n-1}{i}}{\partial^{n-1}_x}\right]^{\partial^k y\,[k]\,C_k}$$

as vorhergehende Glied enthält alſo, w
$(\alpha-k)$ mal nach $\overset{n}{x}$ differentiirt iſt, in
$\partial^\alpha y$, und die Combinationen der kte
rholungen für den obigen Zeiger, jede
mte Zahl multiplicirt. In φk iſt jedes
utationszahl [k] multiplicirt. In der

$$\frac{\partial^{\alpha-k}\varphi k}{\partial^{n\alpha-k}_x} \cdot \frac{\overset{n}{i}{}^{\alpha-k}\,\alpha(\alpha-1)\,..\,(k+1)}{1.2.3\,..\,(\alpha-k)}$$

$\left(\overset{n}{i}\right)^{\alpha-k}$

woraus ſich alſo ergiebt, daß in

$$\frac{\partial^{\alpha-k}\varphi k}{\partial \overset{n}{x}{}^{\alpha-k}} \cdot \frac{\overset{n}{i}{}^{\alpha-k} \cdot \alpha(\alpha-1)..(k+1)}{1.2.3..(\alpha-k)}$$

jedes Glied in ſeine Permutationszahl multiplicirt iſt, welches auch bei allen Gliedern von $\varphi'\alpha$ der Fall iſt. Aus allem Bisherigen erhellet nun deutlich die Gleichheit der beiden obigen Ausdrücke.

10. Die Reihe in 7. gelte nun für jede Function mit n Veränderlichen; ſo iſt nach der gebrauchten Bezeichnung:

$$f(x+i, \overset{1}{x}+\overset{1}{i}, \ldots \overset{n-1}{x}+\overset{n-1}{i}, \overset{n}{x}) = y + \frac{\varphi 1}{1} + \frac{\varphi 2}{1.2} + \frac{\varphi 3}{1.2.3} + \ldots.$$

Hierin ſetze man überall $\overset{n}{x}+\overset{n}{i}$ für $\overset{n}{x}$, und entwickele die Werthe, welche dadurch y, $\varphi 1$, $\varphi 2$, $\varphi 3$, ꝛc. erhalten, nach dem Taylorſchen Satze für Functionen mit einer veränderlichen Größe in Reihen; ſo erhält man leicht nach einigen ganz leichten Verwandlungen:

$$f(x+i, \overset{1}{x}+\overset{1}{i}, \ldots \overset{n}{x}+\overset{n}{i}) =$$

$$y + \frac{1}{1}\left\{\left(\frac{\partial y}{\partial \overset{n}{x}}\right) \cdot \frac{\overset{n}{i}}{1} + \varphi 1\right\}$$

$$+\frac{1}{1.2}\left\{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial \overset{n}{x}{}^2}\right) \cdot \frac{\overset{n}{i}{}^2.2.1}{1.2} + \left(\frac{\partial \varphi 1}{\partial \overset{n}{x}}\right) \cdot \frac{\overset{n}{i}.2}{1} + \varphi 2\right\}$$

$$+\frac{1}{1.2.3}\left\{\left(\frac{\partial^3 y}{\partial \overset{n}{x}{}^3}\right) \cdot \frac{\overset{n}{i}{}^3.3.2.1}{1.2.3} + \left(\frac{\partial^2 \varphi 1}{\partial \overset{n}{x}{}^2}\right) \cdot \frac{\overset{n}{i}{}^2.3.2}{1.2} + \left(\frac{\partial \varphi 2}{\partial \overset{n}{x}}\right) \frac{\overset{n}{i}{}^1.3}{1} + \varphi 3\right\} + \ldots.$$

d. i. nach dem vorher bewieſenen Satze (9.)

$$f(x+i, \overset{1}{x}+\overset{1}{i}, \ldots \overset{n}{x}+\overset{n}{i}) = y + \frac{\varphi' 1}{1} + \frac{\varphi' 2}{1.2} + \frac{\varphi' 3}{1.2.3} + \ldots.$$

$$= y + \frac{\partial y}{1}[1]\underset{1}{C} + \frac{\partial^2 y}{1.2}[2]\underset{2}{C} + \ldots.$$

$$= y + \frac{\partial y}{1} \cdot \underset{1}{V} + \frac{\partial^2 y}{1.2}\underset{2}{V} + \frac{\partial 3y}{1.2.3}\underset{3}{V} + \ldots$$

$$\left[\frac{\overset{1}{i}}{\partial x}, \frac{\overset{1}{i}}{\partial \overset{1}{x}}, \frac{\overset{2}{i}}{\partial \overset{2}{x}}, \ldots \frac{\overset{n}{i}}{\partial \overset{n}{x}}\right].$$

Die Reihe gilt alſo für Functionen mit n + 1 Veränderlichen, wenn ſie für Functionen mit n gilt, und iſt folglich allgemein, da ſie ſchon für n = 2 bewieſen.

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial \overset{1}{i}}, \frac{\partial}{\partial \overset{2}{i}}, \ldots \frac{\partial}{\partial \overset{n}{i}}\right]$$

$$= \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) i + \left(\frac{\partial y}{\partial \overset{1}{i}}\right) \overset{1}{i} + \ldots + \left(\frac{\partial y}{\partial \overset{n}{i}}\right)$$

emiirt man, alle Incremente als conſta
rnach von Neuem; ſo ergiebt ſich leicht

$$\left[\frac{\partial^2 y \,.\, V}{\partial x}, \frac{\partial^2 y \,.\, \overset{1}{V}}{\partial \overset{1}{i}}, \frac{\partial^2 y \,.\, \overset{2}{V}}{\partial \overset{2}{i}}, \ldots \frac{\partial^2 y \,.\, \overset{n}{V}}{\partial \overset{n}{i}}\right]$$

Variationen mit Wiederholungen iſt

$$\underset{m+1}{V} = a \underset{m}{V} + b \underset{m}{V} + c \underset{m}{V} + \ldots + n$$

ſie ſich auf die Elemente a, b, c, .
un überhaupt

$$\left[\frac{\partial^m y \,.\, V}{\partial x}, \frac{\partial^m y \,.\, \overset{1}{V}}{\partial \overset{1}{i}}, \frac{\partial^m y \,.\, \overset{2}{V}}{\partial \overset{2}{i}}, \ldots \frac{\partial^m y \,.\, \overset{n}{V}}{\partial \overset{n}{i}}\right];$$

ieht, wenn man nach dem Obigen d
al von $\partial^m y$ nimmt, im Grunde weiter
an alle einzelnen Glieder deſſelben ſuc

$\overset{2}{i}$ $\overset{n}{i}$ . . . . . —

und dieſe Formel alſo allgemein gültig iſt. Hieraus, in Verbindung mit (10), folgt nun, daß

$$f(x+i, \overset{1}{x}+\overset{1}{i}, \ldots \overset{n}{x}+\overset{n}{i}) = y + \frac{\partial y}{1} + \frac{\partial^2 y}{1.2} + \frac{\partial^3 y}{1.2.3} + \ldots,$$

oder, wenn man, wie dies in der That gewöhnlich geſchieht, $\partial x, \overset{1}{\partial x}, \ldots \overset{n}{\partial x}$ überall für $i, \overset{1}{i}, \ldots \overset{n}{i}$ ſetzt:

$$f(x+\partial x, \overset{1}{x}+\overset{1}{\partial x}, \ldots \overset{n}{x}+\overset{n}{\partial x}) = y + \frac{\partial y}{1} + \frac{\partial^2 y}{1.2} + \frac{\partial^3 y}{1.2.3} + \ldots$$

Die Taylorſche Reihe für Functionen mit einer veränderlichen Größe geht für $i = \partial x$ ſogleich in dieſe Form über, und gilt alſo unter dieſer Geſtalt für jede Function mit einer willkührlichen Anzahl veränderlicher Größen.

Anwendung auf die Entwickelung der Functionen in Reihen.

12. Setzt man in der Entwickelung von $f(x+i, \overset{1}{x}+\overset{1}{i}, \ldots \overset{n}{x}+\overset{n}{i})$ überall $x = \overset{1}{x} = \ldots = \overset{n}{x} = o$; ſo erhält man $f(i, \overset{1}{i}, \ldots \overset{n}{i})$ in eine Reihe nach poſitiven ganzen Potenzen von $i, \overset{1}{i}, \ldots \overset{n}{i}$ entwickelt. Setzt man nun überall x für i; ſo erhält man $f(x, \overset{1}{x}, \ldots \overset{n}{x})$ nach eben ſolchen Potenzen von $x, \overset{1}{x}, \ldots \overset{n}{x}$ entwickelt. Bezeichnet man in Bezug auf eine Function y mit einer veränderlichen Größe die Werthe von $y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \ldots$ für $x = o$, durch Y, Y', Y'' ꝛc.; ſo erhält man auf dieſe Art:

$$y = Y + Y' \cdot \frac{x}{1} + Y'' \cdot \frac{x^2}{1.2} + Y''' \cdot \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

die ſogenannte Maclaurin'ſche Reihe, welche bei der Entwickelung der Functionen in Reihen ſehr wichtige Dienſte leiſtet.

13. Sey $y = x^n$, und alſo

$$y' = (x+i)^n = A + Bi + Ci^2 + \ldots,$$
$$(x+i)^{2n} = A^2 + 2ABi + \ldots,$$
$$(x+i)^{n+1} = Ax + (A+Bx)\,i + \ldots$$

:th von φn für $x = 1$ ſey

$$\varphi' n = \alpha + \beta n + \gamma n^2 + \delta n^3 + \ldots,$$

ſo

$$\varphi' 2n = \alpha + 2\beta n + 4\gamma n^2 + 8\delta n^3 + \ldots$$

) dem Obigen $\varphi' 2n = 2\varphi' n$. Alſo

$+ 4\gamma n^2 + 8\delta n^3 + \ldots = 2\alpha + 2\beta n + 2\gamma n^2 + 2$

n, woraus ſich leicht $\alpha = o$, $\beta = \beta$,

c. ergiebt. Alſo iſt $\varphi' n = \beta n$, $\varphi'($

$1 + 1)$. Aber nach dem Obigen φ'

$\varphi' n$. Alſo $\beta(n+1) = 1 + \beta n$,

und folglich $\varphi' n = n$. Demnach iſt

$$(1+i)^n = 1 + ni + \ldots,$$

$$x^n \left\{1 + \frac{i}{x}\right\}^n = x^n \left(1 + n\,\frac{i}{x} + \ldots\right)$$

$$= x^n + nx^{n-1}$$

$\frac{\partial y}{\partial x} = nx^{n-1}$, und für $y = (1+x$

$(1+x)^{n-1}$. Entwickelt man nun hier

t Regeln der Differentialrechnung die f

ialquotienten, und ſetzt überall $x = o$;

laurin'ſche Reihe:

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1.2}x^2 + \ldots$$

twickelung der Differentiale, unabhän

Conſtante k', wenn $\varphi x = k'a^x$ wäre, wirklich immer $\frac{\varphi x}{\varphi' x} = \frac{k'a^{2x}}{k'a^x} = a^x$ ſeyn würde. Wäre dies nun nicht der Fall; ſo ſey $\varphi x = k'a^x + \varphi' x$, wo $\varphi' x$ irgend eine Function von x bezeichnet. Dann iſt alſo

$$\frac{k'a^{2x} + \varphi' 2x}{k'a^x + \varphi' x} = a^x,$$

woraus man, wenn mit dem Nenner multiplicirt wird, leicht ſchließt, daß auch immer $\varphi' 2x = a^x \varphi' x$, $\frac{\varphi' 2x}{\varphi' x} = a^x$, die Function $\varphi' x$ alſo ganz von derſelben Natur wie φx ſeyn müßte. Man erhielte alſo:

$\varphi x - \varphi' x = k'a^x$, $\varphi' x - \varphi'' x = k''a^x$, $\varphi'' x - \varphi''' x = k'''a^x$, u. ſ. f.

woraus durch Addition

$$(\varphi x + \varphi' x + \varphi'' x + \varphi''' x + \ldots) - (\varphi' x + \varphi'' x + \varphi''' x + \ldots) = (k' + k'' + k''' + k'''' + \ldots)\, a^x,$$

d. i. für $k = k' + k'' + k''' + k'''' + \ldots$, wirklich $\varphi x = ka^x$ folgt. Alſo iſt $y' = a^{x+i} = a^x + ka^x . i + \ldots$, und folglich $\frac{\partial a^x}{\partial x} = ka^x$. Hieraus erhält man durch ſucceſſive Differentiation, und weiter wie oben wie oben nach der Maclaurin'ſchen Reihe:

$$a^x = 1 + \frac{kx}{1} + \frac{k^2x^2}{1.2} + \frac{k^3x^3}{1.2.3} + \ldots$$

15. Wird y als Function von x betrachtet; ſo ſey $\frac{\partial y}{\partial x} = p$. Betrachtet man aber x als Function von y; ſo iſt nun $\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{1}{p}$. Denn ſey

$\Delta y = pi + p'i^2 + p''i^3 + \ldots$, $\Delta x = qi' + q'i'^2 + q''i'^3 + \ldots$,

oder für $i = \Delta x$, $i' = \Delta y$:

$\Delta y = p\Delta x + p'\Delta x^2 + p''\Delta x^3 + \ldots$ $\Delta x = q\Delta y + q'\Delta y^2 + q''\Delta y^3 + \ldots$

Subſtituirt man nun die zweite Reihe für Δx in der erſten; ſo erhält man: $\Delta y = pq\Delta y + \ldots$ für jedes Δy. Alſo $pq = 1$, d. i. $\frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} = 1$, $p\frac{\partial x}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{1}{p}$.

16. Sey nun $a^y = x$; ſo iſt $\partial x = ka^y \partial y$ (14.), $\partial y = \frac{\partial x}{ka^y} = \frac{\partial x}{kx}$. Aber $y = \log x$ für die Baſis a. Alſo $\partial \log x = \frac{\partial x}{kx}$, und demnach $\partial \log (1 + x) = \frac{\partial x}{k(1+x)}$, woraus ſich wie vorher

$= 1$:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots$$

Hieraus ferner:

$$e^k = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1.2} + \frac{k^3}{1.2.3} + \ldots$$

nach (14.) für $x = 1$:

$$a = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1.2} + \frac{k^3}{1.2.3} + \ldots$$

) $a = e^k$, $k = \text{lognat } a$;

$$a = 1 + \frac{\log a}{1} + \frac{(\log a)^2}{1.2} + \frac{(\log a)^3}{1.2.3}$$

$$x = 1 + \frac{\log x}{1} + \frac{(\log x)^2}{1.2} + \frac{(\log x)^3}{1.2.3}$$

zlich auch, nach dem Vorhergehenden,

$= a^x \log a \,.\, \partial x$, $\partial e^x = e^x \partial x$, $\partial \log x = \frac{\partial x}{x \log a}$

n vergleiche den Artikel Logarithmus

17. Es iſt $\sin(x+i) - \sin(x-i) =$
nun $\cos i$ für $i = o$ der Einheit glei
i verſchwindet; ſo ſey

$\cos i = 1 + Ai + Bi^2 + \ldots$, $\sin i = ai +$

Aus $\cos x = (1 - \sin x^2)^{\frac{1}{2}}$ folgt mittelſt (13.) leicht: $\partial \cos x = -a \sin x \, \partial x$.

Durch ſucceſſive Differentiation und die Maclaurin'ſche Reihe erhält man nun:

$$\sin x = ax - \frac{a^3x^3}{1.2.3} + \frac{a^5x^5}{1...5} - \ldots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{a^2x^2}{1.2} + \frac{a^4x^4}{1...4} - \ldots;$$

wo nun bloß nach a zu beſtimmen. Man nehme zu dem Ende $x < \frac{1}{a}$, d. i. $ax < 1$, und laſſe x poſitiv ſeyn. Auch a iſt poſitiv; denn, wäre a negativ, $= -\alpha$, ſo wäre für $\alpha x < 1$, d. i. für jedes poſitive x, das $< \frac{1}{\alpha}$, augenſcheinlich

$$\sin x = -\left(\alpha x - \frac{\alpha^3x^3}{1.2.3}\right) - \left(\frac{\alpha^5x^5}{1...5} - \frac{\alpha^7x^7}{1...7}\right) - \ldots$$

eine negative Größe, welches ungereimt iſt. Für $ax < 1$ ſind nun offenbar

$$-\frac{a^3x^3}{1.2.3} + \frac{a^5x^5}{1...5}, \; -\frac{a^7x^7}{1...7} + \frac{a^9x^9}{1...9},$$

$$-\frac{a^{11}x^{11}}{1...11} + \frac{a^{13}x^{13}}{1...13}, \text{ u. ſ. f.}$$

lauter negative, dagegen

$$\frac{a^5x^5}{1...5} - \frac{a^7x^7}{1...7}, \; \frac{a^9x^9}{1...9} - \frac{a^{11}x^{11}}{1...11},$$

$$\frac{a^{13}x^{13}}{1...13} - \frac{a^{15}x^{15}}{1...15}, \text{ u. ſ. f.}$$

lauter poſitive Größen. Alſo immer $\sin x < ax$, $\sin x > ax - \frac{a^3x^3}{1.2.3}$, für alle Werthe von x, für welche $ax < 1$. Da man aber x immer zugleich $< \frac{1}{4}\pi$ nehmen kann; ſo iſt (Archimedes über Kugel und Cylinder. Axiom 1.)

$$\sin x < x, \; \text{tang} x > x; \; \sin x < x, \; \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin x^2}} > x;$$

$$\sin x < x, \; \sin x > \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Folglich nach dem Obigen um ſo mehr:

$$ax > \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}, \; ax - \frac{a^3x^3}{1.2.3} < x;$$

$$a > \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}, \; a - \frac{a^3x^2}{6} < 1.$$

ich genügt wird; ſo iſt $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} >$
dem Obigen dann immer $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} < a$
ßt < 1 ſeyn. Wäre $a > 1$; ſo neh
$1 - \frac{a^3x^2}{6} > 1$, welches immer mögli
nur $x < \frac{1}{a}\sqrt{\frac{6(a-1)}{a}}$ genommen zu
llt man nun die drey Bedingungen

$$x < \tfrac{1}{2}\pi,\ x < \frac{1}{a},\ x < \frac{1}{a}\sqrt{\frac{6(a}{}}$$

ich, welches offenbar immer möglich i
ich

$$a - \frac{a^3x^2}{6} < 1,\ a - \frac{a^3x^2}{6} > 1$$

es ſich widerſpricht. Alſo kann auch
Folglich iſt $a = 1$, und demnach

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1\ldots5} - .$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1\ldots4} - .$$

poſitive x. Für ein negatives x
$= -\sin x$. $\cos(-x) = \cos x$. w

$$\partial \text{tang}\, y = \partial \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\partial y}{\cos y^2} = (1 + \text{tang}\, y^2)\, \partial y,$$

$$\partial x = (1 + x^2)\, \partial \text{Arc. tang}\, x.$$

Folglich nach (15.)

$$\partial \text{Arc. tang}\, x = \frac{\partial x}{1 + x^2}.$$

Entwickelt man nun der Leichtigkeit wegen $\frac{\partial x}{1+x^2}$ in eine Reihe, und sucht die höheren Differentiale; so giebt die Maclaurinsche Reihe, nachdem man in den Differentialquotienten $x = 0$ gesetzt hat:

$$\text{Arc. tang}\, x = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \ldots$$

Man wird aus diesen einfachen Beispielen schon sehen, wie fruchtbar die Maclaurinsche Reihe an Folgerungen, und wie leicht ihre Anwendung auf die Entwickelung der Functionen in Reihen ist.

Anwendung auf die Entwickelung der Differenzen und Summen.

19. Die in (10.) gefundene Reihe läßt sich auch, da $y' - y = \Delta y$ ist, so schreiben:

$$\Delta y = \frac{\partial y}{1} \cdot \frac{V}{1} + \frac{\partial^2 y}{1.2} \frac{V}{2} + \frac{\partial^3 y}{1.2.3} \frac{V}{3} + \ldots$$

oder, wenn man y gewissermaßen als Factor absondert, und bei der Multiplication sich nur genau an die Verbindung erinnert, in welcher es mit dem Differentialzeichen steht, auch so:

$$\Delta y = \left\{ \frac{\partial}{1} \frac{V}{1} + \frac{\partial^2}{1.2} \frac{V}{2} + \frac{\partial^3}{1.2.3} \frac{V}{3} + \ldots \right\} y,$$

immer für den Zeiger:

$$\left[\frac{i}{\partial x}, \frac{\frac{1}{i}}{\partial x}, \frac{\frac{2}{i}}{\partial x}, \ldots \frac{\frac{n}{i}}{\partial x} \right].$$

Nun erhellet aber augenblicklich ohne weitere Erläuterung, daß immer

$$\frac{V}{k} = \left(\frac{i}{\partial x} + \frac{\frac{1}{i}}{\partial x} + \ldots + \frac{\frac{n}{i}}{\partial x} \right)^k = \mathfrak{V}^k,$$

und folglich

wobei man ſich bei der Entwickelung an
Verbindung zwiſchen y und den ſcheinb
∂ zu erinnern hat.

Für Functionen mit einer veränderliche
i zugleich $i = \Delta x$ ſetzt, erhält man hi

$$\Delta y = \left\{ e^{\Delta x \frac{\partial}{\partial x}} - 1 \right\} y = e^{\frac{\partial y}{\partial x} \Delta x}$$

20. Wir wollen nun einmal ſetzen, da
Reihe von der Form

$$A\partial^m y + B\partial^{m+1} y + C\partial^{m+2} y + \ldots$$

geſtellt werden könne, wo A, B, C, D
bhängige Größen ſind; ſo folgt aus

$$\Delta^{m+1} y = \Delta(\Delta^m y) = \frac{\partial \Delta^m y}{1} + \frac{\partial^2 \Delta^m y}{1.2} + \frac{\partial^3 \Delta^m y}{1.2.3} + \ldots$$

telſt obiger Vorausſetzung leicht:

$$\begin{aligned}
\Delta^{m+1} y = & \frac{1}{1} \left\{ A\partial^{m+1} y + B\partial^{m+2} y + C\partial^{m+3} y + \ldots \right. \\
& + \frac{1}{1.2} \left\{ A\partial^{m+2} y + B\partial^{m+3} y + C\partial^{m+4} y + \ldots \right. \\
& + \frac{1}{1.2.3} \left\{ A\partial^{m+3} y + B\partial^{m+4} y + C\partial^{m+5} y + \ldots \right. \\
= & A'\partial^{m+1} y + B'\partial^{m+2} y + C'\partial^{m+3} y + \ldots
\end{aligned}$$

Reihe von ganz ähnlicher Form. Da
m immer wirklich hat (14.) ſo hat Ga

nach ähnlichen Principien wie vorher; dieß giebt:

$$\Delta^{m+1}y = \left\{A\partial^m + B\partial^{m+1} + C\partial^{m+2} + \ldots\right\} \times \left\{\frac{\partial}{1} + \frac{\partial^2}{1.2} + \frac{\partial^3}{1.2.3} + \ldots\right\} y$$

woraus leicht:

$$\Delta^{m+1}y = \frac{\Delta^m y}{y} \cdot \frac{\Delta y}{y} \cdot y$$

folgt. Nun war aber (19.), wenn wir

$$i\frac{\partial}{\partial x} + {}^1i\frac{\partial}{\partial {}^1x} + \ldots + {}^ni\frac{\partial}{\partial {}^nx} = N$$

ſetzen:

$$\Delta y = (e^N - 1)\, y. \text{ Alſo}$$

$$\Delta^2 y = \frac{\Delta y}{y} \cdot \frac{\Delta y}{y} \cdot y = \left(e^N - 1\right)^2 y,$$

$$\Delta^3 y = \frac{\Delta^2 y}{y} \cdot \frac{\Delta y}{y} \cdot y = \left(e^N - 1\right)^3 y,$$

$$\Delta^4 y = \frac{\Delta^3 y}{y} \cdot \frac{\Delta y}{y} \cdot y = \left(e^N - 1\right)^4 y, \text{ u. ſ. f.}$$

und folglich allgemein:

$$\Delta^m y = \left\{e^{i\frac{\partial}{\partial x} + {}^1i\frac{\partial}{\partial {}^1x} + {}^2i\frac{\partial}{\partial {}^2x} + \ldots} - 1\right\}^m y.$$

21. Die partiellen Differenzen von y, in Bezug auf x, ${}^1x$, ${}^2x$, ꝛc. allein als veränderlich, bezeichne man durch $\Delta_x y$, $\Delta_{{}^1x} y$, $\Delta_{{}^2x} y$, ꝛc. und die Werthe von y, wenn $n+1$, n, $n-1$, $n-2$, $n-3$, ꝛc., veränderliche Größen dieſer Function eine Veränderung erlitten haben, durch y', y'', y''', y'''', ꝛc. Läßt man nun y'' ſich nach ${}^n x$ verändern; ſo iſt offenbar

$$y' = y'' + \Delta_{{}^n x} y'',$$

oder, wenn man ſich y'' abgeſondert denkt, da dieſe Betrachtung offenbar auch auf die übrigen Werthe von y anwendbar iſt:

$$y' = \left(1 + \Delta_{{}^n x}\right) y'', \; y'' = \left(1 + \Delta_{{}^{n-1} x}\right) y''', \; y''' = \left(1 + \Delta_{{}^{n-2} x}\right) y'''',$$

$$\ldots\ldots y^{(n+1)} = \left(1 + \Delta_x\right) y,$$

$= \left|\left(1+\Delta_x\right)\left(1+\Delta_{\frac{1}{x}}\right)\left(1+\Delta_{\frac{2}{x}}\right)\cdots-1\right|$;

erhält man nach (20.).

$$\Delta^2 y = \frac{\Delta y}{y}\,.\,\frac{\Delta y}{y}\,.\,y = P^2 y,$$

$$\Delta^3 y = \frac{\Delta^2 y}{y}\,.\,\frac{\Delta y}{y}\,.\,y = P^3 y,$$

$$\Delta^4 y = \frac{\Delta^3 y}{y}\,.\,\frac{\Delta y}{y}\,.\,y = P^4 y, \text{ ꝛc.}$$

rhaupt;

$$= \left|\left(1+\Delta_x\right)\left(1+\Delta_{\frac{1}{x}}\right)\left(1+\Delta_{\frac{2}{x}}\right)\cdots-1\right|$$

Setzt man in $y = fx$ nach und nach im
o erhält man, succeſſive, Ausdrücke für
), $f(x+3i)$ ꝛc. durch die Differenz
)t zu bemerkende allgemeine Geſetz iſt:

$$= y + \frac{n}{1}\Delta y + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 y + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$$

1 Taylor'ſchen Satze iſt aber:

$$= y + \frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{ni}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\cdot\frac{n^2 i^2}{1.2} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\cdot\frac{n^3 i^3}{1.2.3} +$$

twickelungen müſſen identiſch', die zu ei
n n gehörenden Glieder alſo einander g
t, wenn man die der erſten Potenz entſt
immt:

ſo iſt nach dem Vorhergehenden:

$$i^{m+1}\frac{\partial^{m+1}y}{\partial x^{m+1}} = i\frac{\partial p}{\partial x} = \{\log\text{nat}(1+\Delta)\}\,p.$$

Folglich erhält man nach und nach:

$$i\frac{\partial y}{\partial x} = \{\log\text{nat}(1+\Delta)\}\,y = p,$$

$$i^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \{\log\text{nat}(1+\Delta)\}\,p = \{\log\text{nat}(1+\Delta)\}^2 y = p',$$

$$i^3\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \{\log\text{nat}(1+\Delta)\}\,p' = \{\log\text{nat}(1+\Delta)\}^3 y = p'', \text{ ꝛc.}$$

woraus ſich leicht ergiebt, daß überhaupt:

$$i^m\frac{\partial^m y}{\partial x^m} = \{\log\text{nat}(1+\Delta)\}^m y.$$

Iſt nun y eine Function mehrerer veränderlichen Größen; ſo iſt:

$$i^m\frac{\partial^m y}{\partial x^m} = \left\{\log\text{nat}\left(1+\Delta_x\right)\right\}^m y$$

$$i^m\frac{\partial^m y}{\partial x_1^m} = \left\{\log\text{nat}\left(1+\Delta_{x_1}\right)\right\}^m y$$

$$i^m\frac{\partial^m y}{\partial x_2^m} = \left\{\log\text{nat}\left(1+\Delta_{x_2}\right)\right\}^m y \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

Alſo für $m = 1$, wenn man zugleich auf beiden Seiten addirt:

$$\left\{i\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial x_1}+i\frac{\partial}{\partial x_2}+\ldots\right\}y$$

$$= \left\{\log\text{nat}\left[\left(1+\Delta_x\right)\left(1+\Delta_{x_1}\right)\left(1+\Delta_{x_2}\right)\ldots\right]\right\}y.$$

Aber nach (11.) und (21.)

$$\left\{i\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial x_1}+i\frac{\partial}{\partial x_2}+\ldots\right\}y = \partial y,$$

$$\left(1+\Delta_x\right)\left(1+\Delta_{x_1}\right)\left(1+\Delta_{x_2}\right)\ldots = 1+\Delta.$$

Alſo

$$\partial y = \{\log\text{nat}(1+\Delta)\}\,y.$$

Iſt nun wieder überhaupt $\partial^m y = p$ ſo iſt $\partial^{m+1} y = \partial p$; alſo nach der vorigen Formel:

$$\partial^{m+1} y = \{\log\text{nat}(1+\Delta)\}\,p,$$

und folglich ſucceſſive:

$$\partial^m y = \left\{\log \text{nat}\,(1+\Delta)\right\}^m y.$$

. Es giebt ähnliche Formeln für die Sum
nrechnung. 70. 71.), deren Grund
ch

$$\Sigma^m \Delta^m z = z$$

lach (20.) iſt:

$$\Delta^m z = A\partial^m z + B\partial^{m+1} z + C\partial^{m+2} z + \ldots,$$

B, C, ꝛc nur von m abhängen. Folg
m nimmt:

$$z = A\Sigma^m \partial^m z + B\Sigma^m \partial^{m+1} z + C\Sigma^m \partial^{m+2} z + \ldots$$

ße nun:

$$\frac{\partial^m z}{\partial x^m} = y,\ \partial^m z = y\partial x^m,\ z = \int^m y \partial x^m.$$

ıet man ∂x durch i, ſo iſt

$$i^m \frac{\partial^m z}{\partial x^m} = i^m y,$$

$$i^{m+1} \frac{\partial^{m+1} z}{\partial x^{m+1}} = i^{m+1} \frac{\partial y}{\partial x},$$

$$i^{m+2} \frac{\partial^{m+2} z}{\partial x^{m+2}} = i^{m+2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},\ \text{ꝛc. ꝛc.}$$

$$\Sigma^m \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\overset{s}{\mathfrak{A}}}{i^m} \int^{m-1} y \partial x^{m-s} + \overset{s}{\mathfrak{B}} i \Sigma^m \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \ldots$$

$$\Sigma^m \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\overset{2}{\mathfrak{A}}}{i^m} \int^{m-2} y \partial x^{m-2} + \overset{2}{\mathfrak{B}} i \Sigma^m \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\Sigma^m \frac{\partial^{m-1} y}{\partial x^{m-1}} = \frac{\overset{m-1}{\mathfrak{A}}}{i^m} \int y \partial x + \overset{m-1}{\mathfrak{B}} i \Sigma^m \frac{\partial^m y}{\partial x^m} + \ldots$$

$$\Sigma^m \frac{\partial^m y}{\partial x^m} = \frac{\overset{m}{\mathfrak{A}}}{i^m} y + \overset{m}{\mathfrak{B}} i \Sigma^m \frac{\partial^{m+1} y}{\partial x^{m+1}} + \ldots$$

$$\Sigma^m \frac{\partial^{m+1} y}{\partial x^{m+1}} = \frac{\overset{m+1}{\mathfrak{A}}}{i^m} \frac{\partial y}{\partial x} + \overset{m+1}{\mathfrak{B}} i \Sigma^m \frac{\partial^{m+2} y}{\partial x^{m+2}} + \ldots \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

Nach gehöriger Subſtitution dieſer Ausdrücke in die obige Reihe für $\Sigma^m y$ erhält man eine Reihe von folgender Form:

$$\Sigma^m y = \frac{A_1}{i^m} \int^m y \partial x^m + \frac{A_2}{i^{m-1}} \int^{m-1} y \partial x^{m-1} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{A_m}{i} \int y \partial x + A_{m+1} y + A_{m+2} i \frac{\partial y}{\partial x} + \ldots$$

Setzt man nun $y = e^x$; ſo erhält man nach (16.) leicht $\int^m y = y \partial x^m$. Alſo $y = e^x = \int^m y \partial x^m$. Auch iſt

$$\Delta e^x = e^{x+i} - e^x = e^x (e^i - 1),$$

$$e^x = \frac{\Delta e^x}{e^i - 1}, \quad \Sigma e^x = \frac{e^x}{e^i - 1}, \quad \Sigma^m e^x = \frac{e^x}{(e^i - 1)^m}.$$

Subſtituirt man nun dieſe Ausdrücke in die obige Reihe für $\Sigma^m y$, und hebt durch e^x auf; ſo wird

$$\frac{1}{(e^i - 1)^m} = \frac{A_1}{i^m} + \frac{A_2}{i^{m-1}} + \ldots + \frac{A_m}{i}$$
$$+ A_{m+1} + A_{m+2} i + A_{m+3} i^2 + \ldots$$

Folglich auch nach ähnlichen Betrachtungen wie früher:

$$\left\{ i \frac{\partial}{\partial x} \right\}^{-m} y =$$

$$\frac{A_1}{i^m} \frac{\partial^{-m} y}{\partial x^m} + \frac{A_2}{i^{m-1}} \frac{\partial^{m-1} y}{\partial x^{m-1}} + \ldots + \frac{A_m}{i} \frac{\partial y}{\partial x}$$
$$+ A_{m+1} y + A_{m+2} i \frac{\partial y}{\partial x} + A_{m+3} i^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \ldots$$
$$= \frac{A_1}{i^m} \frac{\partial^{-m} y}{\partial x^{-m}} + \frac{A_2}{i^{m-1}} \frac{\partial^{-(m-1)} y}{\partial x^{-(m-1)}} + \ldots + \frac{A_m}{i} \frac{\partial^{-1} y}{\partial x^{-1}}$$
$$+ A_{m+1} y + A_{m+2} i \frac{\partial y}{\partial x} + A_{m+3} i^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \ldots$$

·. Aus der für $\Sigma^m y$ vorher gefundenen
an leicht

$$\int^m = \mathfrak{A}_1 \Sigma^m y + \frac{\mathfrak{A}_2}{i^{m-1}} \int^{m-1} y \partial x^{m-1} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\mathfrak{A}_m}{i} \int y \partial x + \mathfrak{A}_{m+1} y + \mathfrak{A}_{m+2} i \frac{\partial y}{\partial x}$$

s unmittelbar ähnliche Reihen für $\frac{1}{i^{m-1}} \int^m$
$\int y \partial x$ folgen. Ferner erhält man aus (2

$$i \frac{\partial y}{\partial x} = \mathfrak{B}_1 \Delta y + \mathfrak{B}_2 \Delta^2 y + \mathfrak{B}_3 \Delta^3 y + \ldots$$

$$i^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \mathfrak{C}_1 \Delta^2 y + \mathfrak{C}_2 \Delta^3 y + \mathfrak{C}_3 \Delta^4 y + \ldots$$

b gehöriger Subſtitution erhält man für $\frac{1}{i^m}$
)e von folgender Form:

$$+ B' \Sigma^{m-1} y + \ldots + M' \Sigma y + N' y + O' \Delta y + P' \Delta$$

nan nun wieder $y = e^x$; ſo ergiebt ſich,

$$\Delta^m e^x = e^x (e^i - 1)^m$$

ıg wie vorher:

$$\frac{A'}{-1)^m} + \frac{B'}{(e^i-1)^{m-1}} + \ldots + \frac{M'}{e^i-1}$$

$$+ N' + O' (e^i - 1) + P' (e^i -$$

$i = \text{lognat } e^i = \text{lognat } (1 + e^i -$
$^i - 1 = \wedge$:

25. Die Ausdehnung der hier für die Summen entwickelten Formeln auf Functionen mit mehrern Veränderlichen geſtattet der Raum nicht. Schon Leibnitz hat die Bemerkung gemacht, daß das nte Differential des Productes $xyz\ldots$ der Potenz $(\partial x + \partial y + \partial z + \ldots)^n$ gleich ſey, wenn man nur in der Entwickelung dieſes Polynoms die Exponenten der Potenzen von ∂x, ∂y, ∂z, ꝛc. dem Zeichen ∂ beifügt, und x, y, z, ꝛc. ſtatt $\partial^0 x$, $\partial^0 y$, $\partial^0 z$, ꝛc. ſchreibt. Dieſe Idee hat ſodann Lagrange weiter verfolgt, in einer ſchönen Abhandlung in den Mém. de Berlin 1772., und den größten Theil der hier entwickelten merkwürdigen Formeln verdankt man ſeinem Scharfſinne. Später hat Laplace dieſe Unterſuchung noch mehr erweitert, und alles aus einer gemeinſchaftlichen Quelle, der Theorie ſeiner fonctions génératrices, abgeleitet, worüber vorzüglich ſeine Théorie analytique des probabilités. 3. éd. Paris 1820. Chap. I. II. Part. I. nachzuſehen iſt. Von den Arbeiten anderer Geometer über dieſen Gegenſtand heben wir nur noch eine Abhandlung von Brinkley (Philos. Trans. 1807.) heraus. Auch ſ. m. Lacroix Traité du calc. diff. et int. T. III. p. 60. ff. p. 100. ff.

Gränzen der Taylor'ſchen Reihe.

26. Sey $y = fx$, $y' = f(x + i)$. Man differentiire, x als conſtant betrachtend, y' nach i, und ſetze

$$\frac{\partial^n y'}{\partial i^n} = \frac{\partial^n y}{\partial x^n} + P;$$

ſo iſt, da $\frac{\partial^n y}{\partial x^n}$ kein i enthält:

$$\frac{\partial^{n+1} y'}{\partial i^{n+1}} = \frac{\partial P}{\partial i}, \quad \partial P = \frac{\partial^{n+1} y'}{\partial i^{n+1}}\,\partial i; \quad P = \int \frac{\partial^{n+1} y'}{\partial i^{n+1}}\,\partial i + \text{Const};$$

$$\frac{\partial^n y'}{\partial i^n} = \frac{\partial^n y}{\partial x^n} + \int \frac{\partial^{n+1} y'}{\partial i^{n+1}}\,\partial i + \text{Const.}$$

Es iſt aber, weil x als conſtant betrachtet wird:

$$\frac{\partial^n y'}{\partial i^n} = \frac{\partial^n f(x+i)}{(\partial(x+i))^n} = \left(\frac{\partial^n y}{\partial x^n}\right)',$$

ſo daß alſo $\frac{\partial^n y'}{\partial i^n}$ für $i = 0$ in $\frac{\partial^n y}{\partial x^n}$ *übergeht.* Beſtimmt

$$\int \partial i \int \int \frac{\partial^{n+1} y'}{\partial i^{n+1}} \partial i = -\frac{\partial^n y}{\partial x^n} \cdot \frac{i^2}{1.2} + \int \partial i$$

. . . . . .

$$\int \partial i \int \ldots \int \frac{\partial^{n+1} y'}{\partial i^{n+1}} \partial i = -\frac{\partial^n y}{\partial x^n} \cdot \frac{i^r}{1 \ldots r} + \int \partial i \int$$

Integrale ſo beſtimmt, daß ſie für i =

Betrachtet man nun in $\int^r \frac{\partial^n y'}{\partial i^n} \partial i^r$,

am Integralzeichen die Anzahl der aufei
Integrationen bezeichnet, bei der 1ten,
r—1)ten, rten Integration, r—1, r
l, kein ∂i als conſtant, und beſtimmt
daß es für i = o verſchwindet; ſo iſt

$$\int \frac{\partial^n y'}{\partial i^n} \partial i^r = \partial i^{r-1} \int \frac{\partial^n y'}{\partial i^n} \partial i$$

$$\int^2 \frac{\partial^n y'}{\partial i^n} \partial i^r = \partial i^{r-2} \int \partial i \int \frac{\partial^n y'}{\partial i^n} \partial i$$

$$\int^3 \frac{\partial^n y'}{\partial i^n} \partial i^r = \partial i^{r-3} \int \partial i \int \partial i \int \frac{\partial^n y'}{\partial i^n} \partial i$$

. . . . . .

$$\int^r \frac{\partial^n y'}{\partial i^n} \partial i^r = \int^r \partial i \int^{r-1} \ldots \int^1 \partial i \int \frac{\partial^n y'}{\partial i^n} \partial i$$

ß alſo

$$\int^{r+1} \frac{\partial^{n+1} y'}{\partial i^{n+1}} \partial i^{r+1} = -\frac{\partial^n y}{\partial x^n} \cdot \frac{i^r}{1..r} +$$

— n iſt alſo +

weil $-y+y'$ wirklich der Werth von $\int \frac{\partial y'}{\partial i}\partial i = \int \partial y' = y'$ iſt, welcher für $i = o$ verſchwindet. Es iſt alſo

$$y = y + \frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{i}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\cdot\frac{i^2}{1.2} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\partial^n y}{\partial x^n}\cdot\frac{i^n}{1..n} + \int^{n+1}\frac{\partial^{n+1}y'}{\partial i^{n+1}}\partial i^{n+1}$$

Dieſes Verfahren hat zuerſt D'Alembert (Récherches sur différens points importans du systême du monde. T. I. p. 50. Auch ſ. m. in dieſem Wörterbuche D'Alemberts Lehrſatz.) gebraucht, den Taylor'ſchen Lehrſatz zu beweiſen, ohne jedoch Taylors als Erfinder zu gedenken. Auch Cauchy (Résumé des léçons données à l'école polyt. sur le calcul infinitesimal. T. I. Paris. 1823. p. 145.) trägt den Satz erſt ſpät in der Integralrechnung vor, ſeinen Anſichten über die Analyſis des Unendlichen gemäß. Die wichtigſte Anwendung von D'Alemberts Idee hat aber Lagrange gemacht.

27. Es iſt nämlich (Thl. II. S. 783.) überhaupt: $\int PQ\partial x = P\int Q\partial x - \int \partial P \int Q\partial x$. Folglich, wenn X irgend eine Function von x iſt:

$$\int X\partial x = \int X\partial x,\ \int^2 X\partial x^2 = \int \partial x \int X\partial x = x\int X\partial x - \int xX\partial x,$$
$$\int^3 X\partial x^3 = \int \partial x \int^2 X\partial x^2 = \int x\partial x \int X\partial x - \int \partial x \int xX\partial x$$
$$= \tfrac{1}{2}x^2\int X\partial x - \tfrac{1}{2}\int Xx^2\partial x - x\int xX\partial x + \int Xx^2\partial x$$
$$= \frac{1}{1.2}\left\{x^2\int X\partial x - 2x\int Xx\partial x + \int Xx^2\partial x\right\}$$

Geht man auf dieſe Art weiter; ſo ergiebt ſich leicht allgemein:

$$\int^{n+1} X\partial x^{n+1} = \frac{1}{1..n}\left\{x^n\int X\partial x - \frac{n}{1}x^{n-1}\int Xx\partial x\right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}\int Xx^2\partial x + \ldots\ldots + \frac{n}{1}x\int Xx^{n-1}\partial x \pm \int Xx^n\partial x\right\}$$

Nimmt man alle Integrale auf der rechten Seite ſo, daß ſie für $x = o$ verſchwinden; ſo iſt das vielfache Integral auf der linken Seite auf gleiche Art beſtimmt.

28. Für $\int^{n+1}\frac{\partial^{n+1}y'}{\partial i^{n+1}} = A$ erhält man hieraus:

$$\int^{n+1} A\partial i^{n+1} = \frac{1}{1..n}\left\{i^n\int A\partial i - \frac{n}{1}i^{n-1}\int Ai\partial i\right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)}{1.2}i^{n-2}\int Ai^2\partial i + \ldots\ldots \mp \frac{n}{1}i\int Ai^{n-1}\partial i \pm \int Ai^n\partial i\right\}$$

... man das Integral auf der rechten S
, daß es für $i = o$ verschwindet, und
ation überall i für Θ setzt.

nachdem man aber x oder i als constant
ier:

$$\frac{\partial^{n+1} y'}{\partial i^{n+1}} = \frac{\partial^{n+1} f(x+i)}{(\partial(x+i))^{n+1}}, \frac{\partial^{n+1} y'}{\partial x^{n+1}} = \frac{\partial^{n+1} f(x+i)}{(\partial(x+i))^{n+1}},$$

d. i. $\frac{\partial^{n+1} y'}{\partial i^{n+1}} = \frac{\partial^{n+1} y'}{\partial x^{n+1}}$, und

$$\int^{n+1} A \partial i^{n+1} = \frac{1}{1..n} \int \frac{\partial^{n+1} y'}{\partial x^{n+1}} (\Theta - i)^n \partial i,$$

tegral wie oben genommen.

ner setze man $\Theta - i = z\Theta$, $i = \Theta($
$- \Theta \partial z$; so ist

$$\int^{n+1} A \partial i^{n+1} = -\frac{1}{1...n} \Theta^{n+1} \int \frac{\partial^{n+1} y'}{\partial x^{n+1}} z^n \partial$$

tegral so genommen, daß es für $i =$
verschwindet, und dann überall i für
$\frac{-i}{i} = o$, gesetzt, d. h. das Integral v
$: o$ genommen. Sind nun $\varphi(z)$ und ψ
unsers Integrals, so beschaffen, daß $\varphi($
B; $\psi(o) = o$, $\psi(1) = B'$; so ist $\psi(z)$
$(o) = \varphi(o) + C$, $\psi(1) = \varphi(1) +$
wenn man subtrahirt ...

$$y' = y + \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{i}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{i^2}{1.2} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\partial^n y}{\partial x^n} \cdot \frac{i^n}{1 \ldots n} + \frac{i^{n+1}}{1 \ldots n} \int_0^1 \frac{\partial^{n+1} y'}{\partial x^{n+1}} z^n \partial z.$$

Für das in dem Differentialquotienten vorkommende i muß man vor der Integration überall $\Theta(1-z)$, und nach der Integration für Θ überall i ſetzen. Bei der Integration iſt x als conſtant zu betrachten.

Aus der Vergleichung mit der unbegränzten Taylor'ſchen Reihe folgt leicht:

$$\frac{i^{n+1}}{1 \ldots n} \int_0^1 \frac{\partial^{n+1} y'}{\partial x^{n+1}} z^n \partial z = \frac{\partial^{n+1} y}{\partial x^{n+1}} \cdot \frac{i^{n+1}}{1 \ldots (n+1)}$$
$$+ \frac{\partial^{n+2} y}{\partial x^{n+2}} \cdot \frac{i^{n+2}}{1 \ldots (n+2)} + \frac{\partial^{n+3} y}{\partial x^{n+3}} \cdot \frac{i^{n+3}}{1 \ldots (n+3)} + \ldots$$

wodurch wir alſo zugleich zur Summirung einzelner Theile der Taylor'ſchen Reihe gelangt ſind; das Integral iſt immer wie vorher zu nehmen.

29. Für die Anwendung der Taylor'ſchen Reihe auf Geometrie und Mechanik ſind die vorigen Unterſuchungen ſehr wichtig, weil ſie zugleich zu dem wichtigen Satze führen, daß die Summe aller Glieder dieſer Reihe von irgend einem Gliede an bis in's Unendliche durch Verkleinerung des Increments i kleiner gemacht werden kann als jede gegebene Größe. Um den Beweis völlig deutlich und ſtreng führen zu können, halten wir folgende einleitende Betrachtung für nöthig.

30. In irgend einer Function X von x gebe man dem x zwei Werthe a und b, und ſuche die Summe aller in dieſem Intervalle von a bis b liegenden Werthe von X zu beſtimmen. Zu dem Ende theile man b — a in n gleiche Theile, deren jeder = i; ſo ſind die den Endpuncten dieſer einzelnen Theile von b bis a entſprechenden Werthe von X:

$$X - \frac{\partial X}{\partial x} \cdot \frac{i}{1} + \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \cdot \frac{i^2}{1.2} - \ldots,$$
$$X - \frac{\partial X}{\partial x} \cdot \frac{2i}{1} + \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \cdot \frac{2^2 . i^2}{1.2} - \ldots,$$
$$X - \frac{\partial X}{\partial x} \cdot \frac{3i}{1} + \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \cdot \frac{3^2 . i^2}{1.2} - \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$X - \frac{\partial X}{\partial x} \cdot \frac{ni}{1} + \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \cdot \frac{n^2 . i^2}{1.2} - \ldots;$$

$$i\left\{X - \frac{\partial X}{\partial x}\cdot\frac{ni}{1} + \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\cdot\frac{n^2.i^2}{1.2} - \ldots\right\};$$

$= b.$

glich nach der bekannten Form der Sum
der natürlichen Zahlen (Potenz. 29. ff.),
(.) überhaupt beſtimmte von n unabhän
i bezeichnen, nach einigen leichten Verw
mme aller Werthe von X in dem Int
bis $x = b$:

$$-\frac{\partial X}{\partial x}\left\{\frac{1}{1.2}(ni)^2 + (.)(ni)i\right\}$$

$$+\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\left\{\frac{1}{1.2.3}(ni)^3 + (.)(ni)^2.i + (.)(ni)i^2\right.$$

$$\frac{-a}{1} - \frac{\partial X}{\partial x}\cdot\frac{(b-a)^2}{1.2} + \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\cdot\frac{(b-a)^3}{1.2.3} - \ldots$$

:gend eine für $i = o$ verſchwindende Fu
net. Ueberall muß $x = b$ geſetzt wer
nmation gilt mit deſto mehr Genauigkeit

Um zu völliger Genauigkeit überzugeh
$= o$ ſetzen. Dies giebt die Summe all
on $x = a$ bis $X = b$:

$$\frac{b-a}{1} - \frac{\partial X}{\partial x}\cdot\frac{(b-a)^2}{1.2} + \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\cdot\frac{(b-a)^3}{1.2.3}$$

durch y_a, y_b; ſo iſt, wenn man $x - (x-a) = a$ für x, nach der Taylor'ſchen Reihe ſetzt:

$$y_a = y - X.\frac{x-a}{1} + \frac{\partial X}{\partial x}.\frac{(x-a)^2}{1.2} - \ldots$$

und folglich, wenn man $x = b$ ſetzt:

$$y_b - y_a = X.\frac{b-a}{1} - \frac{\partial X}{\partial x}.\frac{(b-a)^2}{1.2} + \ldots$$

Alſo iſt die Summe aller Werthe von X, in dem Intervall von $x = a$ bis $x = b$, $= y_b - y_a = \int_a^b X\partial x$, da $y_b - y_a$ offenbar dieſem beſtimmten Integral gleich iſt.

31. Nehmen wir nun im Folgenden immer bloß auf die abſoluten Werthe der Größen Rückſicht, und ſeyen M', m' der größte und kleinſte Werth von X in dem Intervall von $x = a$ bis $x = b$; ſo iſt gewiß immer

$$\int_a^b X\partial x < (b-a)M',$$

und, wenn X in dem angegebenen Intervall ſein Zeichen nicht ändert:

$$\int_a^b X\partial x > (b-a)m'.$$

Aendere nun in dem Intervall $z = 0$ bis $z = 1$, d. i. wegen $i = \Theta(1-z)$, und weil i für Θ geſetzt wird, von $i = i$ bis $i = 0$, $\frac{\partial^{n+1}y'}{\partial x^{n+1}}$ wegen der Kleinheit von i ſein Zeichen nicht, und ſeyen M', m' der größte und kleinſte Werth dieſes Differentialquotienten im angegebenen Intervall; ſo iſt klar, daß

$$\int_0^1 \frac{\partial^{n+1}y'}{\partial x^{n+1}} z^n\partial z < \int_0^1 M'z^n\partial z, < \frac{M'}{n+1};$$

$$\int_0^1 \frac{\partial^{n+1}y'}{\partial x^{n+1}} z^n\partial z > \int_0^1 m'z^n\partial z, > \frac{m'}{n+1};$$

wo natürlich M', m' als conſtante Größen zu betrachten ſind.

Folglich ſind nach dem Obigen

$$y + \frac{\partial y}{\partial x}.\frac{i}{1} + \ldots + \frac{\partial^n y}{\partial x^n}.\frac{i^n}{1\ldots n} \pm \frac{M'i^{n+1}}{1\ldots(n+1)}$$

$$y + \frac{\partial y}{\partial x}.\frac{i}{1} + \ldots + \frac{\partial^n y}{\partial x^n}.\frac{i^n}{1\ldots n} \pm \frac{m'i^{n+1}}{1\ldots(n+1)}$$

zwei Gränzen von y', die deſto näher an einander fallen, je kleiner i iſt. Sind, jetzt mit Berückſichtigung der Vorzeichen, M, m der größte und kleinſte Werth von

$\frac{M'i^{n+1}}{.(n+1)} > \frac{\partial^{n+1}y}{\partial x^{n+1}} \cdot \frac{i^{n+1}}{1..(n+1)} + \frac{\partial^n y}{\partial x^n} \cdot \frac{i^n}{1..n}$

nehme man, welches, wegen der Stetigke
i kleinen Intervallen, offenbar immer mi
n, daß $\frac{\partial^{n+1}y'}{\partial x^{n+1}}$ zwiſchen i und o entwede
bnimmt, oder ſich immer gleich bleibt, i
: größten Werth dieſes Differentialquotie
ntervall durch M″, und den entſprechen
urch i′, irgend eine noch ſo kleine Größe
kann man offenbar zu gleicher Zeit

$$i < i', \; 1 < \sqrt[n+1]{\frac{1 \ldots (n+1).\nu}{M''}};$$

$$\text{d. i. } i < i', \; \frac{i^{n+1} M''}{1 \ldots (n+1)} < \nu$$

n. Da nun in dem Intervall zwiſchen i′
fferentialquotient immer zu- oder abnimm
gleich bleibt, und i, welchem M′ entſp
iſt offenbar immer $M' < M''$.

Alſo $\frac{M'i^{n+1}}{1 \ldots (n+1)} < \frac{M''i^{n+1}}{1 \ldots (n+1)}$

an kann folglich um ſo mehr i immer ſo
daß $\frac{M'i^{n+1}}{1 \ldots (n+1)}$, alſo auch

$\frac{\partial^{n+1}y}{\partial x^{n+1}} \cdot \frac{i^{n+1}}{1..(n+1)} + \frac{\partial^{n+2}y}{\partial x^{n+2}} \cdot \frac{i^{n+2}}{1..(n+2)} +$

d. h. man kann i immer ſo klein annehmen, daß die Summe aller Glieder der Taylorſchen Reihe von einem gewiſſen Gliede an bis in's Unendliche kleiner iſt, als das dieſem Gliede voraufgehende Glied. M. ſ. Lagrange Théorie des fonctions. p. 54., und Léçons sur le calcul des fonctions. p. 88. Lacroix Traité du calc. diff. etc. I. p. 380. III. p. 396., und Traité élém. du calc. diff. etc. éd. 2. p. 596.; zwei Abhandlungen von Ampère im Journal de l'école polyt. Cah. XIII., und den Annales de Math. XVII. p. 317.; Récherche sur la sommation des termes de la série de Taylor par Hippolyte Vernier. Annales de Math. XV. p. 165., wo das beſtimmte Integral noch weiter entwickelt iſt; die ſchon oben (26.) angeführte Schrift von Cauchy, und Bohnenbergers höhere Analyſis. Tüb. 1811. S. 38.

33. Um ein Beiſpiel zu geben, ſey $y = a^x$; alſo $y' = a^{x+i}$; ſo ergiebt ſich leicht

$$\frac{\partial^{n+1} y'}{\partial x^{n+1}} = a^{x+i} (\log n\, a)^{n+1}$$

Der größte und kleinſte Werth in dem Intervall $i = i$ bis $i = o$ ſind offenbar

$$a^{x+i} (\log n\, a)^{n+1},\ a^x (\log n\, a)^{n+1},$$

und folglich die Gränzen der Glieder vom $(n+2)$ten an in der Reihe für a^{x+i}:

$$\frac{a^{x+i} (i \log n\, a)^{n+1}}{1 \ldots (n+1)},\ \frac{a^x (i \log n\, a)^{n+1}}{1 \ldots (n+1)}$$

Wollte man den Werth der Summe dieſer Glieder ſelbſt finden; ſo müßte man

$$\int_0^1 \frac{\partial^{n+1} y'}{\partial x^{n+1}} z^n \partial z$$

nach den Vorſchriften in (28.) beſtimmen. Es iſt aber

$$\frac{\partial^{n+1} y'}{\partial x^{n+1}} z^n \partial z = a^x k^{n+1} . a^{\Theta(1-z)} z^n \partial z$$

für $\log n\, a = k$. Nun erhält man leicht nach der Formel

$$\int PQ \partial x = P \int Q \partial x - \int \partial P \int Q \partial x:$$

$$\int a^{\Theta(1-z)} z^n \partial z = \frac{1}{n+1} a^{\Theta(1-z)} z^{n+1} + \frac{k\Theta}{n+1} \int a^{\Theta(1-z)} z^{n+1} \partial z$$

$$\frac{i^{n+1}}{1\ldots n}\int_0^1 \frac{\partial^{n+1}y'}{\partial x^{n+1}}\,z^n\partial z$$

$$\frac{)^{n+1}}{..n}\left\{\frac{n(n-1)\ldots1.(a^i-1)}{(ki)^{n+1}}-\frac{1}{ki}-\frac{n}{(ki)^2}-\frac{n(n}{(k}\right.$$

$$\ldots-\frac{n(n-1)\ldots2}{(ki)^n}\Big\}$$

$$\left\{a^i-1-\frac{ki}{1}-\frac{(ki)^2}{1.2}-\frac{(ki)^3}{1.2.3}-\ldots-\frac{(}{1.}\right.$$

auch aus der bekannten Reihe für a^{x+i} u

r $y=x^m$ ſind die Gränzen:

$$\frac{\ldots(m-n)}{..(n+1)}(x+i)^{m-n-1}i^{n+1},\frac{m(m-1)..(m-n)}{1.2.3..(n+1)}x^{}$$

n ſo in andern Fällen.

omalien der Taylor'ſchen R

So lange x eine völlig unbeſtimmte Grö
$x+i$) immer in einer Reihe nach den
Potenzen von i entwickelt werden (3).
1 x beſtimmte Werthe bei, ſo können hi
zen ſtatt finden, wie z. B. in den F
$-i$) und $\log(x+i)$ für $x=0$ (Cyclom

den bestimmten Werth a destruiren. Ist z. B. $y = \sqrt{x} + \sqrt{(x-a)^4}$; so erhält man für $x = a + i$:

$$y' = \sqrt{a} + \frac{i}{2\sqrt{a}} + i^2 - \frac{i^3}{8\sqrt{a^3}} \ldots$$

Für $y = b \pm \sqrt{x-a}$ ist:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \pm\tfrac{1}{2}(x-a)^{-\frac{1}{2}}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \mp\tfrac{1}{4}(x-a)^{-\frac{3}{2}} \text{ &c.}$$

Also

$$y' = b + (x-a)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}(x-a)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{i}{1} - \tfrac{1}{4}(x-a)^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{i^2}{1.2} + \ldots$$

$$y' = b - (x-a)^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}(x-a)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{i}{1} + \tfrac{1}{4}(x-a)^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{i^2}{1.2} - \ldots$$

Für $x = a$ reduciren sich diese beiden Werthe von y' auf b, so daß also $b \pm \sqrt{i} = b$ seyn müßte, wenn y' für $x = a$ die Form

$$y + pi + qi^2 + ri^3 + \ldots,$$

beibehielte. Die französischen Schriftsteller bedienen sich in dergleichen Fällen gewöhnlich des Ausdrucks, die Taylor'sche Reihe sey en défaut. Indeß hat schon Lacroix auf die Unrichtigkeit dieses Ausdrucks aufmerksam gemacht, indem es vielmehr als ein Vorzug der Analysis zu betrachten ist, daß sie die Fälle, wo gewisse Formeln einer Ausnahme unterworfen sind, selbst anzeige, so wie denn hier in der That die Taylor'sche Reihe selbst andeutet, daß für den bestimmten Werth $x = a$ die Entwickelung von $f(x+i)$ nach den positiven ganzen Potenzen von i unmöglich ist. Eine vollständige Ausführung dieser Untersuchungen, wie sie bey Lagrange Théorie des fonctions. Chap. 5., und Lacroix Traité du calcul diff. etc. I. Chap. 3. zu finden ist, gestattet hier der Raum nicht, so daß wir uns auf folgende wenige Bemerkungen beschränken müssen.

35. Enthält $f(a+i) = y_1$ negative Potenzen von i; so ist fa, d. i. fx für $x = a$, $= \infty$, woraus umgekehrt sich schließen läßt, daß $f(a+i)$ negative Potenzen von i enthalten wird, wenn $fa = \infty$. Differentiirt man y_1 nach i; so werden auch offenbar alle Differentialquotienten negative Potenzen von i enthalten, und demnach für $i = o$ unendlich werden. Nun ist aber

Tertie, ſ. Minute.

Testudo quadrabilis hemisphae
riſche Aufgabe.

Tetradik, ſ. Tetraktik.

Tetraedralzahl, ſ. Polyedralzahlen ii
. (13.)

Tetraëdrometria, würde daſſelbe in S
tige Pyramide zu leiſten haben, was die
r das Dreieck leiſtet, d. h. ſie müßte d
lgenden allgemeinen Aufgabe geben: We
en, die zur Conſtruction einer dreiſeitige
n, 6 zur Beſtimmung der übrigen hint
ſind, die übrigen Stücke zu finden. B
ten: De Gua propositions etc. sur
ou essai de tetraèdrometria. Mém
p. 363., und vorzüglich Carnots
as Verhältniß, welches zwiſchen den Ei
, willkührlich im Raume angenommen
. (Carnots Geom. d. Stellung v.
II. Altona. 1810. S. 254.), und
ht auch die ſchöne analytiſche Abhandlun
e über die dreiſeitige Pyramide

Tetragonalzahl, gleichbedeutend mit Quadratzahl in der Reihe der Polygonalzahlen.

Tetragoniſche Linie, ſ. Proportionalzirkel. (6).

Tetragonismus, ſ. Quadratur.

Tetragonometrie, in jetzt gewöhnlicher Bedeutung ſ. Trigonometrie. (V.) Jobi Ludolffi, Math. Prof. et Senat. Erffurtensis, Tetragonometria tabularia. Francof. et Lips. 1690. 4. iſt der Titel ſeines Werks, welches die Quadrate aller Zahlen von 1 bis 100000 ziemlich richtig enthält.

Tetragonum, Viereck.

Tetraktik, Tetraktys, iſt das Zahlenſyſtem, deſſen Grundzahl 4 iſt. Ariſtoteles (Probl. Sect. XV. Probl. III.), in dem er die Urſache, daß faſt alle Völker 5:10 zählen, in der Zahl unſerer Finger findet, erwähnt zugleich eines thraciſchen Volkes, welches nur bis 4 zählt. Darnach ward Erhard Weigel veranlaßt, die Regeln der tetraktiſchen Arithmetik in beſondern Schriften (Aretologistica vel Logistica virtutum genitrix. Norimb. 1687. Tetractys, summum tum Arithmeticae, tum Philosophiae discursivae compendium; artis magnae sciendi semina radix. Jenae. 1672.) zu entwickeln. Zugleich hielt er dieſes Zahlenſyſtem für einerlei mit der Tetraktys der Pythagoräer (Tetractys, Tetracty Pythagoraeorum correspondens. Jenae. 1672.), wogegen Weidler und Rannert dieſer philoſophiſchen Schule die Kenntniß des dekadiſchen Zahlenſyſtems beilegen. M. ſ. über die Tetraktys der Pythagoräer Thl. I. S. 185. Telauges, des Pythagoras Sohn, ſchrieb, nach Suidas, darüber eine beſondere Schrift in 4 Büchern, von denen Montucla (T. I. p. 125.) jedoch meint, daß ſie die Muſik betroffen hätten. V. Thl. I. S. 185. Barrow (Lect. math. II. p. 17.) bezieht die Tetraktys der Pythagoräer auf die vier damals bekannten Theile der Mathematik, und meint, daß die Eidesformel: „assevero per illum qui

Theil, ſ. Theilung.

Theilbare Zahl, ſ. Theiler einer Za

Theiler einer Zahl, heißt jede Zahl
ch jene ohne Reſt dividiren läßt. A heiß
auch wohl ein Maaß von C, wenn C:
Zahl iſt. C heißt dann durch A theilb
lfaches oder Multiplum von A.
Zahl, welcher eine Primzahl iſt, heißt
oder Primfactor derſelben. Bei E
16) heißen die Theiler einer Zahl latera.

. Jede Zahl läße ſich als ein Produkt v
$^n\gamma^p\ldots$, wo α, β, γ, u. ſ. f. Primzahl
. Man dividire zu dem Ende in die g
en Primzahlen 2, 3, 5, u. ſ. f. nach der
eder ſo oft als es angeht. Immer muß
inen Quotienten kommen, welcher ſelbſt
t, weil ſich ſonſt die Diviſion bis ins Une
ließe, welches wegen der Endlichkeit de
unmöglich iſt. Das Product aller Di
zten Quotienten iſt dann der gegebenen

2. Hat man die Diviſion der gegebenen Zahl N durch alle Primzahlen unter, oder bis, $\sqrt{N}$ vergeblich verſucht; ſo kann man ſchließen, daß N ſelbſt eine Primzahl iſt. Denn ſollte die Primzahl $p > \sqrt{N}$ in N aufgehen, ſo daß $N:p = P$ eine ganze Zahl wäre; ſo wäre $P < N:\sqrt{N}$, d. i. $P < \sqrt{N}$, und es würde folglich, da $N = pP$, eine Primzahl $< \sqrt{N}$ geben, welche in N aufginge, gegen die Vorausſetzung.

3. Gute Dienſte bei dieſer Zerlegung in Primfactoren leiſten die bekannten Kennzeichen der Theilbarkeit durch die ganzen Zahlen 2 bis 12, welche hier in Bezug auf das decadiſche Zahlenſyſtem kurz erläutert werden ſollen, aber auch leicht auf jedes andere Syſtem ausgedehnt werden können.

4. Eine Zahl iſt durch 2, 4, 8 theilbar, wenn 2 in der letzten Ziffer, 4 in der durch die beiden, 8 in der durch die drei letzten Ziffern dargeſtellten Zahl aufgeht. Der weſentliche Grund dieſer Kennzeichen iſt, daß 2 immer in 10, 4 in 100, 8 in 1000 aufgeht, und ihre Richtigkeit erhellet augenblicklich, wenn man ſich die gegebene Zahl auf die Formen $a.10 + b$, $a'.100 + b'$, $a''.1000 + b''$, wo b, b′, b″ eine ein-, zwei-, dreiziffrige Zahl bezeichnet, gebracht denkt. Die Null wird immer als durch jede Zahl theilbar betrachtet.

5. Die 5 geht in jeder Zahl auf, deren letzte Ziffer eine 5 oder 0 iſt. Denn ſolche Zahlen laſſen ſich auf die Form $a.10 + 5$ oder $a.10$ bringen. Die 10 geht in jeder Zahl auf, deren letzte Ziffer 0 iſt, da ſolche Zahlen immer $= a.10$ ſind.

6. Eine Zahl iſt durch 3 oder 9 theilbar, wenn 3 oder 9 in der Summe ihrer Ziffern, in der ſogenannten Queerſumme aufgehen. Es iſt nämlich überhaupt

$$\begin{aligned} 10^m &= 10 + 10^2 + 10^3 + \ldots + 10^m \\ &\quad - 1 - 10 - 10^2 - \ldots - 10^{m-1} + 1 \\ &= (10-1).1 + (10-1).10 + (10-1).10^2 + \ldots\ldots + (10-1)10^{m-1} + 1 \\ &= 9.(1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^{m-1}) + 1, \end{aligned}$$

woraus ſogleich erhellet, daß bei der Diviſion jeder Potenz von 10 durch 3 oder 9 immer 1 als Reſt bleibt, und folg-

...+ n aufgehen. Läßt dieſe Summe du
rt einen Reſt; ſo bleibt bei der Diviſion
r 9 offenbar derſelbe Reſt.

. Die Rechenmeiſter haben ſich viele Mü
ennzeichen für die Theilbarkeit durch 7
s derſelben iſt leichter als die unmittelb
7. Das Folgende iſt indeß von einigem
eſſe. Wenn man mit 7 in 10^0, $10'$,.
erhält man die Reſte 1, 3, 2, 6, 4, 5
un die Diviſion der folgenden Potenzen v
führen kann, indem man blos immer ein
ividendus anhängt; ſo iſt klar, daß die 6
4, 5 immer wiederkehren müſſen. U
Dies auch auf folgende Art. Da 10^6
) folgt aus der Binomialformel unmitt
berhaupt $10^{6n} = (7q+1)^n = 7q'+1$
m α nicht > 6; ſo iſt $10^{6n+\alpha} = 10$
$(7p+r) = 7p.10^{6n} + r.10^{6n} = 7$
$+1) = 7p'+r$, ſo daß alſo der Reſt vo
lei iſt mit dem Reſte von $10^{6n+\alpha}$ durch
die obigen Reſte 1, 3, 2, 6, 4, 5 o
ieder kehren. Hierauf gründet ſich nu
ichen. Man ſchreibt dieſe Reſte in

13527542; 1.2 = 2, 4.2 = 1;
81546231; 3.4 = 5, 5.5 = 4;
2.5 = 3, 1.3 = 3;
6.7 = 0, 3.1 = 3;
2+5+3+0+1+4+3+3=21=3.7.

Also 13527542 durch 7 theilbar.

8. Eine Zahl ist durch 11 theilbar, wenn der Unterschied zwischen den Summen der Ziffern in den geraden und ungeraden Stellen durch 11 theilbar ist. Da nach (6.)

$$10^{2m-1} = 9.1 + 9.10 + \ldots + 9.10^{2m-2} + 1$$
$$= 9.1 + 9.10 + 9.10^2 + \ldots + 9.10^{2m-2} + 1$$
$$- 9.10 - \ldots - 9.10^{2m-1}$$
$$+90.1 + 90.10^2 + \ldots + 90.10^{2m-2}$$
$$= 99.1 + 99.10^2 + \ldots + 99.10^{2m-2} - 9.10^{2m-1} + 1;$$
$$10^{2m-1} + 9.10^{2m-1} = 10^{2m} =$$
$$99.1 + 99.10^2 + \ldots + 99.10^{2m-2} + 1$$

ist; so erhellet, daß 10^{2m}, d. i. jede gerade Potenz von 10, durch 11 dividirt, die Einheit als Rest läßt, und demnach immer $10^{2m} = 11q + 1$. Also $10^{2m+1} = 10^{2m}.10 = 11.10q + 10 = 11q' + 10 = 11q' + 11 + 10 - 11 = 11(q' + 1) - 1 = 11p - 1$. Also ist

$$N = a + b.10 + c.10^2 + d.10^3 + \ldots$$
$$= a + b(11b' - 1) + c(11c' + 1) + d(11d' - 1) + e(11e' + 1) + \ldots$$
$$= 11(bb' + cc' + dd' + ee' + \ldots) + (a + c + e + \ldots) - (b + d + f + \ldots),$$

woraus sogleich erhellet, daß N und $(a + c + e + \ldots) - (b + d + f + \ldots)$, durch 11 dividirt, einerlei Rest lassen, und daß folglich 11 in N aufgeht, wenn es in der Differenz $(a + c + e + \ldots) - (b + d + f + \ldots)$ aufgeht. Wäre diese Differenz negativ, und der Rest nicht = o; so wäre der Rest auch negativ, in welchem Falle man natürlich auch den negativen Rest von N zu berücksichtigen hätte.

9. Im Art. Zahl I. ist bewiesen, daß, wenn zwei relative Primzahlen in einer Zahl aufgehen, immer auch deren Product in dieser Zahl aufgehen muß. Hiernach lassen sich mehrere Kennzeichen bilden. Eine Zahl ist z. B. durch 6 oder 12 theilbar, wenn sie durch 2 und 3, oder 3 und 4 theilbar ist.

10. Tafeln, welche die ganzen Zahlen bis zu einer gewissen Gränze in ihre Primfactoren zerlegt enthalten, heißen Factorentafeln. Die immer sehr einfache Ein-

hns deutſcher Algebra. (Zürch, 1659.
legung der Zahlen bis 100000 nebſt der
M. Poetii Anleitung zu der arithm.
nittelſt einer parallelen Algebra. Frkft. u
ält als Anhang die Zerfällung der Zahlen
nerorum) von 1 bis 10000. Eben ſo i
h. Lexicon. Thl. 2. Leipzig, 1742. S.
llichs gründlicher Vorſtellung der Re
men und Gött. 2 Bde. 1759. 60. S.
ügers Gedanken von der Algebra. Hall
en die Primzahlen von 1 bis 100000 vor
, Roßſchreiber und Quartiermeiſter zu S
net. Krüger ſagt S. 123., daß Jä
ständige Anatomia numerorum verferti
niß der Theiler aller natürlichen Zahlen vo
h H. Anjema. Leiden. 1767. 4. La
e zur Math. Thl. 2.) giebt eine Factorenta
Ausſchluß der durch 2, 3, 5 theilbaren
hierher gehörende, ſehr brauchbare Tafel
n zu den log. und trig. Tabellen. Berlin
n der Primzahlen und der Factoren der
nter 100100 durch 2, 3, 5 nicht theilb
Neumann. Deſſau. 1785. Nach ei
[illegible]

t: Tafel aller einfachen Factoren der durch 2, 3, 5 theilbaren Zahlen von 1 bis 336000. Wien. 1776. Käſtner ſagt a. a. O. S. 565., daß Felkel Factafeln bis 10000000 (Wien. 1776.) angekündigt . Sie ſollen auf Koſten des K. K. Aerarium ſchon bis 000 gedruckt geweſen ſeyn, die ganze Auflage aber, ſich keine Abnehmer fanden, zu Patronen-Papier raucht, und nur wenige Exemplare verſchont worden . M. ſ. über die Felkelſchen Tafeln auch Monatl. eſp. Aug. 1800. S. 222., wo ſich auch einige Nachen über den Verfaſſer finden. Allgemeine deutſche Bihek. XXXIII. St. 2. S. 495. Zu gewöhnlichem rauche ſehr dienlich iſt die Tafel in Vega's logarith-trig. Tafeln. II. Lpzg. 1814. S. 1—128., welche Zerlegung der durch 2, 3, 5 nicht theilbaren Zahlen 1 bis 102000 nebſt den Primzahlen von 102000 bis 000 enthält. Die Primzahlen und die Factoren der rn Zahlen von 1 bis über eine Million enthält: Crim arithmeticum, sive tabula, continens numeprimos etc. Confecit Lad. Chernac. Davene. 1811. Fol. Als eine Fortſetzung hiervon iſt zu chten: Tables des diviseurs pour tous les nomde 1020000 à 2028000 par J. B. Burckhardt. is. 1814. Nach Legendre (Supplément à l'essai la théorie des nombres. 1816. p. 61.) hat der nunr verſtorbene Burckhardt die Tafel bis zur vierten lion ausgedehnt, und die dritte Million ſey auch ſchon uckt. Angekündigt finde ich: J. P. Kulik Tafel einfachen Factoren aller Zahlen unter einer Mill., nebſt fstafeln zur Beſtimmung der Factoren jeder größern l. 1825. 8. Ueber die Conſtruction der Factorentaſ. m. auch Abhandlungen von Euler, Kraft und hubert über die Theiler der Zahlen in den Nov. mm. Petrop. T. I. XIII. III. Nov. Act. T. XI. mbert über Theilung und Theilbarkeit der Zahlen. iträge. II. Klügel über die Zerfällung einer zuſammgeſetzten Zahl. Lpzgr. Magazin für Math. 1787. ück 2. Segner von der Aufſuchung der zuſammenetzten Zahlen. Daſ. Teſſanek Methode die Theiler

11. Die Aufgabe, aus den einfachen
ebenen Zahl auch alle zusammengesetzten
en zu finden, ist eine rein combinatorisch
htet nämlich die verschiedenen Primfactor
binatorische Elemente, und bildet die
Wiederholungen, läßt aber alle die Comb
ein Element öfter vorkommt, als unter
n der gegebenen Zahl; nach Hinden
onen mit eingeschränkten Wiederholunge
mfactoren verschieden; so bildet man di
ohne Wiederholungen.

$360 = 2 . 2 . 2 . 3 . 3 . 5.$

$2 = 2$
$3 = 3$
$5 = 5$

$2 . 2 = 4$
$2 . 3 = 6$
$2 . 5 = 10$
$3 . 3 = 9$
$3 . 5 = 15$

$2 . 2 . 2 = 8$
$2 . 2 . 3 = 12$
$2 . 2 . 5 = 20$
$2 . 3 . 3 = 18$
$2 . 3 . 5 = 30$
$3 . 3 . 5 = 45$

$2 . 2 . 2 . 3 = 24$
$2 . 2 . 2 . 5 = 40$
$2 . 2 . 3 . 3 = 36$

$(1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^m)(1+\beta+\beta^2+\ldots+\beta^n)(1+\gamma+\ldots+\gamma^p)\ldots$ dargeſtellt werden. Die Anzahl der Glieder dieſes Products, d. i. die Anzahl aller Theiler von N, iſt offenbar $=(m+1)(n+1)(p+1)\ldots$. Für das obige Beiſpiel $=4.3.2=24$, wo die Einheit mit eingeſchloſſen iſt.

In der aus der Entwickelung von

$$\frac{x}{1-x}+\frac{x^2}{1-x^2}+\frac{x^3}{1-x^3}+\ldots+\frac{x^n}{1-x^n}+\ldots$$

entſpringenden Reihe:

$$x+2x^2+2x^3+3x^4+2x^5+4x^6+2x^7+\ldots$$

welche Lambert in ſeiner Architektonik S. 507. mittheilt, enthält jeder Coefficient ſo viele Einheiten, als der Exponent der entſprechendenden Potenz von x Theiler hat.

13. Will man eine Zahl finden, welche eine beſtimmte Anzahl, z. B. 24, Theiler hat; ſo zerlege man 24 auf irgend eine Art in Factoren. Z. B. $24=3.4.2$, ſo iſt, wenn α, β, γ irgend drei ungleiche Primzahlen ſind, $\alpha^2\beta^3\gamma$ die Form einer Zahl mit 24 Theilern.

14. Iſt $N=\alpha^m\beta^n\gamma^p\ldots$ wo $\alpha,\beta,\gamma,\ldots$ Primzahlen ſind; ſo iſt

$$N\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{\beta}\right)\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\ldots.$$

die Anzahl der Primzahlen zu N, welche $<N$ ſind.

Für $N=\alpha N'$ ſind die durch α theilbaren Zahlen in der Reihe $1, 2, 3, 4, \ldots N$ keine andern als: $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, 4\alpha, \ldots N'\alpha$, deren Anzahl alſo $=N'$ iſt. Folglich iſt die Anzahl der durch α nicht theilbaren Zahlen in obiger Reihe

$$=N-N'=N-\frac{1}{\alpha}N=N\left(1-\frac{1}{\alpha}\right).$$

Wenn $N=\alpha\beta N'$ iſt; ſo ſind alle Zahlen der Reihe $1, 2, 3, 4, \ldots N$ entweder weder durch α noch durch β theilbar, oder durch α, ohne es durch β, oder durch β, ohne es durch α zu ſeyn, oder durch α und β, d. i., da α, β Primzahlen ſind, durch $\alpha\beta$ (Zahl. I.). Ganz wie vorher erhellet, daß die Anzahl der durch $\alpha\beta$ theilbaren Zahlen $=N'$ iſt; die Anzahl der durch α theilbaren $=\beta N'$, alſo die Anzahl der nur durch α theilbaren $\beta N'-N'=(\beta-1)N'$. Eben ſo iſt die Anzahl der nur durch β theilbaren Zahlen in obiger Reihe $=(\alpha-1)N'$. Die An-

ür $N = \alpha\beta\gamma N'$ kommen in der Reihe 1, 2
n vor, welche durch α, β, γ, d. i. durch
theilbar ſind, oder ſolche, welche bloß
endlich ſolche, welche nur durch eine di
ar ſind. Die Anzahl der durch $\alpha\beta\gamma$ tl
orher $= N'$; die Anzahl der nur durch
durch γ, theilbaren $= (\gamma - 1)N'$; die
urch $\alpha\gamma$, aber nicht durch β theilbaren $=$
nzahl der nur durch $\beta\gamma$, aber nicht durch α
$\alpha - 1)N'$. Die Anzahl der durch α
n überhaupt iſt, wie vorher, $= \beta\gamma N'$.
nzahl der nur durch α theilbaren Zahlen

$$= \beta\gamma N' - (\beta - 1)N' - (\gamma - 1)N' - N'$$
$$= (\beta - 1)(\gamma - 1)N'.$$

ſo iſt die Anzahl der nur durch β oder γ
n $= (\alpha - 1)(\gamma - 1)N'$ und $= (\alpha - 1)$
ich die Anzahl der weder durch α, noch di
lbaren Zahlen in obiger Reihe

$$= N - (\alpha - 1)(\beta - 1)N' - (\alpha - 1)N' - N'$$
$$- (\alpha - 1)(\gamma - 1)N' - (\beta - 1)N'$$
$$- (\beta - 1)(\gamma - 1)N' - (\gamma - 1)N'$$

iſt, wenn man N' durch N ausdrückt,

unter N, d. i., da $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ Primzahlen sind, die Anzahl der Primzahlen zu N unter N

$$= N\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{\beta}\right)\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\ldots.$$

Für $N = 24 = 2^3.3$ ist diese Anzahl $= 24.(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3}) = 8$, und die kleinern Primzahlen zu 24 sind auch wirklich: 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23.

Ist $N = \alpha\beta\gamma\ldots.$; so ergiebt sich aus obiger Formel die Anzahl der Primzahlen zu N leicht

$$= (\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)\ldots.$$

15. Die Summe aller Theiler einer Zahl $N = \alpha^m\beta^n\gamma^p\ldots.$ ist (12.)

$$= (1+\alpha+..\alpha^m)(1+\beta+..+\beta^n)(1+\gamma+..+\gamma^p)\ldots$$
$$= \frac{\alpha^{m+1}-1}{\alpha-1}\cdot\frac{\beta^{n+1}-1}{\beta-1}\cdot\frac{\gamma^{p+1}-1}{\gamma-1}\cdot\ldots,$$

und für $m = n = p = \ldots = 1$,

$$= \frac{\alpha^2-1}{\alpha-1}\cdot\frac{\beta^2-1}{\beta-1}\cdot\frac{\gamma^2-1}{\gamma-1}\ldots.$$
$$= (\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots.$$

Für $12 = 2^2.3$ ist die Summe der Theiler $= 1+2+3+4+6+12 = 28 = \frac{2^3-1}{2-1}\cdot\frac{3^2-1}{3-1} = \frac{7}{1}\cdot\frac{8}{2} = 7.4$.

In Eulers Abhandlung de numeris amicabilibus (Opuscula varii argumenti. T. II. Berol. 1750. p. 27.) findet man eine Tafel der Summen der Theiler der Primzahlen von 1 bis 1000, und ihrer Potenzen, wo die Summen zugleich in ihre Primfactoren zerlegt sind.

16. Die Thl. I. S. 247. ohne Beweis mitgetheilten Regeln von Descartes und Kraft zur Auffindung befreundeter Zahlen lassen sich hier beweisen. Ist nämlich $A = 2^m$ eine Potenz der 2 von solcher Beschaffenheit, daß $3A-1 = P$, $6A-1 = Q$, $18AA-1 = R$ Primzahlen sind; so sind 2AR und 2APQ befreundete Zahlen. Denn $2AR = 2^{m+1}.R$, $2APQ = 2^{m+1}.PQ$. Folglich, da P, Q Primzahlen sind, die Summen der Theiler dieser Producte nach (15.) $= (2^{m+2}-1)(R+1)$, und $= (2^{m+2}-1)(P+1)(Q+1)$. Also, da hierunter die Zahlen selbst mitbegriffen sind, die Summen der aliquoten Theile $= (2^{m+2}-1)(R+1)-2^{m+1}.R$, und

... + n aufgehen. Läßt dieſe Summe dur
t einen Reſt; ſo bleibt bei der Diviſion v
9 offenbar derſelbe Reſt.

Die Rechenmeiſter haben ſich viele Mü
nnzeichen für die Theilbarkeit durch 7 a
derſelben iſt leichter als die unmittelba
. Das Folgende iſt indeß von einigem t
ſſe. Wenn man mit 7 in 10^0, $10'$,..
rhält man die Reſte 1, 3, 2, 6, 4, 5
n die Diviſion der folgenden Potenzen vo
ühren kann, indem man blos immer eine
videndus anhängt; ſo iſt klar, daß die R
4, 5 immer wiederkehren müſſen. Uet
Dies auch auf folgende Art. Da $10^6 =$
folgt aus der Binomialformel unmittel
erhaupt $10^{6n} = (7q+1)^n = 7q'+1$
α nicht > 6; ſo iſt $10^{6n+\alpha} = 10^6$
$(7p+r) = 7p.10^{6n} + r.10^{6n} = 7p$
$\cdot 1) = 7p'+r$, ſo daß alſo der Reſt von
ei iſt mit dem Reſte von $10^{6n+\alpha}$ durch 7.
ie obigen Reſte 1, 3, 2, 6, 4, 5 off
der kehren. Hierauf gründet ſich nun
hen. Man ſchreibt dieſe Reſte in ...

$$13527542; 1.2 = 2,\ 4.2 = 1;$$
$$81546231; 3.4 = 5,\ 5.5 = 4;$$
$$2.5 = 3,\ 1.3 = 3;$$
$$6.7 = 0,\ 3.1 = 3;$$
$$2+5+3+0+1+4+3+3 = 21 = 3.7.$$

Also 13527542 durch 7 theilbar.

8. Eine Zahl ist durch 11 theilbar, wenn der Unterschied zwischen den Summen der Ziffern in den geraden und ungeraden Stellen durch 11 theilbar ist. Da nach (6.)

$$10^{2m-1} = 9.1 + 9.10 + \ldots + 9.10^{2m-2} + 1$$
$$= 9.1 + 9.10 + 9.10^2 + \ldots + 9.10^{2m-2} + 1$$
$$- 9.10 - \ldots - 9.10^{2m-1}$$
$$+90.1 + 90.10^2 + \ldots + 90.10^{2m-2}$$
$$= 99.1 + 99.10^2 + \ldots + 99.10^{2m-2} - 9.10^{2m-1} + 1;$$
$$10^{2m-1} + 9.10^{2m-1} = 10^{2m} =$$
$$99.1 + 99.10^2 + \ldots + 99.10^{2m-2} + 1$$

ist; so erhellet, daß 10^{2m}, d. i. jede gerade Potenz von 10, durch 11 dividirt, die Einheit als Rest läßt, und demnach immer $10^{2m} = 11q + 1$. Also $10^{2m+1} = 10^{2m}.10 = 11.10q + 10 = 11q' + 10 = 11q' + 11 + 10 - 11 = 11(q' + 1) - 1 = 11p - 1$. Also ist

$$N = a + b.10 + c.10^2 + d.10^3 + \ldots$$
$$= a + b(11b' - 1) + c(11c' + 1) + d(11d' - 1) + e(11e' + 1) + \ldots$$
$$= 11(bb' + cc' + dd' + ee' + \ldots) + (a + c + e + \ldots) - (b + d + f + \ldots),$$

woraus sogleich erhellet, daß N und $(a + c + e + \ldots) - (b + d + f + \ldots)$, durch 11 dividirt, einerlei Rest lassen, und daß folglich 11 in N aufgeht, wenn es in der Differenz $(a + c + e + \ldots) - (b + d + f + \ldots)$ aufgeht. Wäre diese Differenz negativ, und der Rest nicht $= 0$; so wäre der Rest auch negativ, in welchem Falle man natürlich auch den negativen Rest von N zu berücksichtigen hätte.

9. Im Art. Zahl I. ist bewiesen, daß, wenn zwei relative Primzahlen in einer Zahl aufgehen, immer auch deren Product in dieser Zahl aufgehen muß. Hiernach lassen sich mehrere Kennzeichen bilden. Eine Zahl ist z. B. durch 6 oder 12 theilbar, wenn sie durch 2 und 3, oder 3 und 4 theilbar ist.

10. Tafeln, welche die ganzen Zahlen bis zu einer gewissen Gränze in ihre Primfactoren zerlegt enthalten, heißen Factorentafeln. Die immer sehr einfache Ein-

ns deutſcher Algebra. (Zürch, 1659.)
gung der Zahlen bis 100000 nebſt den
N. Poetii Anleitung zu der arithm.
ittelſt einer parallelen Algebra. Frkft. u.
ilt als Anhang die Zerfällung der Zahlen
ierorum) von 1 bis 10000. Eben ſo in
. Lexicon. Thl. 2. Leipzig, 1742. S.
lichs gründlicher Vorſtellung der Rec
nen und Gött. 2 Bde. 1759. 60. S. 8
gers Gedanken von der Algebra. Halle
n die Primzahlen von 1 bis 100000 von
Roßſchreiber und Quartiermeiſter zu N
et. Krüger ſagt S. 123., daß Jäg
ändige Anatomia numerorum verfertig
iß der Theiler aller natürlichen Zahlen von
H. Anjema. Leiden. 1767. 4. Lat
zur Math. Thl. 2.) giebt eine Factorentaf
Ausſchluß der durch 2, 3, 5 theilbaren Z
hierher gehörende, ſehr brauchbare Tafeln
zu den log. und trig. Tabellen. Berlin.
der Primzahlen und der Factoren der Z
nter 100100 durch 2, 3, 5 nicht theilbe
Neumann. Deſſau. 1785. Nach ein
Verfahren, welches Käſtner (Forſet

rt: Tafel aller einfachen Factoren der durch 2, 3, 5
t theilbaren Zahlen von 1 bis 336000. Wien. 1776.
. Käſtner ſagt a. a. O. S. 565., daß Felkel Fac-
ntafeln bis 10000000 (Wien. 1776.) angekündigt
e. Sie ſollen auf Koſten des K. K. Aerarium ſchon bis
000 gedruckt geweſen ſeyn, die ganze Auflage aber,
l ſich keine Abnehmer fanden, zu Patronen-Papier
raucht, und nur wenige Exemplare verſchont worden
. M. ſ. über die Felkelſchen Tafeln auch Monatl.
reſp. Aug. 1800. S. 222., wo ſich auch einige Nach-
ten über den Verfaſſer finden. Allgemeine deutſche Bi-
thek. XXXIII. St. 2. S. 495. Zu gewöhnlichem
rauche ſehr dienlich iſt die Tafel in Vega's logarith-
h-trig. Tafeln. II. Lpzg. 1814. S. 1—128., welche
Zerlegung der durch 2, 3, 5 nicht theilbaren Zahlen
1 bis 102000 nebſt den Primzahlen von 102000 bis
000 enthält. Die Primzahlen und die Factoren der
ern Zahlen von 1 bis über eine Million enthält: Cri-
m arithmeticum, sive tabula, continens nume-
primos etc. Confecit Lad. Chernac. Daven-
e. 1811. Fol. Als eine Fortſetzung hiervon iſt zu
achten: Tables des diviseurs pour tous les nom-
s de 1020000 à 2028000 par J. B. Burckhardt.
is. 1814. Nach Legendre (Supplément à l'essai
la théorie des nombres. 1816. p. 61.) hat der nun-
r verſtorbene Burckhardt die Tafel bis zur vierten
lion ausgedehnt, und die dritte Million ſey auch ſchon
ruckt. Angekündigt finde ich: J. P. Kulik Tafel
einfachen Factoren aller Zahlen unter einer Mill., nebſt
lfstafeln zur Beſtimmung der Factoren jeder größern
l. 1825. 8. Ueber die Conſtruction der Factorenta-
ı ſ. m. auch Abhandlungen von Euler, Kraft und
hubert über die Theiler der Zahlen in den Nov.
mm. Petrop. T. I. XIII. III. Nov. Act. T. XI.
mbert über Theilung und Theilbarkeit der Zahlen.
träge. II. Klügel über die Zerfällung einer zuſam-
ngeſetzten Zahl. Lpzgr. Magazin für Math. 1787.
tück 2. Segner von der Aufſuchung der zuſammen-
etzten Zahlen. Daſ. Teſſaneck Methode die Theiler

1. Die Aufgabe, aus den einfachen Zu
nen Zahl auch alle zuſammengeſetzten F
zu finden, iſt eine rein combinatoriſche.
et nämlich die verſchiedenen Primfactoren
natoriſche Elemente, und bildet die Co
Wiederholungen, läßt aber alle die Combin
n Element öfter vorkommt, als unter de
der gegebenen Zahl; nach Hindenbu
en mit eingeſchränkten Wiederholungen.
factoren verſchieden; ſo bildet man die
ne Wiederholungen.

160 = 2 . 2 . 2 . 3 . 3 . 5.

2 = 2
3 = 3
5 = 5
2 . 2 = 4
2 . 3 = 6
2 . 5 = 10
3 . 3 = 9
3 . 5 = 15
2 . 2 . 2 = 8
2 . 2 . 3 = 12
2 . 2 . 5 = 20
2 . 3 . 3 = 18
2 . 3 . 5 = 30
3 . 3 . 5 = 45
2 . 2 . 2 . 3 = 24
2 . 2 . 2 . 5 = 40
2 . 2 . 3 . 3 = 36

$(1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^m)(1+\beta+\beta^2+\ldots+\beta^n)(1+\gamma+\ldots+\gamma^p)\ldots$
dargeſtellt werden. Die Anzahl der Glieder dieſes Products, d. i. die Anzahl aller Theiler von N, iſt offenbar $=(m+1)(n+1)(p+1)\ldots$. Für das obige Beiſpiel $=4.3.2=24$, wo die Einheit mit eingeſchloſſen iſt.

In der aus der Entwickelung von

$$\frac{x}{1-x}+\frac{x^2}{1-x^2}+\frac{x^3}{1-x^3}+\ldots+\frac{x^n}{1-x^n}+\ldots$$

entſpringenden Reihe:

$$x+2x^2+2x^3+3x^4+2x^5+4x^6+2x^7+\ldots$$

welche **Lambert** in ſeiner Architektonik S. 507. mittheilt, enthält jeder Coefficient ſo viele Einheiten, als der Exponent der entſprechendenden Potenz von x Theiler hat.

13. Will man eine Zahl finden, welche eine beſtimmte Anzahl, z. B. 24, Theiler hat; ſo zerlege man 24 auf irgend eine Art in Factoren. Z. B. $24=3.4.2$, ſo iſt, wenn α, β, γ irgend drei ungleiche Primzahlen ſind, $\alpha^2\beta^3\gamma$ die Form einer Zahl mit 24 Theilern.

14. Iſt $N=\alpha^m\beta^n\gamma^p\ldots$ wo $\alpha,\beta,\gamma,\ldots$ Primzahlen ſind; ſo iſt

$$N\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{\beta}\right)\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\ldots.$$

die Anzahl der Primzahlen zu N, welche $<N$ ſind.

Für $N=\alpha N'$ ſind die durch α theilbaren Zahlen in der Reihe 1, 2, 3, 4, ... N keine andern als: α, 2α, 3α, 4α,.... $N'\alpha$, deren Anzahl alſo $=N'$ iſt. Folglich iſt die Anzahl der durch α nicht theilbaren Zahlen in obiger Reihe

$$=N-N'=N-\frac{1}{\alpha}N=N\left(1-\frac{1}{\alpha}\right).$$

Wenn $N=\alpha\beta N'$ iſt; ſo ſind alle Zahlen der Reihe 1, 2, 3, 4,..... N entweder weder durch α noch durch β theilbar, oder durch α, ohne es durch β, oder durch β, ohne es durch α zu ſeyn, oder durch α und β, d. i., da α, β Primzahlen ſind, durch $\alpha\beta$ (Zahl. I.). Ganz wie vorher erhellet, daß die Anzahl der durch $\alpha\beta$ theilbaren Zahlen $=N'$ iſt; die Anzahl der durch α theilbaren $=\beta N'$, alſo die Anzahl der nur durch α theilbaren $\beta N'-N'=(\beta-1)N'$. Eben ſo iſt die Anzahl der nur durch β theilbaren Zahlen in obiger Reihe $=(\alpha-1)N'$. Die An-

ür $N = \alpha\beta\gamma N'$ kommen in der Reihe 1, 2
n vor, welche durch α, β, γ, d. i. durch
theilbar ſind, oder ſolche, welche bloß
endlich ſolche, welche nur durch eine d
ar ſind. Die Anzahl der durch $\alpha\beta\gamma$ t
orher $= N'$; die Anzahl der nur durch
durch γ, theilbaren $= (\gamma - 1)N'$; die
urch $\alpha\gamma$, aber nicht durch β theilbaren $=$
zahl der nur durch $\beta\gamma$, aber nicht durch
$\alpha - 1)N'$. Die Anzahl der durch
n überhaupt iſt, wie vorher, $= \beta\gamma N'$
zahl der nur durch α theilbaren Zahlen

$$= \beta\gamma N' - (\beta - 1)N' - (\gamma - 1)N' - N'$$
$$= (\beta - 1)(\gamma - 1)N'.$$

ſo iſt die Anzahl der nur durch β oder
$n = (\alpha - 1)(\gamma - 1)N'$ und $= (\alpha - 1)$
ch die Anzahl der weder durch α, noch d
lbaren Zahlen in obiger Reihe

$$= N - (\alpha - 1)(\beta - 1)N' - (\alpha - 1)N' - N$$
$$- (\alpha - 1)(\gamma - 1)N' - (\beta - 1)N'$$
$$- (\beta - 1)(\gamma - 1)N' - (\gamma - 1)N'$$

is, wenn man N' durch N ausdrückt,
erhalten wird:

ter N, d. i., da $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ Primzahlen sind, die Anzahl der Primzahlen zu N unter N

$$= N\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{\beta}\right)\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\ldots$$

ür $N = 24 = 2^3.3$ ist diese Anzahl $= 24.(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})$ $= 8$, und die kleinern Primzahlen zu 24 sind auch wirklich: 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23.

Ist $N = \alpha\beta\gamma\ldots$; so ergiebt sich aus obiger Formel die Anzahl der Primzahlen zu N leicht

$$= (\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)\ldots.$$

15. Die Summe aller Theiler einer Zahl $N = \alpha^n\beta^p\gamma^p\ldots$. ist (12.)

$$= (1+\alpha+..\alpha^m)(1+\beta+..+\beta^m)(1+\gamma+..+\gamma^p)\ldots$$

$$= \frac{\alpha^{m+1}-1}{\alpha-1}\cdot\frac{\beta^{n+1}-1}{\beta-1}\cdot\frac{\gamma^{p+1}-1}{\gamma-1}\cdot\ldots,$$

ad für $m = n = p = \ldots = 1$,

$$= \frac{\alpha^2-1}{\alpha-1}\cdot\frac{\beta^2-1}{\beta-1}\cdot\frac{\gamma^2-1}{\gamma-1}\ldots.$$

$$= (\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots.$$

ür $12 = 2^2.3$ ist die Summe der Theiler $= 1+2+$ $+4+6+12 = 28 = \frac{2^3-1}{2-1}\cdot\frac{3^2-1}{3-1} = \frac{7}{1}\cdot\frac{8}{2} = 7.4$.

In Eulers Abhandlung de numeris amicabilibus (Opuscula varii argumenti. T. II. Berol. 1750. p. 27.) findet man eine Tafel der Summen der Theiler der Primzahlen von 1 bis 1000, und ihrer Potenzen, wo die Summen zugleich in ihre Primfactoren zerlegt sind.

16. Die Thl. I. S. 247. ohne Beweis mitgetheilten Regeln von Descartes und Kraft zur Auffindung befreundeter Zahlen lassen sich hier beweisen. Ist nämlich $= 2^m$ eine Potenz der 2 von solcher Beschaffenheit, daß $3A-1 = P$, $6A-1 = Q$, $18AA-1 = R$ Primzahlen sind; so sind 2AR und 2APQ befreundete Zahlen. Denn $2AR = 2^{m+1}.R$, $2APQ = 2^{m+1}.PQ$. Folglich, da P, Q Primzahlen sind, die Summen der Theiler dieser Producte nach (15.) $= (2^{m+2}-1)(R+1)$, und $= (2^{m+2}-1)(P+1)(Q+1)$. Also, da hierunter die Zahlen selbst mitbegriffen sind, die Summen der aliquoten Theile $= (2^{m+2}-1)(R+1)-2^{m+1}.R$, und

$^{m+2} - 1)\ (P+1)\ (Q+1) - 2^{m+1}$
$= 18\,AA - 1 = 18 \cdot 2^{2m} - 1.$ A

umme =

$2^{m+1} \cdot [18 \cdot (2 \cdot 2^{2m} - 2^m) - 9 \cdot 2^m + 1]$
$= 2^{m+1} \cdot (18 \cdot 2^{2m} - 9 \cdot 2^m + 1)$
$= 2^{m+1} \cdot (3 \cdot 2^m \cdot 6 \cdot 2^m - 6 \cdot 2^m - 3 \cdot 2^m +$
$= 2^{m+1} \cdot (3 \cdot 2^m - 1)\ (6 \cdot 2^m - 1)$
$= 2^{m+1} \cdot (3A - 1)\ (6A - 1) = 2^{m+1} \cdot PQ,$

eyn muß. Die zweite Summe iſt =

$2^{3m+2} - 18 \cdot 2^{2m} - 18 \cdot 2^{3m+1} + 9 \cdot 2^{2m+1}$
$2^{3m+2} - 18 \cdot 2^{3m+1} - 2^{m+1}$
$2^{3m+1} - 2^{m+1} = 2^{m+1} \cdot (18 \cdot 2^{2m} - 1)$

$\cdot R$, wie es ſeyn muß.

auch die a. a O. mitgetheilte Regel von
iſen, ſey $A = \alpha^m \beta^n \gamma^p \ldots$, wo α, β,
hlen ſind; ſo iſt die Summe der Theiler von

$$\frac{(\alpha^{m+1}-1)(\beta^{n+1}-1)(\gamma^{p+1}-1)\ldots}{(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)\ldots} = a.$$

n ſo ſind, da P, Q, R (a. a. O.) Primzahl
mmen der Theiler von PQA und RA =

größte in dem Bruche $\frac{A}{B}$ enthaltene Ganze durch $G\left(\frac{A}{B}\right)$; so ist die Anzahl der durch B theilbaren Glieder obiger Reihe $= G\left(\frac{N}{B}\right)$, weil diese Glieder offenbar

$$B, 2B, 3B, \ldots G\left(\frac{N}{B}\right).B$$

sind, indem $\left\{G\left(\frac{N}{B}\right)+1\right\}.B > N$ seyn muß, nach der Bedeutung des Zeichens $G\left(\frac{N}{B}\right)$. Die Anzahl der durch p theilbaren Glieder ist also $= G\left(\frac{N}{p}\right)$, und es kommt folglich, wenn $p^2 > N$, $G\left(\frac{N}{p^2}\right) = o$ ist, p in obiger Reihe so oft als Factor vor, als $G\left(\frac{N}{p}\right)$ anzeigt. Ist aber erst $p^3 > N$, $G\left(\frac{N}{p^3}\right) = o$; so ist die Anzahl der durch p^2 theilbaren Glieder $= G\left(\frac{N}{p^2}\right)$, und folglich kommt in diesem Falle p so oft vor, als

$$G\left(\frac{N}{p}\right) + G\left(\frac{N}{p^2}\right)$$

anzeigt. Wäre erst $p^4 > N$, $G\left(\frac{N}{p^4}\right) = o$; so würde auf ähnliche Art p in obiger Reihe so oft als Theiler vorkommen, als $G\left(\frac{N}{p}\right) + G\left(\frac{N}{p^2}\right) + G\left(\frac{N}{p^3}\right)$ anzeigt. Ueberhaupt kommt p in der Reihe 1, 2, 3, ... N so oft als Theiler vor, als

$$G\left(\frac{N}{p}\right) + G\left(\frac{N}{p^2}\right) + G\left(\frac{N}{p^3}\right) + G\left(\frac{N}{p^4}\right) + \ldots$$

anzeigt, wenn man diese Reihe so weit fortsetzt, bis sie von selbst abbricht. Für $N = 10000$, $p = 7$ ist:

$$G\left(\frac{10000}{7}\right) = 1428,\ G\left(\frac{10000}{49}\right) = 204,\ G\left(\frac{10000}{343}\right) = 29,$$

$$G\left(\frac{10000}{2401}\right) = 4,\ G\left(\frac{10000}{16807}\right) = 0.$$

Also kommt 7 in den ersten 10000 Zahlen 1665 Mal als Theiler vor. Für $N = 38$, $p = 6$ ist

$$G\left(\frac{38}{6}\right) = 6,\ G\left(\frac{38}{36}\right) = 1,\ G\left(\frac{38}{216}\right) = 0.$$

Theiler, gemeinſchaftlicher, meh
n, heißt jede Zahl, welche in allen gegel
ht. Gegebene Zahlen haben oft mehrere
Theiler. Der größte unter allen heißt i
einſchaftlicher Theiler, ihr größte
tliches Maaß. Iſt der größte gem
er die Einheit; ſo ſind die Zahlen relative

. Mit Hülfe der Factorentafeln findet m
emeinſchaftlichen Theiler leicht, wenn ma
en, welche ſie alle mit einander gemein h
multiplicirt.

. Eine andere Methode lehrt **Euclide**
ahlen, und X. 3. 4. für Größen überha
iren wiederholtes Abziehen iſt. Die M
. Man dividirt nämlich, wenn bloß
n ſind, mit der kleinern in die größere,
den Reſte immer in den vorhergehenden
iviſion aufgeht. Der letzte Diviſor, wo di
s geſuchte größte gemeinſchaftliche Maaß.
01 z. B. iſt 7 der größte gemeinſchaftl

3. Bezeichnen alle Buchſtaben ganze Zahlen; ſo iſt für $\frac{A}{a} = p$, $\frac{B}{a} = q$, auch $\frac{A}{a} \pm \frac{B}{a} = \frac{A \pm B}{a} = p \pm q$ eine ganze Zahl. Auch iſt $A = ap$. Alſo $AB = aBp$, $\frac{AB}{p} = aB$. D. h. eine Zahl, welche in zwei Zahlen aufgeht, geht auch in ihrer Summe und Differenz auf, und eine Zahl, welche in dem einen Factor eines Products aufgeht, geht in dem Product auf. Bezeichnet nun d den Diviſor, D den Dividendus, q den Quotienten, r den Reſt; ſo ſchließt man aus den beiden, ſich leicht aus der Natur der Diviſion ergebenden, Gleichungen: $D = dq + r$, $r = D - dq$ mit Hülfe der beiden obigen Sätze leicht, daß eine im Diviſor und Reſt aufgehende Zahl immer auch im Dividendus, und eine im Diviſor und Dividendus aufgehende Zahl immer auch im Reſt aufgehen muß.

4. Sind die beiden gegebenen Zahlen A, B, und $B < A$, die Quotienten und Reſte aber a, b, c, d,... und C, D, E, F,...., wo, bei Größen überhaupt, Dividiren nur wiederholtes Abziehen iſt; ſo wird das beſchriebene Verfahren durch folgende Gleichungen dargeſtellt:

$$\begin{aligned} A &= aB + C, \\ B &= bC + D, \\ C &= cD + E, \\ D &= dE + F, \\ &\text{u. ſ. f.} \end{aligned}$$

5. Bei ganzen Zahlen muß man immer auf einen Reſt $= o$ kommen. Denn wäre dies nicht der Fall; ſo würden A, B, C, D, E, ... eine immer um einige ganze Einheiten in's Unendliche abnehmende Reihe bilden, welches wegen der Endlichkeit von A, B ungereimt iſt. Sey nun für dieſen Fall S der Diviſor, bei welchem die Diviſion aufgeht; ſo reichen obige Gleichungen bis

$$\begin{aligned} P &= pQ + R, \\ Q &= qR + S, \\ R &= rS. \end{aligned}$$

Da alſo hiernach S in R, aber natürlich auch in S aufgeht; ſo geht S auch in Q auf (3.). Alſo in R und Q. Folglich auch in P (3.). Durch Fortſetzung dieſer Schlüſſe bis zum Anfange überzeugt man ſich leicht, daß S ein gemeinſchaftlicher Theiler von A, B ſeyn muß. Wäre nun S' ein Theiler von A, B, welcher $> S$; ſo müßte S' auch in C auf-

in zwei Zahlen aufgehende Zahl immer
iten gemeinſchaftlichen Maaße aufgehen n

6. Alles dieſes läßt ſich auch leicht auf jet
je Größen A, B anwenden. Nur iſt
man in dieſem Fall nicht immer auf eine
men wird. Sind die beiden Größen con
ſſen ſie ſich offenbar in Bezug auf ihr geme
ıß als Einheit wie ganze Zahlen betrach
alſo in dieſem Fall immer auf einen Re
muß (5.). Sind ſie aber incommenſura
nie geſchehen, weil ſonſt, nach einem
Beweiſe wie vorher, der letzte Diviſor,
ichſt oft abgezogene Größe ihr gemeinſchaf
würde. Umgekehrt wird es alſo als ei
Incommenſurabilität zu betrachten ſeyn, ı
endung des obigen Verfahrens man nie a
› kommt.

'. Euclides (X. 117.) beweiſet z. B., d
Diagonale eines Quadrats incommenſurabe
bemerkt: Celebratissimum est hoc thec
es philosophos, adeo ut qui hoc nes
› non hominem esse, sed pecude

$a : b = a + 2b : a + b,\ a > b,\ a - b > o,\ a - b = r;$
$a - b : b = r : b = b : a + b,\ b > r,\ b - r > o,\ b - r = \varrho;$
$b - r : r = \varrho : r = a : b = a + 2b : a + b,\ \varrho > r,\ \varrho - r > o,\ \varrho - r = r';$
$\varrho - r : r = r' : r = b : a + b,\ r > r',\ r - r' > o,\ r - r' = \varrho';$
$r - r' : r' = \varrho' : r' = a : b = a + 2b : a + b,\ \varrho' > r',\ \varrho' - r' > o,\ \varrho' - r' = r'';$
$\varrho' - r' : r' = r'' : r' = b : a + b,\ r' > r'',\ r' - r'' > o,\ r' - r'' = \varrho'';$
$r' - r'' : r'' = \varrho'' : r'' = a : b = a + 2b : a + b,\ \varrho'' > r'',\ \varrho'' - r'' > o,\ \varrho'' - r'' = r''';$
$\varrho'' - r'' : r'' = r''' : r'' = b : a + b,\ r'' > r''',\ r'' - r''' > o,\ r'' - r''' = \varrho''';$
u. ſ. f.

Daß ſich dieſes Verfahren in's Unendliche fortſetzen läßt, und man nie auf ein $r = o$ kommen wird, liegt klar vor Augen. Man hat nun

$a - b = r,\quad \varrho - r = r',\quad a = b + r,$
$b - r = \varrho,\quad \varrho' - r' = r'',\quad b = r + \varrho,$
$r - r' = \varrho',\quad \varrho'' - r'' = r''',\quad r = r' + \varrho',$
$r' - r'' = \varrho'',\quad \varrho''' - r''' = r'''',\quad r' = r'' + \varrho'',$
$r'' - r''' = \varrho''',\quad \varrho'''' - r'''' = r''''',\quad r'' = r''' + \varrho''',$
u. ſ. f. u. ſ. f. u. ſ. f.

$\varrho = r + r',\quad a = 1.b + r.$
$\varrho' = r' + r'',\quad b = 2.r + r'.$
$\varrho'' = r'' + r''',\quad r = 2.r' + r''.$
$\varrho''' = r''' + r'''',\quad r' = 2.r'' + r'''.$
$\varrho'''' = r'''' + r''''',\quad r'' = 2.r''' + r''''.$
u. ſ. f. u. ſ. f.

Die letztern Gleichungen, in welchen a, b, r, r', r'', r''', u. ſ. f. eine in's Unendliche abnehmende Reihe bilden, haben mit den Gleichungen in (4.) ganz einerlei Form. Da man nun nie auf ein $r = o$ kommt; ſo ſind a, b incommenſurabel (6.)

7. Um den Exponenten des Verhältniſſes der Diagonale und Seite zu finden, bemerke man, daß

$$\frac{a}{b} = 1 + \frac{r}{b}$$

$$\frac{b}{r} = 2 + \frac{r'}{r},\ \frac{r}{b} = \frac{1}{2 + \frac{r'}{r}};$$

$$\frac{r}{r'} = 2 + \frac{r''}{r'},\ \frac{r'}{r} = \frac{1}{2 + \frac{r''}{r'}};$$

$$\frac{r'}{r''} = 2 + \frac{r'''}{r''},\ \frac{r''}{r'} = \frac{1}{2 + \frac{r'''}{r''}};$$

u. ſ. f. u. ſ. f.

Theiler,

ſucceſſive Subſtitution

$$= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}}$$

$2\,b^2$ iſt; ſo iſt $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$, ſo daß alſo auch obigen Kettenbruch ausgedrückt wird.

größten gemeinſchaftlichen Theiler mehrerer B, C, D, E findet man, wenn man den größhaftlichen Theiler a von A, B, dann von a, ann von b, D, = c, und von c, E, = d nun d der größte gemeinſchaftliche Theiler von D, E iſt. Da nämlich d in c, E, aber c in ht; ſo muß offenbar auch d in b, D, E aufn geht aber b in a, C auf. Alſo auch d in a, und folglich auch in A, B, C, D, E, da a ufgeht. Folglich iſt d ein gemeinſchaftlicher äbe es einen größern d', ſo daß $d' > d$; ſo , B auf. Alſo auch in ihrem größten gemeinheiler a (5.). Folglich in a, C. Alſo wie-

daß überhaupt jedes gemeinſchaftliche Vielfache V′
r Zahlen von ihrem kleinſten gemeinſchaftlichen
hen V gemeſſen wird. Ginge nämlich V nicht in
; ſo ſey $V' = pV + v$, wo $v < V$. Alſo
$pV = v$. Da nun die gegebenen Zahlen alle in
V′ aufgehen; ſo gehen ſie alle in pV und auch in
pV, d. i. in v auf (3.). Folglich wäre auch v
einſchaftliches Vielfache der gegebenen Zahlen; alſo
das kleinſte, da $v < V$, gegen die Vorausſetzung.
h muß $v = o$ ſeyn, oder V in V′ aufgehen. Wäre
ab nicht das kleinſte gemeinſchaftliche Vielfache von
ſo ſey es V. Dann iſt $\frac{mab}{V} = g$, eine ganze
wie ſo eben bewieſen, und g iſt > 1, da $V < mab$.
un $V : A = \alpha$, $V : B = \beta$, wo α, β ganze Zahlen
a V ein gemeinſchaftliches Vielfache von A, B iſt;
$V = A\alpha = B\beta$. Da $Vg = mab = ma \cdot b$
b. $a = Ab = Ba = A\alpha g = B\beta g$ iſt; ſo iſt
αg, $a = \beta g$, und a, b haben demnach noch ein
ſchaftliches Maaß $g > 1$, welches ungereimt iſt,
b nothwendig relative Primzahlen ſeyn müſſen, weil
s größte gemeinſchaftliche Maaß von A, B ſeyn
Alſo iſt mab das kleinſte gemeinſchaftliche Viel-
on A, B.

. Soll das kleinſte gemeinſchaftliche Vielfache mehre-
hlen A, B, C, D, E geſucht werden; ſo ſuche man zuerſt
B das kleinſte gemeinſchaftliche Vielfache $= a$ (10.);
as von a, C, $= b$; dann das von b, D, $= c$; dann
n c, E, $= d$; ſo iſt d das kleinſte gemeinſchaftliche
che aller gegebenen Zahlen. Daß alle gegebene Zah-
d aufgehen müſſen, und daß folglich d ein gemein-
iches Vielfaches derſelben iſt, erhellet ohne weitere
terung ſogleich. Wäre aber nicht d, ſondern V
einſte, ſo daß $V < d$; ſo wäre V auch ein gemein-
iches Vielfache von A, B, und es müßte alſo a in
gehen, da a das kleinſte gemeinſchaftliche Vielfache
, B iſt (10.). Ganz auf ähnliche Art müßte nun
); alſo auch c, und ganz eben ſo auch d in V aufge-
welches nicht möglich iſt, *da* $V < d$. Alſo iſt d

inſte gemeinſchaftliche Vielfache der geg

eilung einer Größe, bedeutet jede Zer
in zwey oder mehrere andere gleichartige G
ſolche Art, daß durch das Zuſammennehm
n Größen die gegebene wieder erzeugt wird.
nennt man dann Theile der gegebenen.
t allen ſeinen Theilen zuſammen genommen
ßer als einer oder einige ſeiner Theile, ſi
Grundſätze der allgemeinen Größenlehre.
in einer ſolchen Beziehung, daß B durch m
derholung von A erhalten werden kann; ſo
liquoter Theil von B, und B wird da
es von A genannt. Jedes Vielfache eines
ils einer Größe heißt ein aliquanter
. Alle Brüche ſind aliquote oder aliquante
heit. Die Theilung der Verhältniſſe, ſ. V
.). Hier betrachten wir nur die Theilu
nd ſtetigen Größen. Daß jede Größe in

zwey, drey, und mehrere Theile zerlegt werden könne. Die Auflösung setzt er hinzu, scheine ihm schwer, aber werth zu seyn, daß man sie suche. Noch weiter ausgeführt hat Euler die Untersuchung in den Nov. Comm. Petrop. III. 1750. 51., und in der Abhandlung de partitione numerorum in partes tam numero quam specie datas. Ib. XIV. 1759.

3. Die Aufgabe bietet zwey Fälle dar, jenachdem man die Ungleichheit aller einzelnen Theile zur Bedingung macht, oder das Vorkommen willkührlich vieler gleichen Theile gestattet. Euler geht von zwey sehr leicht durch Induction und den Schluß vom nten auf den $(n+1)$ten Fall zu beweisenden Sätzen aus.

Wenn man das Product

$$(1+x^{\alpha}z)(1+x^{\beta}z)(1+x^{\gamma}z)(1+x^{\delta}z)\ldots$$

nach Potenzen von z entwickelt; so ist jeder Coefficient einer Potenz von z eine Summe von Potenzen des x, deren Exponenten erhalten werden, wenn man die Combinationen ohne Wiederholungen der sovielten Klasse, als der Exponent der entsprechenden Potenz von z angiebt, für den Zeiger $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ꝛc. entwickelt, und alle einzelnen Combinationen als Summen betrachtet.

Ganz dasselbe gilt von der Entwickelung des Bruchs

$$\frac{1}{(1-x^{\alpha}z)(1-x^{\beta}z)(1-x^{\gamma}z)(1-x^{\delta}z)\ldots}$$

nach Potenzen von z, nur daß man statt der Combinationen ohne Wiederholungen, Combinationen mit Wiederholungen setzt.

In beiden Fällen kann der Zeiger als begränzt oder unbegränzt gedacht werden. Die Beweise übergehen wir, weil sie sich durch wirkliche Entwickelung der obigen Functionen in Reihen leicht ergeben, und dann durch die erwähnte Schlußart zur Allgemeinheit erhoben werden.

4. Nun setze man $\alpha=1, \beta=2, \gamma=3, \delta=4$ ꝛc., bezeichne die beiden obigen Functionen durch F und F', und vereinige alle die Potenzen von x, deren Exponenten einander gleich sind, mit einander; so werden die allgemeinen

der Entwickelungen von F, F' von der
$N'x^nz^p$ seyn, und aus dem Obigen ergi
mittelbar, daß der Coefficient N angiebt,
n ohne Wiederholung eines Theils, N' d
n mit willkührlicher Wiederholung eines
Gliedern der Reihe 1, 2, 3, 4, 5, ...
gesetzt werden kann, wo wieder diese Reihe
der als unbegränzt angenommen werden kan
Nimmt man nun diese Reihe als unbegrä
ich also die Zahl n auf N verschiedene Art
ngung der Ungleichheit aller Theile in p Thei
ter willkührlicher Wiederholung eines jeden
auf N' verschiedene Arten in p Theile zerleg

$$F =$$
$$+ z\ (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots)$$
$$+ z^2\ (x^3 + x^4 + 2x^5 + 2x^6 + 3x^7 + \ldots)$$
$$+ z^3\ (x^6 + x^7 + 2x^8 + 3x^9 + 4x^{10} + \ldots)$$
$$+ z^4\ (x^{10} + x^{11} + 2x^{12} + 3x^{13} + 5x^{14} + \ldots)$$
$$+ z^5\ (x^{15} + x^{16} + 2x^{17} + 3x^{18} + 5x^{19} + \ldots)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots,$$

$M'x^n$, und nun zeigen die Coefficienten M, M' an, auf wie viele verschiedene Arten die Zahl n überhaupt in Theile ohne oder mit Wiederholungen zerlegt werden kann, ohne Rücksicht auf die Anzahl der Theile. Man erhält

$$F = 1 + x + x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 3x^5 + \ldots$$
$$F' = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + \ldots$$

so daß also z. B. 5 auf 3 Arten in ungleiche, auf 7 Arten dagegen in Theile überhaupt zerlegt werden kann. Denn es ist $5 = 5 = 1+4 = 2+3 = 1+1+3 = 1+2+2 = 1+1+1+2 = 1+1+1+1+1$.

7. Sey

$$F = (1 + xz)(1 + x^2z)(1 + x^3z)\ldots$$
$$= 1 + Pz + Qz^2 + Rz^3 + \ldots$$
$$\frac{F}{1+xz} = (1 + x^2z)(1 + x^3z)(1 + x^4z)\ldots$$
$$= 1 + Pxz + Qx^2z^2 + Rx^3z^3 + \ldots$$

wenn man xz für z setzt. Also

$$F = 1 + P \left| \begin{matrix} xz \\ +1 \end{matrix} \right. + Q \left| \begin{matrix} x^2z^2 \\ +P \end{matrix} \right. + R \left| \begin{matrix} x^3z^3 + \ldots \\ +Q \end{matrix} \right.$$

woraus sich, wenn man beide Ausdrücke von F mit einander vergleicht, leicht ergiebt:

$$P = \frac{x}{1-x},\ Q = \frac{Px^2}{1-x^2},\ R = \frac{Qx^3}{1-x^3},\ \text{ꝛc.}$$

Also

$$P = \frac{x}{1-x},$$
$$Q = \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)},$$
$$R = \frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)},$$
$$S = \frac{x^{10}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)},\ \text{ꝛc.}$$

und das allgemeine Glied dieser Coefficientenreihe, d. h. der Coefficient von z^a, offenbar:

$$\frac{x^{\frac{n(a+1)}{2}}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots(1-x^a)}.$$

Dieser Bruch in eine Reihe aufgelöset, giebt als allgemeines Glied von F:

$$Nx^{n+\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}} \cdot z^{\alpha}$$

nzeigt, wie oft $n + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}$ in α ungleiche
t werden kann. Da aber Nx^n offenbar das
Glied der Entwickelung des Bruchs

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots(1-x^{\alpha})}$$

N auch an, wie oft n durch Addition aus Glie-
ihe 1, 2, 3 .... α zusammengesetzt werden
s giebt folgenden merkwürdigen Satz:
n so viele Arten als eine Zahl n aus Gliedern
, 2, 3 ... α durch Addition erzeugt wer-
äßt sich die Zahl $n + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}$ in α ungleiche
en.

ferner

$$1 + P'z + Q'z^2 + R'z^3 + \ldots$$

$$-xz) = \frac{1}{(1-x^2z)(1-x^3z)\ldots}$$

$$+ P'xz + Q'x^2z^2 + R'x^3z^3 + \ldots$$

$$+ P'\,|\,z + Q'\,|\,z^2 + R'\,|\,z^3 + \ldots;$$

mengesetzt werden. Zieht man die obigen Brüche und Reihen von einander ab; so erhält man, wenn der Bruch durch $1-x^{\alpha}$ aufgehoben wird, das allgemeine Glied von

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^{\alpha-1})}$$

$= (N'-M')x^n$, so daß also n auf $N'-M'$ verschiedene Arten aus den Zahlen der Reihe $1,2,3,\ldots\alpha-1$ zusammengesetzt werden kann. Bezeichnet daher

L' die Menge der Arten, auf welche n aus $1, 2, 3, \ldots\alpha-1$ entstehen kann;

M' die Menge der Arten, auf welche $n-\alpha$ aus $1, 2, 3, \ldots\alpha$ entstehen kann;

N' die Menge der Arten, auf welche n aus $1,2,3,\ldots\alpha$ entstehen kann; so hat man die Relation $L'=N'-M'$, $N'=L'+M'$, oder, wenn man überhaupt die Anzahl der Zusammensetzungen einer Zahl n aus den Zahlen $1,2,3,\ldots\alpha$ durch $n^{(\alpha)}$ bezeichnet: $n^{(\alpha)} = n^{(\alpha-1)} + (n-\alpha)^{(\alpha)}$, wobey nur zu bemerken, daß, wenn $\alpha > n$ ist, offenbar $n^{(\alpha)} = n^{(n)}$, und daß immer $n^{(n)} = n^{(n-1)} + 1$ seyn muß, weil zu $n^{(n-1)}$ augenscheinlich nur noch die Zahl n als Zusammensetzung der n aus $1, 2, 3, \ldots n$ hinzukommt. Weil nun immer $n^{(n)} = n^{(n-1)} + o^{(n)}$; so ist überhaupt $o^{(n)} = 1$ zu setzen. Hiernach ist es nun leicht folgende Tafel zu construiren, wo in der ersten Vertikal- und Horizontalreihe die Werthe von n und α stehen, und in dem Durchschnitt der entsprechenden Vertikal- und Horizontalreihe der Werth von $n^{(\alpha)}$ sich findet:

n	Werthe von α.									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1									
2	1	2								
3	1	2	3							
4	1	3	4	5						
5	1	3	5	6	7					
6	1	4	7	9	10	11				
7	1	4	8	11	13	14	15			
8	1	5	10	15	18	20	21	22		
9	1	5	12	18	23	26	28	29	30	
10	1	6	14	23	30	35	38	40	41	42
11	1	6	16	27	37	44	49	52	54	55
12	1	7	19	34	47	58	65	70	73	75
13	1	7	21	39	57	71	82	89	94	97

piel der Conſtruction der Tafel mag $12^{(7)}$ die-
nämlich

$^{(0)} + 11^{(1)} = 1,\quad 12^{(2)} = 12^{(1)} + 10^{(2)} = 7,$
$^{(2)} + 9^{(3)} = 19,\quad 12^{(4)} = 12^{(3)} + 8^{(4)} = 34,$
. . . . . .
$2^{(10)} + 1^{(11)} = 76,\quad 12^{(12)} = 12^{(11)} + 0^{(12)} = 77.$

iſt die Tafel bis $69^{(11)}$ fortgeſetzt.

eitere Zerlegung erhält man

$a)^{(a)} + n^{(a-1)}$

$-a)^{(a)} + (n-a+1)^{(a-1)} + n^{(a-2)}$

$-a)^{(a)} + (n-a+1)^{(a-1)} + (n-a+2)^{(a-2)} + n^{(a-3)}$

2c. 2c.

$a)} + (n-a+1)^{(a-1)} + .. + (n-1)^{(1)};$

$= n:$

$)} + 1^{(n-1)} + 2^{(n-2)} + 3^{(n-3)} + ... + (n-1)^{(1)}$

dient nun auch, um zu beſtimmen, in wieviel
Zahl zerlegt werden kann.

ebene Zahl ſey $= m$ und zunächſt zu beſtim-

sey $m = \alpha + n$, dann ist die gesuchte Zahl $= n^{(\alpha)}$ (8.) Für $m = 16$, $\alpha = 9$ ist $n = m - \alpha = 7$, und $7^{(9)} = 7^{(7)} = 15$, also 16 auf 15 verschiedene Arten in 9 Theile zerlegbar. Für $m = 32$, $\alpha = 5$, $n = 27$, ist, wenn die Tafel weiter fortgesetzt würde, $n^{(\alpha)} = 480$, so daß also 32 auf 480 Arten in 5 Theile zerlegt werden kann. Für $\alpha > m$ ist das Gesuchte natürlich unmöglich.

10. Der zweite Theil der Aufgabe über die Theilung der Zahlen, welchen Euler unberührt gelassen hat, besteht in der wirklichen Aufstellung der möglichen Zerfällungen. Um diesen Theil hat sich Hindenburg vorzügliche Verdienste erworben, indem er die Analysis mit bestimmten Regeln zur Aufstellung der von ihm sogenannten Combinationen zu bestimmten Summen bereicherte. Sollen also z. B. alle möglichen Zerlegungen der Zahl 12 in 5 Theile entwickelt werden; so entwickelt man die Combinationen der 5ten Klasse zur Summe 12, wozu im Art. Combination. IV. Anleitung ertheilt ist. Die Zerlegungen in ungleiche Theile lassen sich aus diesen leicht aussondern. Eulers Untersuchungen hat vorzüglich der berühmte Paoli weiter verfolgt, und sie auf die Integration gewisser Differenzengleichungen reducirt. Paoli Opuscula. Opusc. II. Memorie della Societa italiana. T. I. P. II. Auch zu vergleichen: Lacroix Traité du calc. diff. etc. III. p. 461. Euler bemerkt noch, daß um das Product

$$P = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8) \ldots$$
$$= 1 + px + qx^2 + rx^3 + sx^4 + \ldots$$

zu entwickeln, zu setzen sey:

$$\frac{P}{1+x} = 1 + px^2 + qx^4 + rx^6 + \ldots,$$
$$P = 1 + x + px^2 + px^3 + qx^4 + qx^5 + \ldots$$

woraus $p = 1$, $q = p$, $r = p$, $s = q$, $t = q$, u. s. w.

$$P = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots$$

folgt. Hieraus ergiebt sich (3.), da die Exponenten die natürlichen Zahlen, die Coefficienten alle $= 1$ sind, daß jede Zahl aus den Gliedern der geometrischen Reihe 1, 2, 4, 8, ꝛc., aber jede nur auf einmal ohne Wiederholun-

gesetzt werden kann. Also kann man mit Ge-
, 2, 4, 8, ꝛc. ℔ jede Last von ganzen Pfunden
Mit 1 ℔, 2 ℔, 4 ℔, bis 512 ℔ z. B. jede
℔, welches die Summe dieser Gewichte ist.

Linientheilung hatten die Alten meh-
Arten. Die Theilung einer geraden Linie in
, und nach gegebenen Verhältnissen lehrt Eu-
. 10., die Halbirung besonders I. 10.

Theilung einer Linie a nach dem äußern und
hältniß (Sectio in extrema et media ratio-
divina) verlangte a so in zwei Theile x, y
aß, wenn $x > y$, $a:x = x:y$. S. Thl. I.
09. Elem. II. 11. VI. 30.

man harmonische Theilung nannte s. Thl. II.
m AB (Fig. 1.) harmonisch zu theilen, ziehe
willkührlichen Puncte P die Linien AP, BP,
den Punkt C willkührlich an, ziehe CE mit
mache $CF = CE$, und ziehe FP; so ist AB
monisch getheilt. Denn es ist $AB:BC =$
$AP:CF = AD:CD$. Die Linien AP, BP,

wird von ihnen harmoniſch geſchnitten. Zieht man nämlich DM mit AP parallel; ſo iſt, weil es auch parallel mit GK und GH = HK iſt, auch DL = LM, DM = 2DL. Ganz wie vorher erhält man AB.CD : BD.AC = DL : DM. Alſo BD . AC = 2AB . CD = (BC + CD)(AD + CD) = BC . AD + AB . CD, AB . CD = BC . AD, AB : BC = AD : CD, d. i. AB in C, D harmoniſch getheilt. Zugleich erhellet hieraus, daß jede zwiſchen Harmonikalen gezogene gerade Linie von ihnen harmoniſch getheilt wird.

16. Sind AB, AB′ (Fig. 3.) zwei harmoniſch getheilte Linien; ſo ſchneiden BB′, CC′, DD′ einander in einem Puncte, oder ſind parallel. Schneiden CC′, DD′ einander in P; ſo ziehe man BP. Schnitte dieſe AB′ in B″; ſo wäre, da BP, CP, DP, AP Harmonikalen ſind, auch AB″ harmoniſch getheilt (15.). Alſo wäre

$$AB' . C'D' = B'C' . AD',\ AB'' . C'D' = B''C' . AD',$$

woraus durch Subtraction:

$$B'B'' . C'D' = B'B'' . AD'.$$

Folglich C′D′ = AD′, und, wegen des Obigen, auch AB′ = B′C′, welches ungereimt iſt. Alſo muß B″ mit B′ zuſammenfallen.

17. Wenn von den Endpunkten E, F (Fig. 4.) einer Sehne nach einem dritten Punkte G gerade Linien EG, FG gezogen werden; ſo wird der auf der Sehne ſenkrechte Durchmeſſer von dieſen Linien und dem Kreiſe harmoniſch getheilt. Man ziehe AE, AF, GD; ſo iſt, weil AEGD ein Viereck im Kreiſe, BGD = EAB = FAD = HGD. Alſo (Dreieck 9.) BD : HD = BG : GH, und BG : GD = AB : AE = AB : AF, GD : GH = AF : AH. Alſo auch BG : GH = AB : AH, woraus, verglichen mit der erſten Proportion, AB : AH = BD : HD.

18. Beſonders gehört auch noch hierher die Sectio determinata (Thl. I. S. 293.) des Apollonius, und in gewiſſer Rückſicht auch die Sectio rationis (Thl. I. S. 114.) und Sectio spatii (Thl. I. S. 116.).

19. Für Geodäſie und praktiſche Aſtronomie ſind Theilungen einer Linie oder eines Bogens in eine große Anzahl gleicher Theile ſehr wichtig. *Hülfsmittel dazu* ſind der ver-

ſtab, Transverſalen, vorzüglich aber der No-
Vernier. Iſt nämlich eine Linie a in n glei-
heilt, ſo theile man dieſe Linie auch in n — 1
, ſo daß a = nx = (n — 1)y. Dann iſt

$$x = \frac{a}{n}, \quad y = \frac{a}{n-1}, \quad y - x = \frac{a}{n(n-1)}$$

Differenz y—x wird alſo a in n(n—1) gleiche
lt. Die in n—1 gleiche Theile getheilte Linie a
nius oder Vernier, und wird bei Inſtrumen-
nmeſſung als ein neben der Scala verſchiebbares
ng, bei Winkelmeſſern in Geſtalt eines ſolchen
gebracht. Bey den trefflichen Piſtor'ſchen
tern — wir wählen dieſes Beiſpiel, um den
s Nonius recht deutlich zu machen — iſt die
telbar in halbe Linien getheilt, und der No-
an der Scala verſchiebbares Stück Meſſing,
s die Barometerhöhe abgeſchnitten wird, und
26 halbe Linien in 25 gleiche Theile getheilt
alſo hier a = 26.0‴,5, y — x = 0‴,02.
nen Theilen, wird nun offenbar immer ein
s Nonius mit einem Theilſtriche der Scala ſehr

20. Ueber Winkel- und Bogentheilungen ſ. m. den Artikel Triſection des Winkels. Ueber die Theilung des ganzen Kreiſes den Artikel Vieleck. Manche für den Künſtler brauchbare Theilungsmethode, welche nur den Gebrauch des Zirkels, nicht des Lineals erheiſcht, giebt Maſcheroni Gebrauch des Zirkels, überſ. v. Grüſon. Berlin. 1825. Maſcheroni ſucht nämlich den Gebrauch des Lineals oder der geraden Linie bei geometriſchen Conſtructionen auszuſchließen, welches, wegen der größern Genauigkeit, die der bloße Gebrauch des Zirkels gewährt, für praktiſche Arbeiten nicht ohne Wichtigkeit iſt.

21. Lagny's Methode (Mém. de Paris. 1724.) Winkel zu meſſen, oder auch kleine Theile von Linien mit gegebenen Linien zu vergleichen, beſteht in Folgendem. Der gegebene Winkel oder Bogen ſey $= \alpha$. Man ziehe α ſo oft es angeht von der halben Peripherie π ab, und finde $\pi = m\alpha + \beta$; eben ſo verfahre man mit β in Bezug auf α, und finde $\alpha = n\beta + \gamma$, $\beta = p\gamma + \delta$, $\gamma = q\delta + \varepsilon$, u. ſ. f. Dies giebt leicht

$$\frac{\pi}{\alpha} = m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q + \ldots}}}$$

$$\alpha = \pi \cdot \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q + \ldots}}}}$$

das Verhältniß von α zu π, deſto genauer, je weiter man obiges Verfahren fortgeſetzt hat. Für die Beſtimmung kleiner Theile gerader Linien kann man daſſelbe Verfahren auf ähnliche Art anwenden. Vergl. Verhältniß. (5.)

22. Von der Theilung der Figuren durch Zeichnung und durch Rechnung iſt ſchon in dem Artikel Figur (32.) ausführlich genug gehandelt. Zu der dort angeführten Literatur iſt als das ausführlichſte Werk über dieſen Gegenſtand jetzt noch zu erwähnen: Geodäſie von Grüſon. Halle. 1811., wo das Wort Geodäſie in ſeiner eigentlichen etymologiſchen Bedeutung gebraucht iſt. Außerdem noch Chriſtiani Lehre von der *geometriſchen und* ökonomiſchen

rem.

t. 1793., und M. Hirſch
ſte Sammlung. Berl. 1805.
die Theilung der Figuren ge-
s in Euclid. p. 20. 40.),
ρέσεων βιβλίον. Johann
rabiſches Manuſcript de di-
von Mahometus Bag-
ahrh. v. C.), glaubte weger
Araber zum Verfaſſer habe
hey, überſetzte es in's Latein
mandinus, der es heraus-
ionibus, cura Federic
1570. Dies erzählt Gr
M. ſ. auch Käſtner in de
n Werke von Chriſtian
s Ausgabe abgedruckt. Mo
un assez élégant trait
daß die Schrift von Eucl
Sache nicht als ausgemac
interpretibus et explan
Halae. 1823. p. 5.) fü
lides aus arabiſchen Schri
divisionibus a Thabet
nter den Schriften des Th

Theorie, nennt man in der Mathematik überhaupt die Verbindung aller sich auf einen bestimmten Gegenstand beziehenden Sätze zu einem streng systematischen Ganzen, wobey der Artikel System verglichen werden kann. Beispiele sind die Theorie der Binomial-Coefficienten, der Combinationen, der Facultäten, der Gleichungen, u. s. f. Théorie des fonctions ist der Titel eines wichtigen Werkes von Lagrange, worin die Gründe der sogenannten höheren oder Analysis des Unendlichen nach ganz eigenthümlichen Ansichten rein analytisch entwickelt sind. Bezout hat eine Théorie générale des équations, welche vorzüglich der Lehre von der Elimination gewidmet ist, geschrieben, und Laplace in seiner Théorie analytique des probabilités eins der tiefsinnigsten Werke des menschlichen Geistes geliefert, worin die Lehre von der Wahrscheinlichkeit sehr ausführlich und höchst scharfsinnig entwickelt ist. Aus der angewandten Mathematik gehören u. A. hierher Eulers Theoria motus corporum solidorum s. rigidorum, Theoria motuum planetarum et cometarum, Theoria Musices, vorzüglich aber die Theoria motus corporum coelestium, in sectionibus conicis solem ambientium von Gauß.

Die theorische Astronomie lehrt uns die wahren Bewegungen der Weltkörper kennen, nachdem sie in der sphärischen betrachtet worden waren, wie sie dem Auge des an die Erde gebundenen Beobachters erscheinen.

Der Theorie entgegengesetzt ist die Praxis, welche die in der Theorie gewonnenen Sätze auf Vorfälle des gemeinen Lebens anzuwenden strebt, woraus z. B. der Begriff einer praktischen Geometrie oder Feldmeßkunst, praktischen Mechanik, u. s. f. entspringt. Die praktische Astronomie ertheilt nebst einer genauen Kenntniß der Instrumente, Anleitung zu astronomischen Beobachtungen und Rechnungen.

Theoretische Sätze nennt man solche, in welchen irgend eine Wahrheit ausgesprochen wird, die also irgend eine Behauptung aufstellen, einen wirklichen Inhalt haben. Jenachdem sie keines oder eines *Beweises bedürfen*, nennt

und- oder Lehrſätze. Praktiſche Sätze
mmer etwas zu thun, und ſind, auf ähnliche
vorigen unterſchieden, entweder Forderun-
ufgaben. Zu allen dieſen kommen dann im
hen Syſteme noch Erklärungen, Zuſätze,
rkungen oder Scholien.

iſch, ſ. Theorie.

s, nennt man den zweiten Theil in dem Aus-
Lehrſatzes, die Folgerung aus der Vorausſe-
Hypothesis, die eigentliche Behauptung
das was bewieſen werden ſoll. Es iſt gut,
ey dem Unterrichte der Anfänger, bey jedem
ypotheſis und Theſis immer ſtreng von einander
Z. B. Hyp. Wenn in einem Dreieck zwei
nder gleich ſind; Thes. ſo ſind auch die denſel-
erſtehenden Winkel einander gleich. Der Be-
er zunächſt aus der Hypotheſis herzuleiten.

nförmige Zahl, ſ. Pyrgoidalzahl.

h ein schwerer Punkt befindet, auf einer gegebenen urve in einer horizontalen Ebene fortbewegt wird. Der hwere Punkt beschreibt die Tractoria. Clairaut hat n den Mém. de Paris. 1736. gezeigt, daß zum Fortbeegen des Fadens nur so viel Kraft angewandt werden uß, als zur Ueberwindung der Friction erforderlich ist, mit die Berührende der beschriebenen Curve immer in ie Richtung des Fadens fällt. Diese Entstehungsart hat n dem Namen Veranlassung gegeben.

2. Die Gleichung der Directrix sey $\varphi(x', y') = 0$, nd x, y seyen in Bezug auf dasselbe Coordinatensystem ie Coordinaten der Tractoria. Die Länge der Berühenden ist

$$= y\sqrt{1 + \frac{\partial x^2}{\partial y^2}},$$

ie sich leicht aus der Formel für die Subtangente (Berührende Linie 13.) ergiebt.

Sey nun $z = Au + B$ die Gleichung der Berührenen; so ist, wenn α den Winkel derselben mit der Abcissenaxe bezeichnet:

$$A = \text{tang}\,\alpha = \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Linie, gerade 16. Berührende Linie 14.). Also

$$z = \frac{\partial y}{\partial x} u + B.$$

Weil aber die Berührende immer durch den Endpunkt der Ordinate geht; so ist

$$y = \frac{\partial y}{\partial x} x + B.$$

Also die Gleichung der Berührenden:

$$z - y = \frac{\partial y}{\partial x}(u - x).$$

Sind nun x', y' die Coordinaten des Punktes, in welchem die Berührende die Directrix trifft, und u' ist die Abscisse des Punktes, in welchem die Berührende die Abscissenaxe schneidet; so ist

$$y' - y = \frac{\partial y}{\partial x}(x' - x),\ -y = \frac{\partial y}{\partial x}(u' - x),\ u' = x - \frac{y\partial x}{\partial y}.$$

k von der Länge der Berührenden ſubtr
die beiden Curven aber auf entgegengeſe
lbſciſſenaxe; ſo muß man dieſes Stück
Berührenden addiren. Da aber, wenn
v anſieht, y' im erſten Falle poſitiv,
iv iſt; ſo erhält man:

$$y\sqrt{1+\frac{\partial x^2}{\partial y^2}} \mp \sqrt{y'^2\left(1+\frac{\partial x^2}{\partial y^2}\right)}$$

$$y\sqrt{1+\frac{\partial x^2}{\partial y^2}} - y'\sqrt{1+\frac{\partial x^2}{\partial y^2}} = (y-y')\sqrt{1}$$

inirt man nun aus den Gleichungen:

$$\varphi(x', y') = o,$$

$$y'-y = \frac{\partial y}{\partial x}(x'-x),\ a = (y-y')\sqrt{1+}$$

größen x', y'; ſo erhält man die Differen
racktoria.

. Die merkwürdigſte und am meiſten
oria iſt die Hugeniſche (Hugeni
T. II. p. 517.), deren Directrix die gera
nt man die Directrix als Axe der Abſc
$= o$, und folglich

$$a = y\sqrt{1+\frac{\partial x^2}{\partial y^2}},\ \partial x = \frac{\partial y\sqrt{a^2-y^2}}{y}$$

$$= z - \tfrac{1}{2} a \int \frac{\partial z}{a-z} - \tfrac{1}{2} a \int \frac{\partial z}{a+z}$$

$$= z - \tfrac{1}{2} a \log n \frac{a+z}{a-z} + C.$$

Integralformel. 5.)

Hieraus erhält man leicht:

$$x = \sqrt{a^2-y^2} - a. \log n \frac{(a+\sqrt{a^2-y^2})^2}{y^2} + C$$

$$= \sqrt{a^2-y^2} - a. \log n \frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y} + C.$$

Die Constante ist durch irgend eine gegebene Bedingung, wa daß die Tractoria durch einen gegebenen Punkt gehen ll, zu bestimmen.

4. Für $y = o$ wird $x = \infty$. Also ist die Directrix die symptote der Tractoria.

Die Gleichung der Berührenden ist nach (2.):

$$z - y = \frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}} (u-x).$$

Die Subtangente ist $= \sqrt{a^2-y^2}$. Auch ist tang $\alpha = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}$. Für $\alpha = 90^0$ ist tang $\alpha = \infty$. Also $a^2 - y^2 = o$, $y = \pm a$. Für größere Ordinaten werden die Abscissen imaginär. Also ist $y = \pm a$ die größte Ordinate auf beiden Seiten der Abscissenaxe.

Nimmt man den Punkt, in welchem die Berührende auf der Axe der x senkrecht ist, als Anfang der Coordinaten an; so ist $y = a$ für $x = o$. Also $o = -a \log n \frac{a}{a} + C = C$ und folglich die Gleichung der Tractoria:

$$x = \sqrt{a^2-y^2} - a \log n \frac{(a+\sqrt{a^2-y^2})^2}{y^2}$$

Für ein negatives y bleibt x völlig ungeändert, so daß also die Tractoria auf beiden Seiten der Abscissenaxe auf völlig gleiche Art liegt. Um dies deutlich zu übersehen, ist die Quadratwurzel aus dem Bruche unter log n absichtlich nicht ausgezogen worden, so wie es denn überhaupt zuweilen vortheilhaft erscheint, die Gleichungen der Curven unverkürzt beizubehalten.

Eben so gehören, da man $\sqrt{a^2-y^2}$ positiv und negativ nehmen kann, zu jeder Ordinate zwei Abscissen, welche aber einander gleich und entgegengesetzt sind. Denn

der beiden größten Ordinaten $\pm$ a eine
eht man die Quadratwurzel wirklich a
$-y^2$ positiv und negativ, und multiplicir
en Bruch unter logn im Zähler und im
$\sqrt{a^2-y^2}$; so entspricht die Gleichung

$$x = \sqrt{a^2-y^2} - a.\ \mathrm{logn}\ \frac{a + \sqrt{a^2-y^2}}{y}$$

ich dem Zweige BD (Fig. 5.), die Gleich

$$= -\sqrt{a^2-y^2} + a\,\mathrm{logn}\ \frac{a + \sqrt{a^2-y^2}}{y}$$

n dem Zweige BC, da im ersten Falle von
o die Abscisse von o bis $-\infty$ abnehmen,
n von o bis $+\infty$ zunehmen muß, übere
n obigen beiden Gleichungen. Im Folgen
da alle vier Zweige dieselben Eigenscha
nur den Zweig BC betrachten, und dahe

$$x = a\ \mathrm{logn}\ \frac{a + \sqrt{a^2-y^2}}{y} - \sqrt{a^2-y}$$

leichung der Hugenischen Tractoria zu

. Der Bogen der Tractoria sey $= s$; s
. 5ª.)

$$= \partial y \sqrt{1 + \frac{\partial x^2}{\partial y^2}} = \partial y \sqrt{\frac{a^2}{y^2}} = \pm \frac{a\partial y}{y},$$

Paris. 1713. p. 357. 260.) Aus A (Fig. 6.) als Mittelpunkt beſchreibe man, um die Länge des Bogens BP zu finden, mit AD = PQ als Radius, einen Kreis DF, errichte auf AB durch B das Perpendikel BE, und beſchreibe einen zweiten Kreis, deſſen Mittelpunkt in BE liegt, der durch B geht, und den erſten Kreis (in F) berührt. Dann ziehe man AFE, beſchreibe aus A mit AB einen Kreis, welcher AFE in G ſchneidet; ſo iſt die der Aa parallele GK dem Bogen BP gleich. Sey BE = r, AQ = x, PQ = y, AB = a; ſo folgt aus der Conſtruction leicht:

$$(r + y)^2 = a^2 + r^2,\ r = \frac{a^2 - y^2}{2y},$$

$$AE : BE = AG : GH,\ r + y : r = a : GH,$$

$$GH = \frac{ar}{r + y} = \frac{a(a^2 - y^2)}{a^2 + y^2};$$

$$AE : AG = AB : AH,\ r + y : a = a : AH,$$

$$AH = \frac{a^2}{r + y} = \frac{2a^2y}{a^2 + y^2}.$$

Da nun HK die zu der Ordinate AH gehörende Abſciſſe iſt; ſo erhält man, wenn der gefundene Werth von AH für y in die Gleichung der Tractoria geſetzt wird:

$$HK = a \log n \frac{a}{y} - \frac{a(a^2 - y^2)}{a^2 + y^2}.$$

Alſo $GH + HK = GK = a \log n \frac{a}{y}$, d. i. GK = s.

6. Für den Zweig BC nimmt y ab, wenn x zunimmt. Alſo iſt für dieſen Zweig, wenn man die Quadratwurzel immer als poſitiv anſieht:

$$\partial x = -\frac{\partial y \sqrt{a^2 - y^2}}{y} \quad (3.)$$

Folglich, wenn S die Area ABPQ bezeichnet (Quadratur. 8.):

$$S = -\int \partial y \sqrt{a^2 - y^2} = -\int \frac{(a^2 - y^2)\partial y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$$

$$= -a^2 \int \frac{\partial y}{\sqrt{a^2 - y^2}} + \int \frac{y^2 \partial y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$$

$$= -a^2 \int \frac{\partial . \frac{y}{a}}{\sqrt{1 - \frac{y^2}{a^2}}} + \int \frac{y^2 \partial y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$$

$$a^2 \operatorname{Arc\,sin} \frac{y}{a} - \int \left\{ \partial y \sqrt{a^2 - y^2} + y . \tfrac{1}{2}(a^2 - y^2)^{-} \right.$$

$$a^2 \operatorname{Arc\,sin} \frac{y}{a} - \int (\partial y \sqrt{a^2 - y^2} + y \partial \sqrt{a^2 -}$$

$$a^2 \operatorname{Arc\,sin} \frac{y}{a} - \int \partial . y \sqrt{a^2 - y^2}$$

$$a^2 \operatorname{Arc\,sin} \frac{y}{a} - y \sqrt{a^2 - y^2}$$

$$\tfrac{1}{2} a^2 \operatorname{Arc\,sin} \frac{y}{a} - \tfrac{1}{2} y \sqrt{a^2 - y^2} + C$$

$y = a$ wird $S = o$. Also $C =$
ich

$$S = \tfrac{1}{2} a^2 \left(\tfrac{1}{2} \pi - \operatorname{Arc\,sin} \frac{y}{a} \right) - \tfrac{1}{2} y \sqrt{}$$

$$= \tfrac{1}{2} a^2 \operatorname{Arc\,cos} \frac{y}{a} - \tfrac{1}{2} y \sqrt{a^2 - y^2}.$$

$y = o$ wird $S = \frac{1}{4} a^2 \pi$, so daß a
m CBAa dem Quadranten eines Kreises g
halbmesser $= a$.

'. V sey der Inhalt des durch die Umdrehu
. 6.) um AB entstandenen Körpers; so ist

$$V = - \pi \int y \partial y \sqrt{a^2 - y^2},$$

us sich, für $a^2 - y^2 = z^2$, leicht erai

8. Die Oberfläche des mit V bezeichneten Körpers sey $= v$; so ist (Complanation): $v = 2\pi\int y\partial s = -2\pi\int a\partial y = -2\pi ay + C$, $o = -2a^2\pi + C$, $v = 2a\pi(a-y)$, und, für $y = o$, $v = 2a^2\pi$. Also ist die von der Tractoria beschriebene krumme Oberfläche des durch die Umdrehung von CBAa um AB entstandenen Körpers der krummen Seitenfläche eines geraden Cylinders gleich, dessen Höhe und Halbmesser $= a$ sind.

9. Denkt man sich durch B (Fig. 7.) eine gleichseitige Hyperbel beschrieben, deren Halbaxe $= AB = a$ ist, und durch irgend einen Punkt G derselben die Berührende GE gezogen; so ist, wenn FE mit Aa parallel ist, der hyperbolische Raum EBG dem Dreyeck ABF gleich. Sey $AE = FH = y$, $AH = FE = x$; so ist (4.)

$$EF = a\log n \frac{a + \sqrt{a^2-y^2}}{y} - \sqrt{a^2-y^2}$$

$$\Delta ABF = \tfrac{1}{2}ax = \tfrac{1}{2}a^2.\log n \frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y} - \tfrac{1}{2}a\sqrt{a^2-y^2}.$$

Ist nun $KB = u$, $KG = z$; so ist (Hyperbel. 32.) $z^2 = 2au + u^2$. Die Subtangente $KE = \frac{z\partial u}{\partial z} = \frac{2au+u^2}{a+u}$ $= KB + BA - AE = u + a - y$. Also $u = \frac{a(a-y)}{y}$. Da nun $a + u = \frac{a^2}{y}$, $2au + u^2 = \frac{a^2(a^2-y^2)}{y^2}$ ist; so giebt die Formel (Quadratur. 91.) den hyperbolischen Raum BKG $=$

$$\frac{a^3}{2y^2}\sqrt{a^2-y^2} - \tfrac{1}{2}a^2.\log n \frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y},$$

wenn in jener Formel nur $\frac{b}{2a}$ statt des falschen $\frac{b}{a}$ gesetzt wird. Setzt man in die Gleichung der Hyperbel für u den gefundenen Ausdruck; so erhält man:

$$z = \frac{a}{y}\sqrt{a^2-y^2},$$

und auf gleiche Art $KE = \frac{a^2-y^2}{y}$. Hieraus ergiebt sich

$$\Delta KEG = \tfrac{1}{2}KE.z = \frac{a^3}{2y^2}\sqrt{a^2-y^2} - \tfrac{1}{2}a.\sqrt{a^2-y^2}.$$

Zieht man hiervon BKG ab, so erhält man für BEG denselben Ausdruck, welchen wir vorher für ΔABF gefunden

unter einem Winkel $= \alpha$ durch Aa eine
e Cylinderfläche in einer gewiſſen Linie d
it man die Coordinaten dieſer Linie, we
ylinderfläche in eine Ebene abgewickelt de
klar, daß $x' = a \log n \frac{a}{y}$ (5.), $y' =$
$= \log n \frac{a}{y}$, $e^{\frac{x'}{a}} = \frac{a}{y}$. Folglich die E
itts:

$$y' = a e^{-\frac{x'}{a}} \tang \alpha.$$

Subtangente dieſer Curve iſt $= -a$, d
olglich die Curve eine Logiſtica. (Loga
k.). Für $\alpha = 45^0$ iſt die Gleichung $y =$
ſind x', y' die Coordinaten des Durchſc
Aa gelegten Ebene; ſo iſt

$$x = x', \; y = \frac{y'}{\sec \alpha},$$

es, in die Gleichung der Tractoria geſetz

$$= a \log n \frac{a + \sqrt{a^2 - y'^2 \cos \alpha^2}}{y' \cos \alpha} - \sqrt{a^2 - y'^2}$$

vorher bewieſene merkwürdige Eigenſchaf
ihrt ebenfalls von Guido Grandi her

$z' = r$, $x' = z' \cos\varphi'$, $y' = z' \sin\varphi'$; $x = z\cos\varphi$, $y = z\sin\varphi$.

$\partial x = \cos\varphi\partial z - z\sin\varphi\partial\varphi$, $\partial y = \sin\varphi\partial z + z\cos\varphi\partial\varphi$;

$$1 + \frac{\partial x^2}{\partial y^2} = \frac{\partial z^2 + z^2\partial\varphi^2}{(\sin\varphi\partial z + z\cos\varphi\partial\varphi)^2}$$

Nach gehöriger Substitution geben die Gleichungen in (2.):

$$\frac{z'\sin\varphi' - z\sin\varphi}{\sin\varphi\partial z + z\cos\varphi\partial\varphi} = \frac{z'\cos\varphi' - z\cos\varphi}{\cos\varphi\partial z - z\sin\varphi\partial\varphi},$$

$$\frac{z\sin\varphi - z'\sin\varphi'}{\sin\varphi\partial z + z\cos\varphi\partial\varphi} = -\frac{a}{\sqrt{\partial z^2 + z^2\partial\varphi^2}},$$

$$\frac{z\cos\varphi - z'\cos\varphi'}{\cos\varphi\partial z - z\sin\varphi\partial\varphi} = -\frac{a}{\sqrt{\partial z^2 + z^2\partial\varphi^2}}.$$

Folglich da $z' = r$ ist:

$$r\cos\varphi' = z\cos\varphi - \frac{a(\cos\varphi\partial z - z\sin\varphi\partial\varphi)}{\sqrt{\partial z^2 + z^2\partial\varphi^2}},$$

$$r\sin\varphi' = z\sin\varphi - \frac{a(\sin\varphi\partial z + z\cos\varphi\partial\varphi}{\sqrt{\partial z^2 + z^2\partial\varphi^2}}.$$

Erhebt man auf beiden Seiten in's Quadrat und addirt; so erhält man:

$$r^2 = z^2 - \frac{2az\partial z}{\sqrt{\partial z^2 + z^2\partial\varphi^2}} + a^2$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\sqrt{-(a^2 - r^2)^2 + 2(a^2 + r^2)z^2 - z^4}}{z(z^2 + a^2 - r^2)}$$

welches die Differentialgleichung der gesuchten Tractoria ist. Die Integration derselben hat nach den Regeln der Integralrechnung keine Schwierigkeit, führt aber auf eine ziemlich verwickelte Gleichung, weshalb wir nicht länger dabei verweilen.

Die Rectification dieser Tractoria ist aber leicht zu bewerkstelligen. Da nämlich

$$\partial s = \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2} = \sqrt{\partial z^2 + z^2\partial\varphi^2},$$

also nach dem Obigen

$$\partial s = \frac{2az\partial z}{z^2 + a^2 - r^2}$$

ist; so ist, für $z^2 + a^2 - r^2 = u^2$, $\partial s = \frac{2a\partial u}{u}$, $s = 2a.\log n\, u = 2a\log n\sqrt{z^2 + a^2 - r^2} + C$, wo die Constante aus einer gegebenen Bedingung bestimmt werden muß.

12. Sey jetzt ein System von Kreisen, deren Halbmesser alle einander gleich sind, so gezeichnet, daß ihre Mit-

leichung der gegebenen Kreiſe, wo x′, u
elches Function von x′ iſt, als conſtant be
uß (Trajectoria.). Alſo

$$2(x'' - x')\partial x'' + 2(y'' - y')\partial y'' = 0,$$

$$\frac{\partial y''}{\partial x''} = -\frac{x''-x'}{y''-y'},\ p = -\frac{x-x'}{y-y'},$$

$$1 - \frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{x-x'}{y-y'} = 0$$

ectoria. 3.).

m nun die Differentialgleichung der geſuch
erhalten muß man aus den Gleichungen:

$$\varphi(x', y') = 0,$$

$$(x-x')^2 + (y-y')^2 = r^2,\ \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{y-y'}{x-x'}$$

) y′ eliminiren, welches ſich nur in beſo
kſtelligen läßt.

)as Stück der Tangente dieſer Trajecte
Berührungspunkte und der gegebenen C

$$-y')\sqrt{1 + \left(\frac{x-x'}{y-y'}\right)^2} = (y-y')\sqrt{\frac{(x-}{}}$$

$$= (y-y')\cdot\frac{r}{y-y'} = r.$$

iſt dieſes Stück eine conſtante Größe,

Dieſen Satz hat zuerſt v. Münchow in der Schrift: De tractoriis geometricis, atque earum cum trajectoriis orthogonalibus congruentia observationes quaedam. Halae. 1810. 4. ſehr einfach geometriſch bewieſen, und ſeine Anwendung gezeigt.

13. Das Problem von der Tractoria läßt ſich aber auch umkehren, d. h. es kann die Frage nach einer Curve ſeyn, welche von allen Berührenden einer gegebenen Curve vom Berührungspunkte aus ein gegebenes Stück abſchneidet. Iſt $\varphi(x, y) = o$ die Gleichung der gegebenen Curve, und b das abzuſchneidende Stück; ſo wird man offenbar aus den Gleichungen (2.)

$$\varphi(x, y) = o,$$

$$y' - y = \frac{\partial y}{\partial x}(x' - x),\ b = (y - y')\sqrt{1 + \frac{\partial x^2}{\partial y^2}}$$

x und y eliminiren, wodurch man die geſuchte Gleichung zwiſchen x′ und y′ erhält. Es iſt klar, daß dieſes Problem der Integralrechnung nicht bedarf. Iſt die gegebene Gleichung z. B.

$$x = \sqrt{a^2 - y^2} - a \log n \sqrt{\frac{(a + \sqrt{a^2 - y^2})^2}{y^2}} + C;$$

alſo (3.) $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$,

$$(y' - y)\sqrt{a^2 - y^2} = y(x' - x),\ by = a(y - y'),$$

$$y = \frac{ay'}{a - b},\ x = x' + \frac{b\sqrt{(a - b)^2 - y'^2}}{a - b}.$$

Subſtituirt man dies in obige Gleichung, ſo erhält man:

$$x' = \sqrt{(a - b)^2 - y'^2} - a \log n \sqrt{\frac{(a - b + \sqrt{(a - b)^2 - y'^2})^2}{y'^2}} + C.$$

Da dieſe Gleichung ſich mit b ändert, ſo iſt klar; daß die gegebene Curve auf unendlich viele Arten durch eine tractoriſche Bewegung erzeugt werden kann

Für $b = a$ giebt die Gleichung $by = a(y - y')$ unmittelbar $y = y - y'$, $y' = o$, die Gleichung einer geraden Linie, ſo daß alſo die Directrix der hugeniſchen Tractoria, dem Vorhergehenden ganz gemäß, auch eine gerade Linie ſeyn kann.

enen; Perrault habe ihm die Sache
er eine beſtimmte Stelle des Bandes ſeine
liegenden Taſchenuhr an einem Lineale
Nachdem Leibnitz die eigentliche Natur
: Theil der Berührenden zwiſchen dem B
und der Directrix eine conſtante Größe
nd auf die Verbindung, in welcher ſie n
ſteht, aufmerkſam gemacht hat, fügt er
ney weiterer Erklärung nicht aufhalte, d
; vermuthen, daß auch der berühmte Hu
ſen Unterſuchungen beſchäftigt habe.
auch ſchon im folgenden Monat deſſelben
5.) einer Linie, welche er nostra quadı
ae, quae inter Tractorias (ita eni
ıt) simplicissima censenda est, nenn
ht, daß Huygens den Begriff allgemei
t, und daß von ihm auch der Name herr
als der eigentliche Schöpfer dieſer Klaſſe k
zuſehen. M. ſ. auch Hugenii Opp.
517. Mehrere Eigenſchaften der einfac
nd in der Schrift: Geometrica dem
matum Hugenianorum circa logist
hmicam lineam, auct. Guidone

rum Tractoriae et Logarithmicae construc-
tc. Patavii. 1743. p. 134. In den Miscell.
ens. T. V. 1737. untersucht Clairaut die Trac-
welche entstehen, wenn sich das eine Ende des Fa-
i einer Curve bewegt, die in einer Ebene liegt,
in der verschieden ist, in welcher sich der schwere
findet. Euler und Riccati haben die tracto-
wegung zur Construction der Differentialgleichun-
wenden gelehrt. M. s. die Abhandlungen des Er-
De curvis tractoriis. N. Act. Petrop. T. II.
vis tractoriis compositis. Ibid. De con-
me aequat. diff. ope motus tractorii, aliisque
nodum tangentium in versam pertinentibus.
Petrop. T. VIII. p. 66. und Vinc. Riccati
motus tractorii in constr. aequat. diff. Comm.
Bonon. 1752. Auch gehört von Riccati hier-
natura quarundam curvarum, quae simul
actoriis generantur, quaeque proinde syn-
ae nominabuntur. Comm. Bonon. T. III.
Bernoulli zeigt (Opp. T. IV. p. 381.), daß die
be Tractoria, welche auch wohl die hugenische lo-
ische Linie genannt wird (Karstens Lehrbegr. II.
92.) die Tautochrone in einem nach dem Quadrat
hwindigkeit widerstehenden Medio ist. In unsern
über höhere Geometrie kommt nur sehr wenig über
ie vor. In den Act. Erud. 1743. p. 134. heißt
er curvas transscendentes prima utique, quae
a. considerari coepit, haberi potest illa Hu-
quam in plano hor. describit corpus alteri
cujus extremitati affixum, dum altera fili ex-
is in recta quadam linea protrahitur. Ein von
Bernoulli aufgegebenes, mit dem Problem von
ctoria verwandtes, Problem s. m. Act. Erud. 1693.
Opp. T. I. p. 66. Die Auflösung giebt Jac.
oulli ibid. p. 257. Er sagt, daß zu dem Pro-
quaedam Hugeniana in Actis Roterodamensi-
Veranlassung gegeben hätten. V. Münchows
t ist schon oben erwähnt worden.

Aufſatz von Varignon in den Mém
, wo aber der Name nicht vorkommt.

Tractrix, ſ. Tractoria.

Trajectoria, Gleichſchnitt nach T
rtem Unterricht der höhern Meßkunſt.
. S. 215., iſt eine Curve, welche ein ga
ırtiger Curven unter einem gegebenen W
ıder, nach einem allgemeinern Begriff,
r Durchſchnitt für alle Curven einer ge
ng entſpricht; z. B. die Curve, welche au
er einerley Hauptaxe vom Scheitel aus g
eidet. Unter gleichartigen Curven verſte
ılche, welche man erhält, wenn in eine
ung einer gewiſſen Conſtante alle mögl
gt werden, die Gleichung aber ſonſt unge
rklärung der Trajectorien in der Mechani
gehört jetzt nicht hierher.

. Wir wenden uns zuerſt zu der Betracht
en in der erſten ſpeciellen Bedeutung, w
lige oder orthogonale (trajectoria
) genannt werden, wenn der gegebene

ven und der Trajectoria durch den gemeinſchaftlichen Durchſchnittspunkt, wie leicht aus (Berührende Linie. 14.) und (Linie, gerade. 13.) geſchloſſen wird. Setzen wir nun die Tangente des gegebenen Winkels $= a$; ſo iſt, da dieſer Winkel von den Curven, d. h. von den durch den gemeinſchaftlichen Durchſchnitt gezogenen Berührenden eingeſchloſſen werden ſoll, zu ſetzen:

$$a = \frac{\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial y'}{\partial x'}}{1 + \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial y'}{\partial x'}}$$

(Linie, gerade. 16.), woraus, wenn wir $\frac{\partial y'}{\partial x'}$, welches aus der Gleichung der gegebenen Curven immer gefunden werden kann, $= p'$ ſetzen, leicht erhalten wird:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{a + p'}{1 - ap'}.$$

Da aber die Folge der gegebenen Curven nach dem Obigen als ſtetig gedacht werden muß; ſo muß dieſe Gleichung offenbar für jedes x' und y' gelten, weshalb man, da in der ſtetigen Folge der Durchſchnittspunkte die x, y mit den x', y' einerley ſind, in derſelben x, y für x', y' ſetzen muß. Bezeichnet daher p den Werth, welchen p' nach dieſer Subſtitution erhält; ſo iſt

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{a + p}{1 - ap}.$$

Von der conſtanten Größe, durch welche die gegebenen Curven beſtimmt werden, macht man dieſe Gleichung unabhängig, wenn man dieſe Größe, die wir durch α bezeichnen wollen, aus $p' = \frac{\partial y'}{\partial x'}$, und $\varphi(x', y') = 0$, der Gleichung der gegebenen Curven, eliminirt, obgleich auch augenblicklich erhellet, daß dieſe Größe auch aus

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{a + p}{1 - ap}$$

und $\varphi(x, y) = 0$ eliminirt werden kann. Hierdurch erhält man die geſuchte Differentialgleichung der Trajectoria, deren Integration die Gleichung ſelbſt giebt. Die beizufügende Conſtante muß durch irgend eine gegebene Bedin-

$-\alpha)^2 = nx'$; $p = \frac{n}{2(y-\alpha)}$, $\partial y = -\frac{2}{\gamma n} \cdot x^{\frac{1}{2}}$

$y = -\frac{4}{3\gamma n} x^{\frac{3}{2}} + c$, oder für $c - y = y_1$:

$$x^2 = \frac{9n}{16} y_1^2.$$

Trajectoria iſt alſo eine Neiliſche Pa
höherer Art.), deren Parameter $\frac{9n}{16}$ ſi
eter der gegebenen Parabeln $= 9:16$ v

8. Orthogonale Trajectoria für Parabel
mit veränderlichem Parameter über ei
einerley Scheitel. Die Gleichung iſt:

$$y'^n = \alpha x'^m;\ p = \frac{m\alpha x^{m-1}}{ny^{n-1}},\ \alpha = \frac{y^n}{x^m};$$

$$p = \frac{my}{nx},\ my\partial y = -nx\partial x;$$

$$\tfrac{1}{2} my^2 = -\tfrac{1}{2} nx^2 + \tfrac{1}{2} c,\ y^2 = \frac{n}{m}($$

tzen wir nun $\frac{1}{n} c = m'^2$, $\mu m = m'^2$
ergiebt ſich leicht:

$$y^2 = \frac{n'^2}{m'^2} (m'^2 - x^2),$$

raus erhellet, daß die geſuchte Trajector

pelte Art bestimmt, indem man in der gegebenen Gleichung x, y für x′, y′ setzt. Die Integration giebt:

$$(x - c)^2 = \frac{16ny}{9},$$

oder für $x - c = x_1$, $\frac{16n}{9} = n'$; $x_1'^2 = n'y$, so daß also die orthogonale Trajectoria eine apollonische Parabel ist.

10. Orthogonale Trajectoria für cubische Parabeln mit einerley Parameter, aber veränderlichem Scheitel. Die Gleichung ist: $y'^3 = n^2(x' - \alpha)$. (Cubisch.)

$$p = \frac{n^2}{3y^2},\ \frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{n^2}{3y^2},\ x = \frac{n^2}{3y} + c,$$

oder für $x - c = x_1$, und $m = n\sqrt{\frac{2}{3}}$:

$$x_1 y = \tfrac{1}{2} m^2,$$

welches die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel ist, deren Halbaxe $= m$. (Hyperbel. 8. 31.)

11. Orthogonale Trajectoria für alle logarithmischen Linien über einerley Axe durch denselben Punkt mit veränderlichem Modul. Die Differentialgleichung ist für $M = \frac{1}{a}$:

$$\frac{y'\partial x'}{\partial y'} = \frac{1}{a}.$$

(Logarithmische Linie. 4.)

$$p = ay,\ a\partial x' = \frac{\partial y'}{y'},\ ax' = \log n\, y' + \text{Const.}$$

Nehmen wir nun an, die Ordinate des gegebenen Punctes sey $= a'$, und die entsprechende Abscisse $= o$; so ist Const so zu bestimmen, daß $y' = a'$ wird, für $x' = o$. Also Const $= -\log n\, a'$, und

$$a = \frac{\log n \frac{y}{a'}}{x}.$$

Also $p = \frac{y \log n \frac{y}{a'}}{x}$, und $y\partial y \log n \frac{y}{a'} = -x\partial x$,

$y\partial y \log n\, y - y\partial y \log n\, a' = -x\partial x$.

Nach Thl. II. S. 783. ist

$\int y\partial y \log n\, y = \log n\, y \int y\partial y - \int \partial \log n\, y \int y\partial y = \frac{1}{2} y^2 \log n\, y - \frac{1}{4} y^2$.

Also $\frac{1}{2} y^2 \log n\, y - \frac{1}{4} y^2 - \frac{1}{2} y^2 \log n\, a' = -\frac{1}{2} x^2$,

$= \frac{a^2}{a^2}(x'^2 - a^2)$; $p = \frac{-}{a^2 y}$, $e^2 = \frac{}{x^2 - a^2}$;

$1 + \frac{xy}{x^2 - a^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = 0$, $y\partial y = \frac{a^2 \partial x}{x} - x\partial x$,

$y^2 + 2\,\text{Const} = 2a^2 \log x - x^2$,

ür $2\,\text{Const} = \pm c^2$:

$\pm c^2 = 2a^2 \log x = \log x^{2a^2}$, $x^{2a^2} = e^{x^2 + y^2 \pm c}$

erkwürdige, von Nic. Bernoulli (A
p. 227.) gegebene, Construction dieſer Tra
ie. Durch den willkührlichen Punct D
ibe man eine logarithmiſche Linie DF, dere
$= a$; ſo iſt für $CE = x$ (Logarithmiſche
$= \frac{a\partial x}{x}$, $EF = a \log x$. Man r
$= 2a$, und beſchreibe über FG, ſo wie
IE einen Halbkreis. Nimmt man hierauf I
, zieht KE, und nimmt $LE = KE$; ſ
t der Trajectoria. Denn $HE^2 = GE$
$\log x$, $KE^2 = HE^2 - HK^2 = 2a^2 \log$
$IE^2 = y^2$ für $\text{Const} = 0$, und demnach
. Alſo L ein Punkt der Trajectoria für C

3. Orthogonale Trajectoria aller Ellipſen r
taxe, aber veränderlicher Nebenaxe.
iſt:

Traité du calcul diff. et int. T. II. p. 454., lehrt folgendes Verfahren. Man ſuche die eine der Größen x', y' aus der Gleichung der gegebenen Curven durch die andere und durch α auszudrücken. Wir wollen annehmen, daß y' durch x', α ausgedrückt ſey. Nun erhellet leicht, daß von einer Ordinate PQ (Fig. 9.) der Trajectoria zu der nächſtfolgenden Ordinate $P'Q'$ derſelben übergehen, eben ſo viel iſt, als von der Ordinate PQ der Curve $B'C'$ zur Ordinate $P'Q'$ der nächſtfolgenden Curve BC übergehen. Der Uebergang von der Curve $B'C'$ zu der Curve BC wird aber bedingt durch die Veränderung der Größe α, und der Uebergang von PQ zu $P'Q'$ durch die Veränderung von x. Daher muß man, um von PQ zu $P'Q'$ überzugehen, y' als Function zweyer unabhängiger veränderlicher Größen α, x' betrachten, ſie nach dieſen beiden veränderlichen Größen differentiiren, und dann x, y für x', y' ſetzen. Sey demnach

$$\partial y' = \left(\frac{\partial y'}{\partial x'}\right) \partial x' + \left(\frac{\partial y'}{\partial \alpha}\right) \partial \alpha,$$

oder für $\left(\frac{\partial y'}{\partial x'}\right) = p'$, $\left(\frac{\partial y'}{\partial \alpha}\right) = q'$:

$$\partial y' = p' \partial x' + q' \partial \alpha.$$

Bezeichnet man nun die Werthe, welche p', q' erhalten, wenn x, y für x', y' geſetzt werden, durch p, q; ſo erhält man $\partial y = p\partial x + q\partial \alpha$. Aber nach (2.):

$$a\left(1 + p\,\frac{\partial y}{\partial x}\right) + p - \frac{\partial y}{\partial x} = 0,$$

$$a\left\{1 + p\left(p + \frac{q\partial\alpha}{\partial x}\right)\right\} + p - \left\{p + \frac{q\partial\alpha}{\partial x}\right\} = 0,$$

$$(1 + p^2)\, a\partial x - (1 - ap)\, q\partial\alpha = 0,$$

wo p, q nur x und α enthalten. Das Integral dieſer Gleichung giebt die Relation zwiſchen x und α, und die Elimination von α aus dieſer Gleichung und der gegebenen, wenn man in dieſer x, y für x', y' ſetzt, giebt die Gleichung der Trajectoria.

15. Conſtruirt wird die Trajectoria auf folgende Art, ohne die Elimination von α ſelbſt auszuführen. Für einen willkührlich angenommenen Werth von x beſtimme man mittelſt der durch die Integration erhaltenen Gleichung den

16. Die Gleichungen der Cycloide ſind
601.

$$x' = a(\varphi - \sin\varphi),\ y' = a(1 - \cos\varphi),$$

, wenn man den Durchmeſſer des erzeuge
Axe und den Anfang der Cycloide als An
n annimmt:

$$x' = a(1 - \cos\varphi),\ y' = a(\varphi - \sin$$

immt man aus der erſten Gleichung die W
$\sin\varphi$, und ſetzt ſie in die zweite, ſo erhäl

$$y' = a\,\text{Arc sin vers}\frac{x'}{a} - \sqrt{2ax' - x'^2},$$

wenn man den Halbmeſſer des erzeugende
derlich, den Anfangspunct als conſtant a

$$y' = a\,\text{Arc sin vers}\frac{x'}{a} - \sqrt{2ax' - x'^2}.$$

iſt y' ſchon durch x', α (14.) ausgedrück
un x, y für x', y', und $\frac{x}{a} = z$; ſo w

$$y = a\,\text{Arc sin vers}\,z - a\sqrt{2z - z^2},$$

zur Abkürzung, $y = \alpha Z$, wo Z nur ein
iſt. Iſt nun $\partial Z = Z'\partial z$; ſo iſt durch pa
ution $\partial y = \alpha Z'\partial z + Z\partial\alpha$. Da nun

7. Vorzüglich wichtig iſt der Fall, wenn nur die Dif-
tialgleichung der zu durchſchneidenden Curven gegeben.
Die gegebene Gleichung ſey, nachdem ſchon x, y für
' geſetzt worden, $\partial y = p\partial x$. Iſt nun u überhaupt
Function zweyer veränderlicher Größen; ſo iſt (Dif-
ialgleichung. 12. 14. Taylors Lehrſatz. 8.)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\,\partial x = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\,\partial x;$$

$$\int \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\,\partial x = \int \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\,\partial x = \int \frac{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial x}\,\partial x;$$

d. i. $$\int \frac{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial y}\,\partial x = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

n wir nun $\frac{\partial u}{\partial x} = P$, $u = \int P \partial x$; ſo wird

$$\int \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)\partial x = \left(\frac{\partial \int P \partial x}{\partial y}\right).$$

ür $P = p$, $y = \alpha$ mit Weglaſſung der Parentheſen:

$$\int \frac{\delta p}{\partial \alpha}\,\partial x = \frac{\partial \int p \partial x}{\partial \alpha}.$$

ich nach (14.):

19. Bringt man die Gleichung in (14.)

$$\frac{(1+p^2)a\partial x}{ap-1} + q\partial a = 0;$$

hellet aus der bekannten allgemeinen Gleic

$$\partial f(x, y) = \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial f(x, y}{\partial y}\right.$$

dem ſchon oben gebrauchten Satze:

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y},$$

wenn dieſe Gleichung durch Multiplica gewiſſen Factor A, der nur eine Functic ırch man

$$\frac{A(1+p^2)a}{ap-1}\partial x + Aq\partial a = 0$$

t, integrabel gemacht werden ſoll, immer

$$\frac{\partial . \frac{A(1+p^2)a}{ap-1}}{\partial a} = \frac{\partial . Aq}{\partial x} = A\frac{\partial q}{\partial x} = A\frac{\partial p}{\partial a}$$

muß. Alſo

$$\frac{\partial . \frac{A(1+p^2)a}{ap-1}}{\qquad} = A\frac{\partial p}{\qquad}$$

$$\frac{a\partial A}{A} - \frac{\{a^2(1+p^2)-(ap-1)(ap+1)\}\,\partial p}{(1+p^2)(ap-1)} = 0,$$

$$\frac{a\partial A}{A} - \frac{a^2\partial p}{ap-1} + \frac{ap\partial p}{1+p^2} + \frac{\partial p}{1+p^2} = 0,$$

woraus, wenn X irgend eine willkührliche Function von x bedeutet, und die arbiträre Constante, da x als constant betrachtet wird, $= a \log n X$ gesetzt wird, durch leichte Integration:

$$a \log n A = a \log n (ap-1) + \tfrac{1}{2} a \log n (1+p^2) + \text{Arc tang } p = a \log n X$$

oder

$$a \log n A = a \log n (ap-1) - \tfrac{1}{2} a \log n (1+p^2) - \text{Arc tang } p + a \log n X.$$

(Integralformel. 5. 15. 16.)

20. Führt man wieder die Cotangente des gegebenen Winkels ein, indem man $a = \frac{1}{a'}$ setzt; so erhält man die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial A}{A} = \frac{\partial p}{p-a'} - \frac{(p+a')\partial p}{1+p^2};$$

also für orthogonale Trajectorien:

$$\frac{\partial A}{A} = \frac{\partial p}{p} - \frac{p\partial p}{1+p^2},$$

$$\log n A = \log n p - \tfrac{1}{2} \log n (1+p^2) + \log n X,$$

$$\log n A = \log n \frac{pX}{\sqrt{1+p^2}}, \quad A = \frac{pX}{\sqrt{1+p^2}},$$

woraus man, da $p = \frac{\partial y}{\partial x}$ ist, leicht erhält:

$$\partial y = \frac{A\partial x}{\sqrt{X^2-A^2}}, \quad y = \int \frac{A\partial x}{\sqrt{X^2-A^2}} + C,$$

wo A eine Function von α, X eine Function von x, C eine willkührliche Constante ist. So muß also die gegebene Differentialgleichung beschaffen seyn, wenn die Gleichung in (18.) für orthogonale Trajectorien durch Multiplication mit dem Factor A integrabel seyn soll. Da

$$p = \frac{A}{\sqrt{X^2-A^2}}$$

ist; so erhält man leicht

$$\frac{1+p^2}{p} = \frac{X^2}{A\sqrt{X^2-A^2}}.$$

$$M = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad N = \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right).$$

$\partial u = M\partial x$, $u = \int M\partial x + Y$, wo Y eine
nction von α bezeichnet, da α als conſtan
). Demnach

$$N = \frac{\partial \int M\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial Y}{\partial \alpha},$$

$$Y = \int \left(N - \frac{\partial \int M\partial x}{\partial \alpha}\right) \partial \alpha + C,$$

$$u = \int M\partial x + \int \left(N - \frac{\partial \int M\partial x}{\partial \alpha}\right) \partial \alpha + C.$$

ſerm Falle, wo $\partial u = 0$, alſo u eine Co
n alſo

$$\int M\partial x + \int \left(N - \frac{\partial \int M\partial x}{\partial \alpha}\right) \partial \alpha = \text{Cons}$$

s zweite Integral nur α enthalten kann,
ält. Daher iſt offenbar dieſes Integral
on den Gliedern in $N\partial\alpha = Aq\partial\alpha$, we
ängig ſind.

l. Wir wollen dieſe Formeln auf eine i
s hes Problema der Trajectorien sehr wi

Man nehme die auf AB durch A errichtete Senkrechte AG als Axe der Abscissen, so daß AH $= x$, HD $= y$.

Der Krümmungshalbmesser wird bekanntlich immer auf der concaven Seite der Curve genommen. Daher werden nur die Krümmungshalbmesser aller der gegen AB concaven Curven von AB geschnitten. Diese Curven sind aber gegen AG convex, und folglich $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ positiv (Concav und Convex. 10.), da wir y als positiv annehmen. Setzen wir nun den Krümmungshalbmesser $= r$; so ist auch

$$\frac{\left(1 + \frac{\partial y^2}{\partial x^2}\right)\sqrt{1 + \frac{\partial y^2}{\partial x^2}}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} = \frac{(\partial x^2 + \partial y^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial x \partial^2 y}$$

positiv, und daher r, welches hier immer als positiv angenommen wird, nicht

$$= -\frac{(\partial x^2 + \partial y^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial x \partial^2 y}$$

(Krümmungskreis. 2.), sondern

$$r = \frac{(\partial x^2 + \partial y^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial x \partial^2 y}$$

zu setzen.

Die Gleichung der Normale, in welcher r immer liegt, ist

$$z - y = -\frac{\partial x}{\partial y}(u - x),$$

wie sich durch eine leichte geometrische Betrachtung mittelst Linie, gerade. 17.) und den allgemeinen Formeln in dem Art. Berührende ergiebt. Für den Punkt E ist $z = AE$, $u = 0$. Also

$$AE - y = \frac{x\partial x}{\partial y}, \quad AE = y + \frac{x\partial x}{\partial y};$$

$$KE = AE - y = \frac{x\partial x}{\partial y};$$

$$DE^2 = DK^2 + KE^2 = \frac{x^2(\partial x^2 + \partial y^2)}{\partial y^2}.$$

Also nach der Bedingung der Aufgabe

$$\frac{(\partial x^2 + \partial y^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial x \partial^2 y} : \frac{x(\partial x^2 + \partial y^2)^{\frac{1}{2}}}{\partial y} = 1 : n,$$

$$\frac{1}{2n}\log n\frac{p^2}{1+p^2}+\frac{1}{2n}\log n\, C=\frac{1}{2n}\log n\frac{x^{2n}}{1+p^2}.$$

$$x=\sqrt[2n]{\frac{p^2C}{1+p^2}},\ p=\frac{x^n}{\sqrt{C-x^{2n}}},$$

$$\partial y=\frac{x^n\partial x}{\sqrt{C-x^{2n}}},\ y=\int\frac{x^n\partial x}{\sqrt{C-x^{2n}}}$$

ich, für $C=c^{2n}$:

$$y=\int\frac{x^n\partial x}{\sqrt{c^{2n}-x^{2n}}}$$

nn noch eine willkührliche Conſtante beiz
ch wegen der doppelten Conſtante die Ma
eſer Curven ſehr groß wird. Bey der
lgemeinen dürfen wir hier nicht länger verr

ür $n=1$ erhält man

$$\partial y=\frac{x\partial x}{\sqrt{c^2-x^2}},$$

ifferentialgleichung des Kreiſes, wie aus de

$$x^2=y(2c-y)$$

abgeleitet wird.

ür $n=\frac{1}{2}$ wird

$$\frac{\partial x\,.\sqrt{x}}{}$$

$$\sin 2\varphi = \frac{2\sqrt{Cx - x^2}}{C}, \quad \cos 2\varphi = 1 - \frac{2x}{C};$$

$$y = \tfrac{1}{2}C.(2\varphi - \sin 2\varphi), \quad x = \tfrac{1}{2}C\,(1 - \cos 2\varphi),$$

welches die Gleichungen der Cycloide sind (16.). Also hat die Cycloide die Eigenschaft, daß die Krümmungshalbmesser von der Basis halbirt werden (Cycloide. XI.)

Für Curven, die gegen AB convex sind, könnte man den Krümmungshalbmesser sich auf die convexe Seite verlängert denken, wo er ebenfalls von der Axe geschnitten wird. Nur ist hier, weil der Krümmungshalbmesser immer als positiv angenommen wird, zu setzen:

$$r = -\frac{(\partial x^2 + \partial y^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial x \partial^2 y}.$$

Sonst erhält man ganz wie vorher:

$$\frac{x}{\partial y} = -\frac{n(\partial x^2 + \partial y^2)}{\partial x \partial^2 y},$$

$$\log x = -\frac{1}{2n}\log\frac{p^2}{1+p^2} + \text{Const},$$

oder, wenn man die Constanten durch $-\frac{1}{2n}\log C$ ausdrückt:

$$\log x = -\frac{1}{2n}\log\frac{p^2 C}{1+p^2}, \quad x = \left(\frac{p^2 C}{1+p^2}\right)^{-\frac{1}{2n}} = \sqrt[2n]{\frac{1+p^2}{p^2 C}}$$

Beide Fälle kann man in die Formel

$$x = \left(\frac{p^2 C}{1+p^2}\right)^{\pm\frac{1}{2n}}$$

zusammenfassen. Aus der für diesen Fall gefundenen Gleichung erhält man ferner:

$$\partial y = \frac{\partial x}{\sqrt{Cx^{2n} - 1}},$$

oder für $C = c^{2n}$:

$$y = \int \frac{\partial x}{\sqrt{c^{2n}x^{2n} - 1}}.$$

Für $n = \frac{1}{2}$ ist also $y = \frac{\partial x}{\sqrt{Cx - 1}}$;

woraus durch Integration:

$$y = 2\sqrt{\frac{x}{C} - \frac{1}{C^2}}, \quad y^2 = \frac{4}{C}\left(x - \frac{1}{C}\right),$$

ngsparameter gleich sind. Die Abscissen
genommen, und die Entfernung des Sc
dem vierten Theile des Parameters gleich.
Die hier aufgelöste Aufgabe mag zugleich
den oben angegebenen allgemeinern Beg
rien dienen.

22. Soll nun in Bezug auf den ersten F
veränderlich angenommen, also

$$\partial y = \frac{x^n \partial x}{\sqrt{a^{2n} - x^{2n}}}$$

ist wird, die orthogonale Trajectoria gefun
it man (17.)

$$p = \frac{x^n}{\sqrt{a^{2n} - x^{2n}}},$$

us man, verglichen mit (20.) leicht erhält

$$= \frac{1}{a^n},\ X = \frac{1}{x^n};\ M = \frac{X^2}{\sqrt{X^2 - A^2}} = \frac{a^n}{x^n \sqrt{a^{2n} -}}$$

$$\frac{\partial p}{\partial a} \partial x = -\, a^{2n-1} x^n \,(a^{2n} - x^{2n})^{-\frac{1}{2}} \,.\, \partial x,$$

wenn man Dies in eine Reihe nach Pot
ckelt:

$$\frac{\partial p}{\partial a} \partial x = (\mathfrak{A} x^n + \mathfrak{B} x^{3n} + \mathfrak{C} x^{5n} + \ldots)\, \partial x$$

$$= \int \frac{\partial p}{\partial a} \partial x = \mathfrak{A}' x^{n+1} + \mathfrak{B}' x^{3n+1} + \mathfrak{C}' x^{5n+1}$$

ist. Die Aufgabe ist also wieder auf die Integration einer Differentialgleichung des ersten Grades gebracht, und daher als aufgelöset anzusehen.

Für die gegen AB (Fig. 10.) convexen Curven ist

$$\partial y = \frac{\partial x}{\sqrt{a^{2n}x^{2n}-1}};$$

$$p = \frac{1}{\sqrt{a^{2n}x^{2n}-1}},\quad A = 1,\quad X = a^n x^n;$$

$$M = \frac{X^2}{\sqrt{X^2-A^2}} = \frac{a^{2n}x^{2n}}{\sqrt{a^{2n}x^{2n}-1}};$$

$$\frac{\partial p}{\partial a}\partial x = -\,nx^{2n}a^{2n-1}\,(a^{2n}x^{2n}-1)^{-\frac{3}{2}}.\,\partial x$$

$$= -\,nx^{2n}a^{2n-1}\,(-1+a^{2n}x^{2n})^{-\frac{3}{2}}.\,\partial x$$

Entwickelt man dies in eine Reihe; so überzeugt man sich ganz wie vorher, daß $\int M\partial x = \text{Const}$, d. i.

$$\int \frac{a^{2n}x^{2n}\partial x}{\sqrt{a^{2n}x^{2n}-1}} = C.$$

Johann Bernoulli giebt folgende, von seinem Sohne Nicolas Bernoulli Act. Erud. 1718. p. 253. ohne Analysis mitgetheilte Construction für den ersten Fall. AB′, AB″, AB‴, u. s. f. (Fig. 11.) seyen die gegebenen Curven. Für die successiven Werthe von α beschreibe man die Curven Ab′, Ab″, Ab‴, u. s. f., deren Gleichung

$$y = \frac{a^n}{x^n\sqrt{a^{2n}-x^{2n}}}$$

ist, so daß in Bezug auf die Werthe von α die Curven AB′, Ab′; AB″, Ab″; AB‴, Ab‴; u. s. f. einander entsprechen. Dann schneide man von den letztern Curven Segmente ab, deren Flächenraum der constanten Größe C gleich ist, durch die Linien DE, D′E′, D″E″, u. s. f.; so ist, wenn AD, AD′, AD″, u. s. f. durch x bezeichnet werden:

$$\int y\partial x = \int \frac{a^n\partial x}{x^n\sqrt{a^{2n}-x^{2n}}} = C.$$

(Quadratur 8.), wie erfordert wird. Verlängert man also ED, E′D′, E″D″, u. s. f., bis sie die gegebenen Curven in F, F′, F″, u. s. f. schneiden; so sind dies Punkte der Trajectoria, deren sich also eine *willkürliche* Anzahl finden

$$: \frac{}{a^2}\,(a^2 - x^2),\ p = -\frac{}{y},\ r - \qquad y\ .$$

$$1 - \frac{n^2 x}{y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial y}{y} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{\partial x}{x};$$

$$\log y = \frac{1}{n^2} \log x + \frac{1}{n^2} \log C;$$

$$n^2 \log y = \log Cx,\ y^{n^2} = Cx.$$

$y = k$ ſeyn für $x = h$; ſo erhält man al
rajectoria:

$$\frac{x}{h} = \left(\frac{y}{k}\right)^{n^2}$$

nt man an, daß die Erde aus lauter cor
einander ähnlichen Schichten beſtehe, die
hgewichte ſind; ſo beſtimmt dieſe Trajector
, nach welcher in jedem Punkte die Schi
er gegen das Innere der Erde hinabzieht.

Geſchichte.

25. **Huygens** hatte in ſeinem Traité
re. Leid. 1690. 4. die Idee vorgetrage
durch eine wellenförmige Bewegung eine
s fortgepflanzt werde, und daß, wenn
le das Auge berühre, der Punkt, von wel

Bernoulli, nach seiner eigenen Erzählung (Act. Erud. 1697. p. 211.), hierdurch auf das Problem der orthogonalen Trajectorien geleitet werden konnte. A. a. O. legt er dieses Problem zuerst öffentlich vor, jedoch nur für den Fall der logarithmischen Linien (11.), indem er zugleich für den Fall der Cycloiden eine Construction ohne Beweis mittheilt. Das vorgelegte Problem, nebst noch einigen andern (4 — 14.), löste Jac. Bernoulli in den Act. Erud. 1698. p. 230. auf, worauf Joh. Bernoulli in demselben Jahrgange p. 472. seine analytische Auflösung des Falls der logarithmischen Linien mittheilte, da Jac. Bernoulli nur eine Construction gegeben hatte. In diesem Aufsatze kommt das Wort Trajectoria zuerst vor, und rührt folglich auch von Joh. Bernoulli her, indem er p. 470. sagt: „Supersunt notanda quaedam circa lineas, quos vocabo Trajectorias." Zugleich erzählt er, daß er das Problem schon am 2ten Septbr. 1694 an Leibnitz geschrieben, und für die von seinem Bruder aufgelöseten Fälle Auflösungen gegeben habe. Auch dehnt er hier das Problem auf Trajectorien mit willkührlichem Durchschnittswinkel aus, und bemerkt, daß auch Leibnitz schon damals in einem Briefe an ihn tief in das Problem eingedrungen sey. Seit dem Jahre 1698, wo dieser Aufsatz von Joh. Bernoulli erschien, ruhete die Aufgabe eine ziemliche Reihe von Jahren. Als man aber in dem langen Streite, welcher über das Prioritätsrecht der Erfindung der Differentialrechnung zwischen den Geometern Britanniens und des Festlandes geführt wurde, dahin gekommen war, die gegenseitigen Kräfte durch vorgelegte schwierige Aufgaben zu messen, eröffnete Leibnitz ein Jahr vor seinem Tode diesen merkwürdigen Problemenkrieg mit der Aufgabe der orthogonalen Trajectorien, indem er im Jahre 1715 den Engländern durch den Abbé Conti den oben (12.) behandelten Fall von den Hyperbeln vorlegen ließ, „eo fine ut ad pulsum Anglorum nonnihil tentandum illud illis proponeret." (Acta Erud. 1718 p. 251. Récueil de div. pièces sur la phil. etc. par Des Maizeaux. T. II. p. 11.) Newton erhielt, wie Fontelle in seiner *Lobschrift auf ihn* erzählt, das

nfalls mittheilt, ſie nur ein tentamen
nt. Joh. Bernoulli machte hierauf
nerklich, daß die Aufgabe zu leicht ſey, u
t Beweiſe die von ſeinem, damals noch
hne Nicolas (geb. 1695, geſt. 1726) ge
ng (12.) mit (Act. Erud. 1716. p. 2
Leibnitz den 31. Januar 1716 bat, da
ere Aufgabe vorſchlagen möchte. Joh.
ig ihm daher in einem Briefe vom 11. M
t (21. 22.) aufgelöſete Problem vor, w
Bedingung gemacht wurde, die Auflöſun
eine Differentialgleichung vom erſten Gr
en, welche mittelſt der Quadraturen einer
z ſey. Die Sache der Engländer überna
los. Transact. 1716. 1717. 1719.), vor
ig Montucla (T. III. p. 333.) urthei
s gegen ſie einwenden laſſe, und daß er d
noulli dagegen gemachten Bemerkungen
halte. Die übrigen hierher gehörenden A
t man alle in den Act. Erud.: einen
. Bernoulli (1718. p. 248.), worin ſei
ann Auflöſung (22.) ohne Beweis mitg
eſchichte des Problems kurz erzählt wird:

hat Euler sich die meisten Verdienste um das Problem erworben. Digressio de traj. tam orthogonalibus quam obliquangulis. N. Comm. Petrop. XVII. p. 205 — 248. Considerationes de traj. orthog. N. Comm. Petrop. XIV. Considerat. super traj. tam rectang. quam obliquan. N. Acta Petrop. 1782. P. 2. Auch eine Abhandlung von Trembley in den Mém. de Berlin. 1797., und zwei Aufsätze von Palmquist in den Schwed. Akad. Abhandl. 1748. S. 17. S. 81., so wie von Nicole in den Mém. de Paris. 1715. 1725. Anwendungen der Trajectorien auf das Zeichnen der Landcharten s. m. in Lamberts Beiträgen. III. §. 65. Euler de repraesentatione superficiei sphaericae super plano. Comm. Petrop. 1777. P. I. p. 107. Eine Abhandlung von Lagrange in den Mém. de Berlin. 1779. Nach Mayer (Prakt. Geom. IV. S. 445.) sind die Formeln praktisch nicht brauchbar.

Trajectoria, reciproke, oder gegenseitige, heißt jede über einer gegebenen Axe AB (Fig. 12.) beschriebene Curve CDE, welche so beschaffen ist, daß sie, wenn man sie sich in entgegengesetzter Lage wie cDe denkt, und längs der Axe AB mit sich selbst parallel bewegt, die Linie CDE immer unter ein und demselben gegebenen Winkel durchschneidet.

1. Sey D′ ein willkührlicher Punkt in der Linie CE, durch D′ die Linie B′D′ parallel mit der Axe, und auf der andern Seite in gleicher Entfernung von der Axe, ebenfalls parallel mit ihr, die Linie B″D″ gezogen. Da die beiden Curven CDE, cDe auf beiden Seiten der Axe auf gleiche Art liegen; so ist offenbar der Winkel CDB = cDB, CDc = 2. CDB, und CD″B″ = cd″B′. Weil aber die Curve cDe parallel mit sich selbst längs der Axe bewegt werden, und die Linie CDE immer unter demselben Winkel schneiden soll; so ist c′D′B′ = cd″B′ = CD″B″, CD′c′ = CDc. Also CDc = CD′B′ + c′D′B′ = CD′B′ + CD″B″. Hierdurch wird die Aufgabe, reciproke Trajectorien zu finden, auf folgende Aufgabe zurückgeführt. Ueber einer gegebenen Axe AB eine Curve CDE von solcher Be-

...y ... auf AB ſenkrechte Lini
der Anfang der Abſciſſen, BB′ = x, B′I
x′, B″D″ = y′. Alſo (Berührende Lini

$$\text{tang } CD'B' = \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{1}{p}, \quad \text{tang } CD''B'' = \frac{\partial x'}{\partial y'} =$$

AB die Ordinatenaxe iſt. Da nun, we
c ſetzen, immer CD′B′ + CD″B″ = 2c
netrie. 33.) immer

$$\text{tang } 2c = \frac{p + p'}{pp' - 1}.$$

ch der Bedingung der Aufgabe iſt aber imm
wird y′ aus y, und folglich auch p′ oder
halten, wenn man — x ſtatt x ſetzt. S
= φx, ſo iſt $\frac{1}{p'} = \varphi(-x)$, und folglich

$$\text{g } 2c = \frac{\varphi x + \varphi(-x)}{1 - \varphi x \,.\, \varphi(-x)}, \quad \varphi(-x) = \frac{\text{tang } 2c}{1 + \text{tang}}$$

Form der Function φx muß alſo ſo beſtir
it ſie dieſer Gleichung genügt. Zu dem Ei
= tang ψx, worauf man leicht fällt, n
ax auch φ(—x) als Tangente, alſo in g
sform mit φx, ausgedrückt wird, indem

$$\varphi(-x) = \frac{\text{tang } 2c - \text{tang } \psi x}{\quad} - \text{tang}(\psi$$

$\varphi(-x)$ oder tang $(2c - \psi x)$ aus φx oder tang ψx
ten wird, wenn man $-x$ ſtatt x ſetzt, ſey

$$\psi x = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots,$$
$$2c - \psi x = 2c - A - Bx - Cx^2 - Dx^3 - \ldots$$

ber $2c - \psi x$ aus ψx erhalten werden ſoll, wenn man ſtatt x ſetzt; ſo muß auch ſeyn

$$2c - \psi x = A - Bx + Cx^2 - Dx^3 + \ldots$$

us ſich die Gleichung

$$2c - A - Bx - Cx^2 - Dx^3 - \ldots$$
$$= A - Bx + Cx^2 - Dx^3 + \ldots$$
$$c = A + Cx^2 + Ex^4 + Gx^6 + \ldots$$

bt. Alſo

$$A = o,\ C = o,\ E = o,\ G = o, \ldots$$

folglich

$$\psi x = c + (B + Dx^2 + Fx^4 + Hx^6 + \ldots)\,x$$

$\psi x = c + Px$, wo P überhaupt eine Function von
, welche ſich nicht ändert, wenn man $-x$ ſtatt x ſetzt.

$$\varphi x = \text{tang}\,(c + Px),$$

jede Function P von x, welche ſich nicht ändert, wenn
$-x$ für x ſetzt. Um nun die Differentialgleichung
reciproken Trajectorien zu finden, iſt

$$p = \frac{1}{\varphi x} = \cot(c + Px) = \frac{1 - \text{tang } c \,.\, \text{tang } Px}{\text{tang } c + \text{tang } Px}$$

$$\frac{\cos c - \sin c.\ \text{tang } Px}{\sin c + \cos c.\ \text{tang } Px} = \frac{\cos c^2 - \sin c \cos c.\ \text{tang } Px}{\sin c.\ \cos c + \cos c^2.\ \text{tang } Px}$$

$$= \frac{1 + \cos 2c - \sin 2c.\ \text{tang } Px}{\sin 2c + (1 + \cos 2c)\ \text{tang } Px}.$$

o, wenn man $\frac{1 + \cos 2c}{\sin 2c} = E$ ſetzt:

$$= \frac{\cos 2c\,(1 + E.\ \text{tg } Px) + 1 - \sin 2c.\ \text{tg } Px - \cos 2c.\ E.\ \text{tg } Px}{\sin 2c\,(1 + E\ \text{tg } Px)}$$

$$= \frac{\cos 2c}{\sin 2c} + \frac{1}{\sin 2c}\left\{\frac{1 - E\ \text{tang } Px}{1 + E\ \text{tang } Px}\right\}$$

nun P ſich nicht ändert, wenn man $-x$ für x ſetzt, ſo
nach dieſer Subſtitution $E\ \text{tang } Px = -E\ \text{tang } Px$,
daß alſo $-E\ \text{tang } Px$ überhaupt eine Function iſt,
che für $x = -x$ in ihr Entgegengeſetztes über-
t. Eine ſolche Function läßt ſich aber überhaupt durch
darſtellen, wenn X irgend *eine Function* bedeutet,

ieſe ſchon von Euler gefundene Gleich
oix im Traité du calc. diff. et int. T
it Hülfe der équations aux différences
er in den Zuſätzen zu dieſem Werke das A
n wird.

3. Für $X = o$ erhält man leicht, wenn
nte $= C' = C \tang c$ ſetzt:

$$x = y \tang c - C',$$

Gleichung der geraden Linie, welche alſo,
as auch von ſelbſt verſteht, auch zu den r
torien gehört.

4. Für $X = x^{2n}$ erhält man eben ſo le

$$y = x \cot 2c - \frac{1}{\sin 2c} \left\{ x + 2 \int \frac{\partial x}{x^{2n+1}} \right.$$

5. Durch eine ſchickliche Veränderung
ſyſtems iſt die allgemeine Gleichung einer
ig. Nimmt man nämlich $b''b'$ (Fig. 13.
einen Winkel $ABb' = 2c$ einſchließt, al
ſen an, und bezeichnet die Coordinaten in
es Syſtem durch x', y'; ſo iſt, wenn wir
der rechten Seite von AB als poſitiv ann

$$BB' = x = Bb' \cdot \cos (2c - 90°) = x' \sin$$

function von x' bedeutet, welche sich nicht ändert, man — x' für x' setzt. Also

$$\partial x' \cos 2c = \partial x' \sin 2c \cot 2c + \frac{\partial x' \sin 2c}{\sin 2c} \left\{\frac{1 + X'x'}{1 - X'x'}\right\},$$

wenn man wieder x, y statt x', y' schreibt:

$$\partial y = \left\{\frac{1 + Xx}{1 - Xx}\right\} \partial x.$$

ach dem Obigen p' aus p erhalten wird, wenn man für x setzt; so ist

$$p = \frac{1 + Xx}{1 - Xx}, \quad p' = \frac{1 - Xx}{1 + Xx},$$

is augenblicklich folgt:

$$pp' = 1,$$

nerkwürdige, schon von Joh. Bernoulli (Act. . 1722. p. 398.) auf anderm Wege gefundene Glei- , wobei nur zu bemerken, daß dies Alles in Bezug is zweite Coordinatensystem gilt.

. Xx sey = u, wo u überhaupt eine Function von welche für x = — x in — u übergeht; so ist die)ung der reciproken Trajectorien:

$$\partial y = \frac{1 + u}{1 - u} \partial x.$$

eri Opuscula varii argumenti. III. p. 57.

. Ist P eine Function, welche für x = — x ihren h behält, Q dagegen eine solche, welche nach dieser itution ins Entgegengesetzte übergeht; so sind $\frac{P}{Q}$, $\frac{Q}{P}$, unctionen von der Form wie u. Dies giebt folgende Gleichungen der reciproken Trajectorien:

$$= \frac{Q + P}{Q - P} \partial x, \quad \partial y = \frac{P + Q}{P - Q} \partial x, \quad \partial y = \frac{1 + PQ}{1 - PQ} \partial x.$$

. Daher kann man auch ganz allgemein setzen:

$$\partial y = \frac{\varphi x \cdot \partial x}{\varphi(-x)}.$$

l sey

$$\varphi x = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$$
$$\varphi(-x) = A - Bx + Cx^2 - Dx^3 + \ldots$$
$$\varphi x = (A + Cx^2 + Ex^4 + \ldots) + (Bx + Dx^3 + Fx^5 + \ldots)$$
$$= P + Q,$$

$$\varphi(x) = (A + Cx^2 + Ex^4 + \ldots) - (Bx + Dx^3 + Fx^5 + \ldots) = P - Q.$$

ich

$$\partial y = \frac{\varphi x \cdot \partial x}{\varphi(-x)} = \frac{P+Q}{P-Q}\,\partial x,$$

seyn muß (7.).

Alſo auch für jedes n:

$$\partial y = \left(\frac{1+u}{1-u}\right)^n \cdot \partial x.$$

0. Nach (8.) ſind alſo z. B.

$$\partial y = \frac{a-x}{a+x}\partial x, \quad \partial y = \frac{a^2 - bx + x^2}{a^2 + bx + x^2}\,\partial x,$$

$$= \frac{a^3 - b^2x + cx^2 - x^3}{a^3 + b^2x + cx^2 + x^3}\,\partial x, \quad \partial y = \frac{\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}}\partial x,$$

$$\frac{\sqrt{a-x}\cdot\sqrt{a^2-bx+x^2}}{\sqrt{a+x}\cdot\sqrt{a^2+bx+x^2}}\,\partial x, \quad \partial y = \frac{(a-x)^p + (b-x)^q}{(a+x)^p + (b+x)^q}$$

rentialgleichungen reciproker Trajectorien. All
iele giebt Joh. Bernoulli a. a. O. pp. 398
ntegrirt man die erſte Formel; ſo erhält man

$$y = 2a\log n\,(a+x) - x + \text{Const.}$$

$$P+Q+1=\frac{1}{P-Q}+1=\frac{1+P-Q}{P-Q},$$

und folglich

$$\frac{P+Q-1}{P+Q+1}=\frac{1-P+Q}{1+P-Q}.$$

Wegen der Natur der Functionen P und Q wird nun, wenn $-x$ für x gesetzt wird:

$$\frac{P+Q-1}{P+Q+1}=\frac{P-Q-1}{P-Q+1}=-\frac{1-P+Q}{1+P-Q},$$

so daß also $\frac{P+Q-1}{P+Q+1}$ eine Function von x ist, welche für $x=-x$ ins Entgegengesetzte übergeht, und folglich $=u$ gesetzt werden kann. Also

$$\partial y=\frac{1+u}{1-u}\,\partial x,$$

wie es für die reciproken Trajectorien seyn muß (6.).

12. Joh. Bernoulli lehrt a. a. O. p. 403. eine sehr elegante Construction reciproker Trajectorien, wenn der gegebene Winkel ein rechter ist. Man beschreibe in Bezug auf rechtwinklige Coordinaten eine willkührliche Curve FF′ (Fig. 14.), welche auf beiden Seiten von AB auf völlig gleiche Art liegt, nehme $FD=F'D$, $FE=FD$, $F'E'=F'D$; so sind E, E′ Punkte der gesuchten Trajectoria, deren man also eine willkührliche Anzahl finden kann. Um dies zu beweisen sey $FK=F'K'=y'$, $EK=y$, $BK=-BK'=x$; so ist (Rectification. 3.) $FD=F'D'=\int\sqrt{\partial x^2+\partial y'^2}$. Da die Curve FF′ aber auf beiden Seiten von AB auf einerlei Art liegt; so ist y' eine Function von x, welche für $x=-x$ ihren Werth nicht ändert, und kann also $=X$ gesetzt werden, so daß nach der Construction $FE=F'E'=\int\sqrt{\partial x^2+\partial X^2}$. Aber $EK=FK+FE$, $E'K'=FK-FE$. Also, da die Wurzel, und folglich das Integral positiv und negativ genommen werden kann, für beide Fälle:

$$y=X+\int\sqrt{\partial x^2+\partial X^2},\ \frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial X}{\partial x}+\sqrt{1+\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2}$$

Nach dem Obigen kann man setzen:

$$X=A+Bx^2+Cx^4+Dx^6+\ldots$$

:aus augenblicklich folgt:

$$pp' = 1,$$

aß alſo die beſchriebene Curve eine recipro
11.), deren Gleichung und Differentialgl

$$\partial y = \partial x + r\partial x^2 + \partial x^2,\ y = x + \int r$$

der Coordinatenwinkel $= 90^0$ angenom
ſo iſt auch $2c = 90^0$ (5.).

Iſt die erzeugende Curve eine algebraiſch
algebraiſch rectificiren läßt; ſo iſt klar, d
Trajectoria auch eine algebraiſche Linie iſt.

13. Iſt die erzeugende Curve ein Kreis
t $MN = LK = \frac{1}{2} r\pi$, wenn r den Halb
ſes bezeichnet. Alſo nach der Natur des

$$x = y' = r^2 - x^2,$$

ius ſich leicht nach (12.) ergiebt:

$$r^2 - x^2 + \int \frac{r\partial x}{r^2 - x^2} = r^2 - x^2 + r \int \frac{\partial}{r}$$

$$= r^2 - x^2 - r, \text{Arc cos } \frac{x}{r} + C$$

tegralformel 49.).

Setzt man nun KII — —

man an dieſem Orte die Coordinaten nur ſo verändert, daß der Scheitel der Cycloide als Anfang, und ihre Axe als Axe der Abſciſſen angenommen wird.)

14. Hat man für einen Winkel DBb′ (Fig. 16.) eine reciproke Trajectoria CE beſchrieben, ſo läßt ſich auch leicht für jeden andern Winkel dBb′ eine beſchreiben. Man ziehe nur die Linien Bd, b′d′, b″d″, u. ſ. f. einander parallel, nehme Bd = BD, b′d′ = b′D′, b″d″ = b″D″, u. ſ. f., und beſchreibe durch die Punkte d, d′, d″, u. ſ. f. die Curve ce, welche die geſuchte ſeyn wird. Denn es bleibt, wie man auch die Ordinaten neigen mag, nach dieſer Conſtruction offenbar immer $y = \int \frac{1+n}{1-n}\partial x$. Da man nun für einen rechten Winkel reciproke Trajectorien beſchreiben kann; ſo kann man es auch für jeden andern.

15. Joh. Bernoulli hat auch folgenden merkwürdigen Satz (A. a. O. p. 406.) gefunden. Wenn CE (Fig. 17.) eine reciproke Trajectoria, für den Winkel 2c iſt, und man nimmt DG = CD, D′G′ = CD′, D″G″ = CD″, u. ſ. f. und beſchreibt die Curve CE′; ſo iſt dieſe eine reciproke Trajectoria für den Winkel c. Man ſetze, um dies zu beweiſen, BF′ = x, F′D′ = y; BF′ = x′, F′G′ = y′, und halbire den Winkel ABF′ durch BK. Nun iſt, wie ſich leicht aus (Rectification. 3.) ergiebt, wenn man die Formel für ſchiefwinklige Coordinaten einrichtet:

$$CD' = \int \sqrt{\partial x^2 + 2\partial x\partial y \cos 2c + \partial y^2},$$
$$y' = y + \int \sqrt{\partial x^2 + 2\partial x\partial y \cos 2c + \partial y^2},$$
$$\partial y' = \partial y + \sqrt{\partial x^2 + 2\partial x\partial y \cos 2c + \partial y^2}.$$

Nimmt man aber BK als Abſciſſenaxe an; ſo erhellet augenblicklich, daß für BH = x″, HG′ = y″:

$$x = \tfrac{1}{2}x'' \sec c,\ y' = y'' + x,$$
$$\frac{\partial y''}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x} - 1 + \sqrt{1 + 2\cos 2c\,\frac{\partial y}{\partial x} + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2},$$
$$\frac{2\partial y''}{\sec c\,.\,\partial x''} = p - 1 + \sqrt{1 + 2p\cos 2c + p^2}.$$

Bezeichnen wir nun $\frac{\partial y''}{\partial x''}$ durch q, und ſeinen Werth für x″ = − x″ durch q′; ſo iſt, weil für x″ = → x″ auch x = − ½ x″ sec c = − x wird:

: $n = 1$ erhält man ulso

$$\frac{r\partial x}{\partial y\sqrt{r^2-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}, \quad \frac{r\partial x}{x} = \partial y,$$

$$y = C + \log n\, x,$$

t $r = a$, $C = c - a \log n\, b$:

$$y = c + a \log n \frac{x}{b}$$

Thl. III. S. 710. Für $n = 2$ iſt

$$2 \text{ Arc tang } \frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}} = \text{Arc tang } \frac{2x\sqrt{r^2-}}{r^2-}$$

$$\frac{r\partial x}{\partial y\sqrt{r^2-x^2}} = \frac{2x\sqrt{r^2-x^2}}{r^2-2x^2},$$

$$y = c + \tfrac{1}{2} r \int \frac{(r^2-2x^2)\,\partial x}{x(r^2-x^2)}.$$

ꝛnliche Art für andere Werthe von n.

B. Joh. Bernoulli und vorzüglich E
hr viel mit der Auffindung algebraiſcher
:torien beſchäftigt. Eine Zuſammenſtellu
:nen Methoden würde eine weitläufige Abh
:n. Ich begnüge mich daher hier nur die
Eulers in den Opusc. varii argume
:. mitzutheilen, welche, wenn auch gera
neinſte, deshalb beſonders merkwürdig zu
[illegible] einer Integration bedarf, welc

ntet, von welcher x so abhängt, daß x in —x über-
ht, für t = — t, also

$$x = At + Bt^3 + Ct^5 + Dt^7 + \ldots,$$
$$\partial x = (A + 3Bt^2 + 5Ct^4 + 7Dt^6 + \ldots)\,\partial t,$$

nd folglich v eine Function von t ist, welche für t = — t
ren Werth nicht ändert. u hat immer die Bedeutung (6.).

Daß beides Gleichungen reciproker Trajectorien sind,
lgt leicht aus (11.). Denn in Bezug auf die erste ist

$$p = (\sqrt{1+u^2} + u)^n,\quad p' = (\sqrt{1+u^2} - u)^n,$$
$$pp' = |(\sqrt{1+u^2} + u)(\sqrt{1+u^2} - u)|^n = 1.$$

in Bezug auf die zweite ist

$$p = \left(\frac{1+u}{1-u}\right)^n,\quad p' = \left(\frac{1-u}{1+u}\right)^n,$$
$$pp' = \left\{\frac{(1+u)(1-u)}{(1-u)(1+u)}\right\}^n = 1.$$

ben so könnte man zeigen, daß

$$\partial y = (\sqrt{1+u^2} + u)^n \,.\, v\partial t$$

ne Gleichung reciproker Trajectorien ist.

Euler lehrt nun die Erfindung algebraischer Trajecto-
en aus den vier Formeln

$$\partial y = \frac{1+u}{1-u}\,\partial x,\quad \partial y = \left(\frac{1+u}{1-u}\right)^n \,.\, \partial x,$$

$$\partial y = (\sqrt{1+u^2}+u)^n \,.\, \partial x,\quad \partial y = \left(\frac{1+u}{1-u}\right)^n \,.\, v\partial t$$

uf folgende Art, woraus sich eben so viele allgemeine Re-
eln ergeben.

20. Da u negativ wird für x = — x, so entspricht
em Werthe — u von u offenbar auch der Werth — x
on x, und x ist folglich eine ungerade Function von u.
Man muß nun untersuchen, was für eine ungerade Fun-
tion x von u ist, damit $\frac{1+u}{1-u}\,\partial x$ integrabel, und zugleich
y algebraisch durch u ausgedrückt wird. Nach Thl. II.
S. 783. ist

$$y = \frac{1+u}{1-u}\,x - 2\int \frac{x\partial u}{(1-u)^2},$$

so daß also bloß noch $\int \frac{x\partial u}{(1-u)^2}$ algebraisch integrabel ge-
macht zu werden braucht. Zu dem Ende setzt Euler,

irgend eine gerade, q irgend eine ungerade
u bedeutet:

$$2\int\frac{x\partial u}{(1-u)^2} = \frac{(p+q)(1+u)}{1-u},$$

durch Differentation

$$2x = (1-u^2)\frac{\partial p}{\partial u} + (1-u^2)\frac{\partial q}{\partial u} + 2(p+q)$$

u. Nimmt man nun alle geraden und alle u
ctionen von u zuſammen; ſo erhält ma

$$x - (1-u^2)\frac{\partial p}{\partial u} - 2q = (1-u^2)\frac{\partial q}{\partial u} + 2p,$$

m Allgemeinen für jedes u nur dann ſtatt
enn für ſich:

$$x - (1-u^2)\frac{\partial p}{\partial u} - 2q = 0,\quad (1-u^2)\frac{\partial q}{\partial u} + 2p =$$

$$= -\frac{(1-u^2)\partial q}{2\partial u},\quad x = \frac{(1-u^2)\partial p}{2\partial u} + q.$$

die obige allgemeine Gleichung ſubſtituirt, g

$$y = \frac{(\partial p + \partial q)(1+u)^2}{2\partial u},$$

$$x = \tfrac{1}{2}u - \tfrac{1}{2}u^2, \quad y = \tfrac{1}{2}(1+u)^2;$$

woraus $u = \sqrt[3]{2y} - 1$, $x = -y + \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{4y^2} - 1$.

Die Größe $-y + \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{4y^2}$ wird $= 0$ für $y = 0$ und $y = \tfrac{27}{2}$.

Rechnet man nun die Abscissen von einem Punkte an, welcher um eine der Einheit gleiche Größe vom primitiven Anfangspunkte weiter nach der positiven Seite hin liegt; so wird obige Gleichung

$$x = \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{4y^2} - y,$$

und die Ordinatenaxe wird von der Curve zwei Mal, für $y = 0$ und $y = \tfrac{27}{2}$, geschnitten. In (Fig. 20.) ist die Curve für einen Durchschnittswinkel $= 90^0$ verzeichnet. Verwechselt man die Ordinaten mit den Abscissen; so wird die Gleichung

$$y = \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{4x^2} - x, \quad x + y = \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{4x^2}.$$

halbirt man den rechten Winkel GAD durch AH, und setzt $AF = x'$, $FC = y'$; so ist, wegen $FE = AE = x$, $AB = y$:

$$y' = x + y, \quad x'^2 = 2x^2,$$

woraus leicht folgt: $y'^3 = \tfrac{27}{4}x'^2$.

Also ist diese reciproke Trajectoria eine Parabola cubicalis secunda (Thl. III. S. 725.), deren Parameter $= \tfrac{27}{4}$. Joh. Bernoulli nennt sie (Act. Erud. 1725. p. 319.) Parabolam cubicalem secundam semirectam, weil die Abscissen mit den Ordinaten einen halben rechten Winkel einschließen. Sie ist ihm Trajectoria reciproca, quae inter omnes algebraicas possibiles est simplicissima.

21. Aus der zweiten Formel in (19.) erhält man nach der Reductionsformel (Thl. II. S. 783.) wie vorher

$$y = \left(\frac{1+u}{1-u}\right)^n \cdot x - 2n \int \frac{x\partial u}{1-u^2}\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^n.$$

Euler setzt $\int \frac{x\partial u}{1-u^2}\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^n = (p+q)\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^n$,

woraus durch Differentiation:

$$x = (1-u^2)\frac{\partial p}{\partial u} + (1-u^2)\frac{\partial q}{\partial u} + 2n(p+q),$$

$$y = \frac{}{(1-u)^{n-1}} \cdot \partial u$$

giebt die

Zweite Regel. Sey q irgend eine u
von u; ſo nehme man für irgend ein n:

$$p = -\frac{(1-u^2)\partial q}{2n\partial u}.$$

in iſt

$$= 2nq + \frac{(1-u^2)\partial p}{\partial u}, \quad y = \frac{(\partial p + \partial q)(1+}{(1-u)^{n-1}}$$

Durch Elimination von u erhält man e
chen x und y.

Für $q = 2nu^\lambda$, wo λ irgend eine unge
lt man:

$$= u^{\lambda-2}\{-\lambda(\lambda-1) + 2(\lambda^2 + 2n^2)u^2 -$$

$$= -\lambda u^{\lambda-2}\{\lambda - 1 - 2nu - (\lambda+1)u^2\}$$

22. Es erhellet aber leicht, daß man
proken Trajectoria die Coordinaten ſich in
niß verändern laſſen kann. Denn iſt $\frac{\partial y}{\partial x}$

$$y = \lambda u^{\lambda-2} \left| \frac{\lambda-1}{2} - nu - \frac{\lambda+1}{2} u^2 \right| \cdot \frac{(1+u)^{n+1}}{(1-u)^{n-1}}.$$

23. Für $q = 2nu^2 (1-u^2)^m$ erhält man, wenn man beide Coordinaten entgegengesetzt nimmt:

$$x = u^{\lambda-2} (1-u^2)^m \left\{ \begin{array}{l} \lambda(\lambda-1) - 2(2n^2+\lambda^2+2m\lambda+m) u^2 \\ +(2m+\lambda)(2m+\lambda+1) u^4 \end{array} \right\}$$

$$y = \left(\frac{1+u}{1-u}\right)^n \cdot u^{\lambda-2} (1-u^2)^m$$

$$\times \left| \begin{array}{l} \lambda(\lambda-1) - 2n\lambda u - 2(\lambda^2+2m\lambda+m) u^2 \\ +2n(2m+\lambda) u^3 + (2m+\lambda)(2m+\lambda+1) u^4 \end{array} \right|$$

woraus für $\lambda = 1$ und $m = -1$:

$$x = -\frac{4(n^2-1)u}{1-u^2}, \quad y = -\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^n \cdot \frac{2(n-2u+nu^2)}{1-u^2},$$

oder, wenn man beide Coordinaten mit $\frac{-a}{2(n^2-1)}$ multiplicirt:

$$x = \frac{2au}{1-u^2}, \quad y = \left(\frac{1+u}{1-u}\right)^n \cdot \frac{a(n-2u+nu^2)}{(n^2-1)(1-u^2)}.$$

Bestimmt man aus der ersten dieser Gleichungen u, und setzt es in die zweite; so erhält man

$$y = \frac{(n\sqrt{a^2+x^2}-x)(\sqrt{a^2+x^2}+x)^n}{(n^2-1)a^n}.$$

24. Die merkwürdigen Formeln, welche Euler a. a. O. S. 81. ohne Beweis giebt, lassen sich auf folgende Art allgemein beweisen. Man setze:

$$(\sqrt{a^2+x^2}+x)^n = P + Q\sqrt{a^2+x^2};$$

so erhält man durch Differentiation:

$$n(\sqrt{a^2+x^2}+x)^n \partial x = (a^2+x^2)\partial Q + Qx\partial x + \partial P \cdot \sqrt{a^2+x^2}$$
$$= nP\partial x + nQ\partial x \cdot \sqrt{a^2+x^2}$$

für jedes x. Also kann man setzen:

$$(a^2+x^2)\partial Q + Qx\partial x = nP\partial x, \quad \partial P = nQ\partial x,$$

oder:
$$(a^2+x^2)\frac{\partial Q}{\partial x} + Qx = nP, \quad \frac{\partial P}{\partial x} = nQ.$$

Soll nun $(\sqrt{a^2+x^2}+x)^n$ in zwei Theile getheilt werden, daß der eine Theil bloß gerade, der andere bloß ungerade Potenzen enthalte; so setze man:

$$P = A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6 + \ldots$$
$$Q = A'x + B'x^3 + C'x^5 + D'x^7 + \ldots$$

Also vermöge obiger beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{rrrrr} A' & + 3a^2B'x^2 & + 5a^2C'x^4 & + 7a^2D'x^6 & + \ldots \\ + & A'x^2 & + 3B'x^4 & + 5C'x^6 & + \ldots \\ + & A'x^2 & + B'x^4 & + C'x^6 & + \ldots \\ A + & nBx^2 & + nCx^4 & + nDx^6 & + \ldots \end{array}\right\} =$$

$$2Bx + 4Cx^3 + 6Dx^5 + 8Ex^7 + \ldots$$
$$= nA'x + nB'x^3 + nC'x^5 + nD'x^7 + \ldots$$

der zweiten erhält man:

$2B = nA';$	$B = \frac{1}{2}nA';$
$4C = nB';$	$C = \frac{1}{4}nB';$
$6D = nC';$	$D = \frac{1}{6}nC';$
$8E = nD';$	$E = \frac{1}{8}nD';$
u. ſ. w.	u. ſ. w.

erſte giebt: $a^2A' = nA,$

$$3a^2B' = nB - 2A' = \frac{(n^2 - 4)A'}{2},$$

$$5a^2C' = nC - 4B' = \frac{(n^2 - 16)B'}{4},$$

$$7a^2D' = nD - 6C' = \frac{(n^2 - 36)C'}{6},$$

u. ſ. f. u. ſ. f.

$P = A$, $Q = o$, $(\sqrt{a^2 + x^2} + x)^n = a^n$. Also $A = a^n$; und folglich

$$(\sqrt{a^2 + x^2} + x)^n =$$
$$a^n + \frac{n^2}{2} a^{n-2} x^2 + \frac{n^2(n^2-4)}{2.3.4} a^{n-4} x^4$$
$$+ \frac{n^2(n^2-4)(n^2-16)}{2.3.4.5.6} a^{n-6} x^6 + \ldots$$
$$+ \left\{ \begin{array}{l} na^{n-2} x + \frac{n(n^2-4)}{2.3} a^{n-4} x^3 \\ + \frac{n(n^2-4)(n^2-16)}{2.3.4.5} a^{n-6} x^5 + \ldots \end{array} \right\} \sqrt{a^2 + x^2}.$$

Dies giebt nach (23.):

$$(n^2-1) a^n y = (nP - Qx)\sqrt{a^2 + x^2} + nQ(a^2 + x^2) - Px$$
$$= \left\{ \begin{array}{l} na^n + \frac{n(n^2-2)}{2} a^{n-2} x^2 + \frac{n(n^2-4)(n^2-4)}{2.3.4} a^{n-4} x^4 \\ + \frac{n(n^2-6)(n^2-4)(n^2-16)}{2.3.4.5.6} a^{n-6} x^6 + \ldots \end{array} \right\} \sqrt{a^2 + x^2}$$
$$+ (n^2-1) a^n x + \frac{n^2(n^2-1)}{2.3} a^{n-2} x^3 + \frac{n^2(n^2-1)(n^2-4)}{2.3.4.5} a^{n-4} x^5$$
$$+ \frac{n^2(n^2-1)(n^2-4)(n^2-16)}{2.3.4.5.6.7} a^{n-6} x^7 + \ldots$$

eine sehr allgemeine Gleichung reciproker Trajectorien, welche sich, wenn n eine gerade Zahl ist, jederzeit auf einen endlichen Ausdruck reducirt.

Für $n = 2$ erhält man

$$3a^2 y - 3a^2 x - 2x^3 = (2a^2 + 2x^2)\sqrt{a^2 + x^2},$$

woraus durch Quadrirung erhalten wird:

$$4a^4 - 9a^2 y^2 + 18a^2 xy + 3a^2 x^2 + 12x^3 y = o,$$

oder für $a^2 = \alpha\beta$:

$$4\alpha^2\beta^2 - 9\alpha\beta y^2 + 18\alpha\beta xy + 3\alpha\beta x^2 + 12yx^3 = o,$$

wie auch schon Joh. Bernoulli (Act. Erud. Suppl. T. IX. p. 277.) gefunden hat. Er nennt diese reciproke Trajectoria omnium algebraicarum post primam simplicissimam.

25. Für

$$P = Ax + Bx^3 + Cx^5 + Dx^7 + \ldots$$
$$Q = A' + B'x^2 + C'x^4 + D'x^6 + \ldots$$

erhält man mittelst derselben zwei Differentialgleichungen ganz wie vorher:

1) $a^n y = n a^{n+1} + \frac{\quad}{2} \quad 2.3.4$

$$+ \frac{n(n^2-1)(n^2-1)(n^2-9)}{2.3.4.5.6} a^{n-}$$

$^2-1)a^{n-1}x + \frac{(n^2-3)(n^2-1)}{2.3} a^{n-3}x^3$

$$\frac{(n^2-5)(n^2-1)(n^2-9)}{2.3.4.5} a^{n-5}x^5$$

$$\frac{(n^2-7)(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{2.3.4.5.6.7} a^{n-7}x^7 + \ldots\ldots$$

26. Iſt n ein Bruch $= \frac{n}{m}$; ſo giebt die

) leicht:

$$y^m = \frac{(n\sqrt{1+x^2} - mx)^m . (\sqrt{1+x^2} + x)^n . m}{(n^2 - m^2)^m}$$

n zugleich $a = 1$ geſetzt wird.

Für $m = 1$ giebt Euler S. 75. eine

)uction gefundene, von der Irrational

ichung, nebſt ſieben ſpeciellen Fällen, wor

)andlung ſelbſt nachſehen muß.

27. Aus der dritten Formel in (19.) erh

$$y = x(\sqrt{1+u^2} + u)^n - \int x\partial . (\sqrt{1+u^2}$$

$$= x(\sqrt{1+u^2} + u)^n - n\int \frac{x(\sqrt{1+u^2}+$$

$$\int x(\sqrt{1+u^2}+u)^n . \partial u$$

so ist offenbar auch $\frac{x}{\sqrt{1+u^2}}$ eine ungerade, und eben so $\frac{p}{\sqrt{1+u^2}}$ eine gerade, $\frac{q}{\sqrt{1+u^2}}$ dagegen eine ungerade. Nimmt man daher die geraden und ungeraden Functionen zusammen; so erhält man

$$\frac{x}{\sqrt{1+u^2}} - \frac{\partial p}{\partial u} - \frac{nq}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{\partial q}{\partial u} + \frac{np}{\sqrt{1+u^2}}.$$

Also wie oben:

$$\frac{x}{\sqrt{1+u^2}} - \frac{\partial p}{\partial u} - \frac{nq}{\sqrt{1+u^2}} = 0,$$

$$\frac{\partial q}{\partial u} + \frac{np}{\sqrt{1+u^2}} = 0.$$

Hieraus erhält man:

$$p = -\frac{\partial q\sqrt{1+u^2}}{n\partial u}, \quad x = nq + \frac{\partial p\sqrt{1+u^2}}{\partial u},$$

$$y = \frac{(\partial p + \partial q)\sqrt{1+u^2}}{\partial u}(\sqrt{1+u^2}+u)^n$$

und hieraus entspringt die

Dritte Regel. Man nehme irgend eine ungerade Function q von u, setze $p = -\frac{\partial q\sqrt{1+u^2}}{n\partial u}$, und bestimme x, y nach den obigen Formeln; so giebt die Elimination von u aus diesen beiden Gleichungen eine Gleichung zwischen x und y.

Bestimmt man aus der ersten Formel $\frac{\partial p}{\partial u}$, und eliminirt p aus den Formeln für x und y; so erhält man:

$$x = nq - \frac{u\partial q}{n\partial u} - \frac{(1+u^2)\partial^2 q}{n\partial u^2},$$

$$y = \left\{\frac{\partial q\sqrt{1+u^2}}{\partial u} - \frac{u\partial q}{n\partial u} - \frac{\partial^2 q(1+u^2)}{n\partial u^2}\right\}(\sqrt{1+u^2}+u)^n$$

woraus, wenn λ eine ungerade Zahl bezeichnet, für $q = u^\lambda$:

$$x = \frac{n^2-\lambda^2}{n}u^\lambda - \frac{\lambda(\lambda-1)}{n}u^{\lambda-2},$$

$$y = -\frac{\lambda u^{\lambda-2}}{n}(\lambda-1-nu\sqrt{1+u^2}+\lambda u^2)(\sqrt{1+u^2}+u)^n$$

oder (22.)

$$x = (n^2-\lambda^2)u^\lambda - \lambda(\lambda-1)u^{\lambda-2},$$

$$y = -\lambda u^{\lambda-2}(\lambda-1-nu\sqrt{1+u^2}+\lambda u^2)(\sqrt{1+u^2}+u)^n.$$

man in den beiden erſtern Formeln λ =
de Coordinaten negativ, und dividirt ſie
ſo erhält man:

$$x = u^{n-2},$$

$$y = u^{n-2}(n - 1 - nu\sqrt{1+u^2} + nu^2)(\sqrt{1+u^2} + u)$$

ir $n = 3$, wenn man $(\sqrt{1+x^2} + x)$
bickelt, und das Wurzelzeichen wegſchafft:

$$4y^2 - 12x^2y - 8x^4y = 4x^3 + 3x^4.$$

ſn der vierten Formel in (19.) iſt v eine
von t, u eine ungerade Function von t, al
erade Function, v aber natürlich auch eine
von u. Euler ſetzt $v = 1 - u^2$, n

$$= (1-u^2)\partial t, \quad \partial y = \left(\frac{1+u}{1-u}\right)v\partial t = (1+u)^2$$

$$= t - \int u^2\partial t, \quad y = t + 2\int u\partial t + \int u^2\partial t.$$

ſen $u\partial t$ und $u^2\partial t$ algebraiſch integrabe

$$\int u\partial t = ut - \int t\partial u.$$

n nun, wenn p immer eine gerade Funct

von u berechne man x, y aus obigen Gleichungen, und minire aus denſelben u.

Für $q = u^2$, wo λ ungerade, erhält man:

$$x = \lambda(\lambda-1)u^{\lambda-2} - (\lambda-1)(\lambda-2)u^{\lambda},$$

$$y = \lambda(\lambda-1)u^{\lambda-2} + 2\lambda(\lambda-2)u^{\lambda-1} + (\lambda-1)(\lambda-2)u^{\lambda},$$

raus

$$\frac{x}{y} = \frac{\lambda(\lambda-1) - (\lambda-1)(\lambda-2)u^2}{\lambda(\lambda-1)(1+u)^2 - 2\lambda(1+u)u + 2u^2}.$$

ltiplicirt man über Kreuz, ſo ergiebt ſich in Bezug auf ine quadratiſche Gleichung, aus der man erhält:

$$u = \frac{-\lambda(\lambda-2)x \pm \sqrt{\lambda(\lambda-2)[(\lambda-1)^2y^2 - x^2]}}{(\lambda-1)(\lambda-2)(x+y)},$$

ches, in

$$x + y = 2\lambda\{\lambda - 1 + (\lambda-2)u\}u^{\lambda-2}$$

gt, eine Gleichung zwiſchen x und y giebt, aus der u inirt iſt.

Geſchichte.

9. Das Problem von den reciproken Trajectorien ward in ug auf einen Durchſchnittswinkel, der ein rechter iſt, von colas Bernoulli, dem Sohne Johanns, zuerſt Jahre 1721 in den Act. Erud. Suppl. T. VII. p. 352. gelegt, wobei Nic. Bernoulli zugleich anzeigte, daß Vater ſchon die Auflöſung gefunden habe. Mit der- en beſchäftigte ſich vorzüglich Joh. Bernoulli und ungenannter Engländer, von welchem man jedoch hher erfuhr, daß es der Dr. Pemberton geweſen. h. Bernoulli trug durch die Eleganz, Allgemeinheit Einfachheit ſeiner Auflöſungen den Sieg davon. Bey ſer Gelegenheit kam auch die Frage von der von Joh. rnoulli zuerſt ſo genannten Pantagonia zur Sprache, che von dem anonymo Britanno in den Philos. Trans- . 1722. aufgelöſet worden war. M. ſ. auch Act. Erud. ppl. T. VIII. p. 235. p. 253. Joh. Bernoulli ſeine Auflöſung Act. Erud. Suppl. T. IX. 1729. p. ., ein Aufſatz, welcher in *mancher Rückſicht* merkwür-

intereſſant iſt. Er zieht darin ſehr gegen d
os, indem er z. B. gleich zu Anfange ſagt:
s quamplurimi sunt, qui immani odio
flagrant in exterorum virtutes et m
uß annehmen, daß er durch die vielen Zä
gländer, beſonders mit ſeinem, nunmehr
Freunde Leibnitz ſehr gereitzt war. Die
es anonymi Britanni tadelt er ſehr. Abe
iſt auch das Urtheil über den nachher ſo berü
n Leonhard Euler am Ende dieſes A
.): „felicissimi ingenii iuvenis, a cu
te et acumine maxima quaeque nobis
r, postquam vidimus, quanta ille fa
ertia in adyta sublimioris geometriae
cio penetravit.“ Euler, der damals no
s Schüler war, hatte nämlich eine Meth
aus jeder Ordnung, die zweite ausgen
iproke algebraiſche Trajectoria zu finden,
Act. Erud. 1726. p. 363. ankündigte,
e ſelbſt Act. Erud. 1727. p. 408 — 41
indem die Frage von den algebraiſchen re

ationen, welche nicht zu den algebraiſchen gehö-
ztere ſind die vier Rechnungsarten, die Potenzer-
nd Wurzelausziehung. Transcendente Opera-
d diejenigen, wo zu einer Zahl der Logarithmus
ekehrt, zu einem Bogen in rein arithmetiſchem
ne trigonometriſche Function, oder umgekehrt ge-
d. Transcendente Functionen und Gleichungen
t, welche transcendente Operationen involviren,
ente Curven ſolche, welche durch transcendente
zen beſtimmt werden. E. G. Fiſcher (Unter-
; über den eigentlichen Sinn der höheren
s. Berlin. 1808. S. 82.) giebt den weſentlichen
d zwiſchen beiden Arten von Operationen, wie es
it, recht gut, auf folgende Art an. Was durch
braiſche Rechnung gefunden wird, ergiebt ſich ent-
rch eine einzige Operation, obgleich dieſe in gewiſ-
n unendlich ſeyn kann, wie z. B. bei Wurzelaus-
t, ja ſelbſt bei Diviſionen, die nicht aufgehen,
h eine beſtimmte endliche Anzahl ſolcher Operatio-
das durch eine transcendente Operation beſtimmt
nur durch unendlich vielmalige Wiederholung be-
algebraiſcher Rechnungsoperationen gefunden
die man nicht als bloße Theile einer einzigen Ope-
wie bey den Wurzelausziehungen betrachten kann.
B. der Logarithmus einer Zahl geſucht werden; ſo
dies offenbar durch lauter algebraiſche Rechnungs-
ber offenbar durch eine unendlich vielmalige An-
derſelben, welches ſich in den unendlichen Reihen,
transcendente Functionen immer dargeſtellt wer-
er unendlichen Gliederzahl angedeutet findet. Da-
auch bey dieſen Größen Tafeln, wo man das ein
al berechnet findet, was man in jedem einzelnen
ch eine deſto größere Menge von Operationen ſuchen
genauer man das Reſultat haben wollte, unentbehr-
dürfniß. Differentiationen und Integrationen kön-
lgebraiſche ſowohl, als auf transcendente Functio-
en, und ſind daher nach dieſen Anſichten, wie es mir
eigentlich wohl als gemiſchte Operationen zu be-
. Hat man algebraiſche Functionen z. B. zu diffe-

ſo gelangt man offenbar durch eine endlich
perationen zum Differential. Bey der
ranscendenter Functionen möchte indeß ſch
ng der Differenz in eine Reihe nach po
enzen des Increments, welche eigentlich i
n muß, und in dieſem Falle immer une
eine unendlich oft wiederholte Anwendun
n ſeyn. Und ſollte auch vielleicht in dieſe
h einige Unbeſtimmtheit zurückbleiben; ſo
den Gebrauch des Wortes treffen, nic
, da das mathematiſch Transcendentale v
fähig iſt, wogegen die neuern Philoſ
r das transcendent nennen, was nicht zu
hkeit gebracht werden kann. Die transce
nen ſind von den Mathematikern eifrig
n. Die Logarithmen, Exponentialgröſſe
metriſchen Functionen vorzüglich von E
nnte Integral-Logarithmus $\int \frac{\partial x}{lx}$ von M
otationes ad calculum integralem Eu
(Théorie et tables d'une nouvelle fon

Transposition, ist die Umsetzung der Glieder einer Gleichung auf die andere Seite des Gleichheitszeichens mit entgegengesetzten Vorzeichen. S. Gleichung. (20.)

Transsinuosa, ist bei Vieta (Opp. p. 323.) die Sekante. Jetzt ist der Ausdruck gar nicht mehr gebräuchlich.

Transversa diameter, heißt bei Apollonius (Conica. ed. Barrow. I. Des. 13.) jede gerade Linie, welche alle unter einander parallele Sehnen eines Kegelschnitts halbirt. Axis transversus, latus transversum bedeutet die Hauptaxe der Ellipse und Hyperbel. S. Latus.

Transversale, ist 1. jede der schiefen geraden Linien, welche auf dem verjüngten Maaßstabe und ältern Winkel messenden Instrumenten gebraucht werden, um kleinere aliquote Theile einer geraden Linie oder eines Bogens anzugeben. Tycho de Brahe hat das Verfahren, als er 1553 zu Leipzig studirte, bey dem verjüngten Maaßstabe von Johann Hommel gelernt, und es nachher auf astronomische Instrumente zum Winkelmessen angewandt. Kästners G. d. M. I. S. 643. II. S. 355. 381. III. S. 355. Astron. Abh. II. 5. Abh. 17. §. 161.;

2) jede gerade Linie oder Curve, welche auf irgend eine Art ein System anderer Linien, Ebenen oder krummen Flächen durchschneidet. Auch Ebenen, welche auf irgend eine Art ein solches System durchschneiden, können Transversalen genannt werden. Mit diesen geometrischen Transversalen haben wir es hier allein zu thun. Ihre Theorie ist nach Carnots Vorgange (Théorie des Transversales. Uebers. in Carnots Geom. d. Stellung. A. d. F. v. Schumacher. II. Altona. 1810. S. 322.) von den neuern, vorzüglich französischen, Mathematikern viel bearbeitet worden. In deutschen Lehrbüchern kommt wenig darüber vor. M. s. jedoch Crelle Lehrb. d. Elem. d. Geometrie. Berl. 1826. 27. I. S. 174—185.

) gelangt man offenbar durch eine endliche An=
erationen zum Differential. Bey der Diffe=
anscendenter Functionen möchte indeß ſchon die
g der Differenz in eine Reihe nach poſitiven
nzen des Increments, welche eigentlich immer
muß, und in dieſem Falle immer unendlich
ine unendlich oft wiederholte Anwendung von
ſeyn. Und ſollte auch vielleicht in dieſer Be=
einige Unbeſtimmtheit zurückbleiben; ſo würde
den Gebrauch des Wortes treffen, nicht die
da das mathematiſch Transcendentale völliger
fähig iſt, wogegen die neuern Philoſophen
das transcendent nennen, was nicht zu völli=
keit gebracht werden kann. Die transcenden=
en ſind von den Mathematikern eifrig unter=
. Die Logarithmen, Exponentialgrößen und
etriſchen Functionen vorzüglich von Euler.
nte Integral-Logarithmus $\int \frac{\partial x}{lx}$ von Maſche=
otationes ad calculum integralem Euleri)
Théorie et tables d'une nouvelle fonction

Transposition, ist die Umsetzung der Glieder einer Gleichung auf die andere Seite des Gleichheitszeichens mit entgegengesetzten Vorzeichen. S. Gleichung. (20.)

Transsinuosa, ist bei Vieta (Opp. p. 323.) die Secante. Jetzt ist der Ausdruck gar nicht mehr gebräuchlich.

Transversa diameter, heißt bei Apollonius (Conica. ed. Barrow. I. Des. 13.) jede gerade Linie, welche alle unter einander parallele Sehnen eines Kegelschnitts halbirt. Axis transversus, latus transversum bedeutet die Hauptaxe der Ellipse und Hyperbel. S. Latus.

Transversale, ist 1. jede der schiefen geraden Linien, welche auf dem verjüngten Maaßstabe und ältern Winkel messenden Instrumenten gebraucht werden, um kleinere aliquote Theile einer geraden Linie oder eines Bogens anzugeben. Tycho de Brahe hat das Verfahren, als er 1553 zu Leipzig studirte, bey dem verjüngten Maaßstabe von Johann Hommel gelernt, und es nachher auf astronomische Instrumente zum Winkelmessen angewandt. Kästners G. d. M. I. S. 643. II. S. 355. 381. III. S. 355. Astron. Abh. II. 5. Abh. 17. §. 161.;

2) jede gerade Linie oder Curve, welche auf irgend eine Art ein System anderer Linien, Ebenen oder krummen Flächen durchschneidet. Auch Ebenen, welche auf irgend eine Art ein solches System durchschneiden, können Transversalen genannt werden. Mit diesen geometrischen Transversalen haben wir es hier allein zu thun. Ihre Theorie ist nach Carnots Vorgange (Théorie des Transversales. Uebers. in Carnots Geom. d. Stellung. A. d. F. v. Schumacher. II. Altona. 1810. S. 322.) von den neuern, vorzüglich französischen, Mathematikern viel bearbeitet worden. In deutschen Lehrbüchern kommt wenig darüber vor. M. s. jedoch Crelle Lehrb. d. Elem. d. Geometrie. Berl. 1826. 27. I. S. 174—185.

nn Lehrb. d. Geometrie. Danzig. 1827.
t.

nn die drey Seiten eines Dreyecks AA_1A
ngerungen von einer beliebigen Transver
erden; ſo entſtehen in der Richtung jeder
nente von der Beſchaffenheit, daß das P
ihnen, die keinen gemeinſchaftlichen En
ner dem Producte der drey andern gleich

A (Fig. 21.) ziehe man mit der Gegenſ
k; ſo erhellet leicht, daß

$$\frac{Aa}{A_1a} = \frac{Ak}{A_1a_1}, \quad \frac{A_2a_2}{Aa_2} = \frac{A_2a_1}{Ak};$$

$$\frac{Aa}{A_1a} \cdot \frac{A_2a_2}{Aa_2} = \frac{Ak}{A_1a_1} \cdot \frac{A_2a_1}{Ak} = \frac{A_2a_1}{A_1a_1};$$

$$Aa \cdot A_1a_1 \cdot A_2a_2 = Aa_2 \cdot A_1a \cdot A_2a_1.$$

nsverſale einer Seite parallel (Fig. 22.)

$$A_1a_1 \cdot A_2a_2 = Aa_2 \cdot A_2a_1.$$

$= A_1a = \infty$; alſo ebenfalls

$$Aa \cdot A_1a_1 \cdot A_2a_2 = Aa_2 \cdot A_1a \cdot A_2a_1.$$

nn drey Punkte a, a_1, a_2 auf den drei

Also liegen die Punkte α, a Beide $\left\{\begin{matrix}\text{links}\\\text{rechts}\end{matrix}\right\}$ von $\left\{\begin{matrix}A\\A_1\end{matrix}\right\}$, weil, wenn dies nicht der Fall wäre, für $Aa \gtrless A_1a_1$, $A\alpha \lesssim A_1\alpha$ seyn würde, welches obiger Proportion widerspricht. Aus dieser Proportion folgt nun:

$$A\alpha : Aa = A_1\alpha - A\alpha : A_1a - Aa,$$

oder $$A\alpha : Aa = A\alpha - A_1\alpha : Aa - A_1a,$$

d. i. $$A\alpha : Aa = AA_1 : AA_1,$$

und folglich $A\alpha = Aa$. Also fällt α mit a zusammen, da α, a Beide $\left\{\begin{matrix}\text{links}\\\text{rechts}\end{matrix}\right\}$ von $\left\{\begin{matrix}A\\A_1\end{matrix}\right\}$ fallen, und a, a_1, a_2 liegen folglich in einer geraden Linie.

3. Der Satz in (1.) gilt für jedes ebene Vieleck.

Das Vieleck sey $AA_1A_2 \ldots A_{n-1}A_n$. Man ziehe die Diagonalen AA_2, AA_3, AA_4, $\ldots AA_{n-1}$, und bezeichne die Durchschnittspunkte der Transversale mit den Seiten und den Diagonalen nach der Reihe durch a, a_1, a_2, $\ldots a_{n-1}$, a_n, und (a_2), (a_3), (a_4), $\ldots (a_{n-1})$; so ist in den einzelnen Dreyecken, in welche das Vieleck durch die Diagonalen getheilt wird, nach (1.):

$$Aa \cdot A_1a_1 \cdot A_2(a_2) = A(a_2) \cdot A_1a \cdot A_2a_1,$$
$$A(a_2) \cdot A_2a_2 \cdot A_3(a_3) = A(a_3) \cdot A_2(a_2) \cdot A_3a_2,$$
$$A(a_3) \cdot A_3a_3 \cdot A_4(a_4) = A(a_4) \cdot A_3(a_3) \cdot A_4a_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A(a_{n-2}) \cdot A_{n-2}a_{n-2} \cdot A_{n-1}(a_{n-1}) = A(a_{n-1}) \cdot A_{n-2}(a_{n-2}) \cdot A_{n-1}a_{n-2},$$
$$A(a_{n-1}) \cdot A_{n-1}a_{n-1} \cdot A_na_n = Aa_n \cdot A_{n-1}(a_{n-1}) \cdot A_na_{n-1}.$$

Multiplicirt man nun auf beiden Seiten, und hebt auf; so erhält man:

$$Aa \cdot A_1a_1 \cdot A_2a_2 \cdot A_3a_3 \cdots A_na_n$$
$$= Aa_n \cdot A_1a \cdot A_2a_1 \cdot A_3a_2 \cdots A_na_{n-1}.$$

4. Wird ein nicht in einer Ebene liegendes Vieleck von einer Transversalebene geschnitten; so gilt der ganze vorhergehende Beweis noch, wenn man die Durchschnittslinien der Transversalebene mit den Ebenen der einzelnen Dreyecke, in welche das Vieleck durch die Diagonalen getheilt worden, als einzelne Transversalen dieser Dreiecke betrachtet.

5. Sey jetzt

$Ax^n + By^n + C + Z = o$

ung einer algebraischen Curve, wo A,
Größen sind, Z aber das Aggregat aller
welche die veränderlichen Größen in ei
imension als der nten enthalten. Für
o gehe Z respective in Y und X über, so
$By^n + C + Y = o$, $Ax^n + C + X = o$.
Gleichung enthält nur y, die letztere
andelt sie leicht in:

$$y^n + \frac{C}{B} + \frac{Y}{B} = o, \quad x^n + \frac{C}{A} + \frac{X}{A} = o.$$

zeln der ersten sind alle Werthe von y, fü
die der letztern alle Werthe von x, fü
Bezeichnet man die absoluten Werthe d
dieser Werthe von y und x duech (y) u
die constanten Theile $\frac{C}{B}$, $\frac{C}{A}$ die Produc
setzt genommenen Wurzeln der beiden G
Gleichung. 151.), wenn wir die absoluten
B durch (A) und (B) bezeichnen:

$$(y) : (x) = \frac{C}{(B)} : \frac{C}{(A)} = (A) : (B).$$

durch A_2 die Parallele mn mit AA_1 gezogen; ſo iſt nach dem Vorhergehenden (5.):

$$Aa_2 \cdot Aa_2 : A_2a_2 \cdot A_2a_2 = Aa \cdot Aa : A_2n \cdot A_2m,$$
$$A_2a_1 \cdot A_2\alpha_1 : A_1a_1 \cdot A_1\alpha_1 = A_2n \cdot A_2m : A_1a \cdot A_1\alpha.$$

Alſo durch Zuſammenſetzung:

$$Aa_2 \cdot Aa_2 \cdot A_2a_1 \cdot A_2\alpha_1 : A_1a_1 \cdot A_1\alpha_1 \cdot A_2a_2 \cdot A_2\alpha_2$$
$$= Aa \cdot Aa : A_1a \cdot A_1\alpha,$$
$$Aa \cdot Aa \cdot A_1a_1 \cdot A_1\alpha_1 \cdot A_2a_2 \cdot A_2\alpha_2$$
$$= Aa_2 \cdot Aa_2 \cdot A_1a \cdot A_1\alpha \cdot A_2a_1 \cdot A_2\alpha_1.$$

Folglich gilt der Satz in (1.) auch für jede Transverſale, welche ein Kegelſchnitt iſt.

Iſt der Kegelſchnitt ein Kreis; ſo kann der Satz mittelſt Elem. III. 35. 36. leicht elementariſch bewieſen werden.

7. Für ein entweder in einer oder nicht in einer Ebene liegendes Vieleck gilt dieſelbe Gleichung, wenn alle Seiten des Vielecks im erſten Falle von einem Kegelſchnitte, im andern von einer krummen Fläche des zweiten Grades geſchnitten werden.

Das Vieleck ſey $AA_1 A_2 \ldots A_{n-1} A_n$. Man zerlege es durch die Diagonalen AA_2, AA_3, AA_4, $\ldots AA_{n-1}$ in Dreyecke, und bezeichne die Durchſchnittspunkte des Kegelſchnitts oder der krummen Fläche mit den Seiten und Diagonalen durch a, α; a_1, α_1; a_2, α_2; $\ldots a_{n-1}$, α_{n-1}; a_n, α_n; und b_2, β_2; b_3, β_3; b_4, β_4; $\ldots b_{n-1}$, β_{n-1}; ſo iſt, da der Durchſchnitt jeder Ebene mit einer Fläche der zweiten Ordnung ein Kegelſchnitt iſt (Krumme Fläche. 16.), in den einzelnen von den Diagonalen gebildeten Dreyecken nach (6.):

$$Aa \cdot Aa \cdot A_1a_1 \cdot A_1\alpha_1 \cdot A_2b_2 \cdot A_2\beta_2$$
$$= Ab_2 \cdot A\beta_2 \cdot A_1a \cdot A_1\alpha \cdot A_2a_1 \cdot A_2\alpha_1$$
$$Ab_2 \cdot A\beta_2 \cdot A_2a_2 \cdot A_2\alpha_2 \cdot A_3b_3 \cdot A_3\beta_3$$
$$= Ab_3 \cdot A\beta_3 \cdot A_2b_2 \cdot A_2\beta_2 \cdot A_3a_2 \cdot A_3\alpha_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$Ab_{n-1} \cdot A\beta_{n-1} \cdot A_{n-1}a_{n-1} \cdot A_{n-1}\alpha_{n-1} \cdot A_na_n \cdot A_n\alpha_n$$
$$= Aa_n \cdot Aa_n \cdot A_{n-1}b_{n-1} \cdot A_{n-1}\beta_{n-1} \cdot A_na_{n-1} \cdot A_n\alpha_{n-1}$$

Multiplicirt man nun auf beiden Seiten, und hebt auf; ſo erhält man:

$A_1a_1 \cdot A_1\alpha_1 \cdot A_2a_2 \cdot A_2\alpha_2 \cdot \ldots \cdot A_na_n \cdot A_n$
$\cdot A\alpha_n \cdot A_1a \cdot A_1\alpha \cdot A_2a_1 \cdot A_2\alpha_1 \cdot \ldots A_na_{n-1} \cdot$

unſer Satz alſo auch für alle von Kegelſc
mmen Flächen der zweiten Ordnung durchſch
gilt.

Der Satz gilt auch für ſphäriſche Drey- und
nn die Transverſale ein Bogen eines größte
und man nur ſtatt aller oben betrachteten Li
der entſprechenden Bögen ſetzt.

achtet man nämlich die Dreyecke in Fig. 2
, und die Transverſale als einen Bogen
Kreiſes; ſo iſt (Trigonometrie. [25.])

$\sin A_2a_2 : \sin A_2a_1 = \sin A_2a_1a_2 : \sin A_2a_2a_1,$
$\sin Aa : \sin Aa_2 = \sin A_2a_2a_1 : \sin Aaa_2,$
$\sin A_1a_1 : \sin A_1a = \sin Aaa_2 : \sin A_2a_1a_2,$

durch Zuſammenſetzung der Proportionen
wird:

$\cdot \sin A_1a_1 \cdot \sin A_2a_2 = \sin Aa_2 \cdot \sin A_1a \cdot \sin A$

tz gilt alſo für das ſphäriſche Dreyeck. D
a auf das ſphäriſche Vieleck läßt ſich wie ob

indem man eine Seite nach der andern als Transversale betrachtet. Folglich, wenn man die erste dieser vier Gleichungen mit jeder der drei folgenden multiplicirt:

$$A_3A_4 \cdot A_1A_2 \cdot A_2A_5 \cdot AA_1 = A_1A_5 \cdot AA_3 \cdot A_1A_4 \cdot A_2A_3,$$
$$AA_5 \cdot A_3A_4 \cdot A_2A_5 \cdot A_1A_4 = A_1A_5 \cdot A_2A_4 \cdot AA_4 \cdot A_3A_5,$$
$$AA_5 \cdot A_1A_2 \cdot AA_4 \cdot A_5A_3 = A_2A_4 \cdot AA_5 \cdot A_2A_5 \cdot AA_1.$$

11. In ein in einer oder nicht in einer Ebene liegendes Vieleck $AA_1A_2 \ldots A_n$ sey ein Kegelschnitt oder eine Fläche des zweiten Grades beschrieben. Die Berührungspunkte seyen a, a_1, a_2, $\ldots a_n$, welche in diesem Falle mit den Punkten α, α_1, α_2, $\ldots \alpha_n$ (7.) zusammenfallen. Daher wird die dortige Gleichung:

$$Aa^2 \cdot A_1a_1^2 \cdot A_2a_2^2 \ldots Ana_n^2 = Aa_n^2 \cdot A_1a^2 \cdot A_2a_1^2 \ldots Ana_{n-1}^2,$$
$$Aa \cdot A_1a_1 \cdot A_2a_2 \ldots Ana_n = Aa_n \cdot A_1a \cdot A_2a_1 \ldots Ana_{n-1},$$

worin eine sehr merkwürdige, leicht in Worten auszudrückende, Eigenschaft der Linien und Flächen des zweiten Grades enthalten ist.

12. Werden die Seiten eines nicht in einer Ebene liegenden Vielecks (polygone gauche) von einer Transversalebene geschnitten, so daß dieselbe jedoch durch keinen Winkelpunkt des Vielecks hindurch geht; so ist die Anzahl der Seiten, welche selbst (nicht ihre Verlängerungen) von der Transversalebene geschnitten werden, immer eine gerade Zahl. Für das Dreieck ist der Satz offenbar, da augenscheinlich immer nur 0 oder 2 Seiten selbst von der Transversalebene geschnitten werden, vorausgesetzt, daß sie durch keine Spitze des Dreiecks geht, weil sonst alle drei Seiten geschnitten werden könnten (Fig. 25.). Der Satz gelte nun für jedes neck. Im $(n+1)$eck schneide man durch eine Diagonale ein Dreieck ab; so ist die Anzahl der von der Transversalebene selbst geschnittenen Seiten des necks also $= 2\gamma$. Liegt nun die Diagonale auf beiden Seiten der Transversalebene; so werden $2\gamma - 1$ Seiten des $(n+1)$ecks selbst von derselben geschnitten. Im Dreieck muß aber, da die Diagonale auch eine Seite desselben ist, noch eine, und zwar nur noch eine, Seite geschnitten werden, so daß also die Anzahl der von der Transversalebene selbst geschnittenen Seiten des $(n+1)$ecks $= 2\gamma - 1 + 1 = 2\gamma$ ist. Liegt die Diagonale auf einer Seite der Transversalebene; so

zahl der selbst geschnittenen Seiten des necks =
lich, da im Dreieck nur noch 0 oder 2 Seite
en werden müssen, die Anzahl der selbst gesc
ten des $(n+1)$ecks entweder $= 2\gamma + 0 =$
$2\gamma + 2$. Folglich gilt der Satz für das $(n +$
für das neck gilt, und ist demnach allgemei
s Dreieck gilt. Die Anzahl der in ihren V
geschnittenen Seiten ist folglich gerade od
jenachdem die Anzahl der Seiten des Viele
ungerade ist.

$AA_1A_2 \ldots\ldots A_n$, sey ein um eine Fläche des
des beschriebenes, nicht in einer Ebene lieg
Die Berührungspunkte seyen a, a_1, a_2,
er derselben falle mit einem Winkelpunkte
Wenn nun n Berührungspunkte a, a_1, a
einer Ebene liegen, und die Anzahl der in de
gen der Seiten liegenden Berührungspunc
ungerade ist, je nachdem $n+1$ gerade od
; so liegt auch a_n in derselben Ebene.

gerade $= 2\gamma$ (12.). Liegt nun α_n in der Seite AA_n selbst; so liegen 2γ der Punkte $a, a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ in den Verlängerungen der Seiten, und es muß folglich auch a_n in der Seite AA_n selbst liegen, weil sonst die Anzahl der in den Verlängerungen der Seiten liegenden Berührungspunkte $= 2\gamma + 1$, also, gegen die Voraussetzung, da $n+1$ gerade, ungerade wäre. Liegt aber α_n in der Verlängerung der Seite AA_n; so liegen $2\gamma - 1$ der Punkte $a, a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ in den Verlängerungen der Seiten, und es muß folglich auch a_n in der Verlängerung von AA_n liegen, weil sonst die Anzahl der in den Verlängerungen liegenden Berührungspunkte $= 2\gamma - 1$, also, gegen die Voraussetzung, wieder ungerade wäre. Auch erhellet leicht, daß im letztern Falle α_n und a_n in der Verlängerung von AA_n beide auf einer Seite von A oder A_n liegen müssen, weil, wenn z. B. a_n links von A, α_n rechts von A_n läge, offenbar $A_n a_n > Aa_n$, $A_n\alpha_n < A\alpha_n$ seyn würde, welches, wegen der Proportion $A_n\alpha_n : A\alpha_n = A_n a_n : Aa_n$ nicht möglich ist. Aus dieser Proportion folgt:

$$A_n\alpha_n \pm A\alpha_n : A\alpha_n = A_n a_n \pm Aa_n : Aa_n;$$

d. i. nach dem Vorhergehenden:

$$\pm AA_n : A\alpha_n = \pm AA_n : Aa_n,$$

und folglich $A\alpha_n = Aa_n$, so daß also die Punkte α_n und a_n zusammenfallen müssen, und demnach auch a_n in der durch $a, a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ gehenden Transversalebene liegt.

2) Ist $n+1$ ungerade; so ist die Anzahl der von der Transversalebene in ihren Verlängerungen geschnittenen Seiten ungerade (12.), $= 2\gamma + 1$. Liegt α_n in AA_n selbst; so liegen $2\gamma + 1$ der Punkte $a, a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ in den Verlängerungen der Seiten, so daß also auch a_n in der Seite AA_n selbst liegen muß, weil sonst die Anzahl der in den Verlängerungen der Seiten liegenden Berührungspunkte $2\gamma + 2$, also, gegen die Voraussetzung, da $n+1$ ungerade ist, gerade seyn würde. Liegt dagegen α_n in der Verlängerung der Seite AA_n; so liegen 2γ der Punkte $a, a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ in den Verlängerungen der Seiten, und es muß folglich auch a_n in der Verlängerung

en, weil ſonſt die Anzahl der in den Verlän-
Seiten liegenden Berührungspunkte $= 2\gamma$,
gegen die Vorausſetzung, gerade ſeyn würde.
llet, daß im letztern Falle α_n und a_n in der
g von AA_n beide auf einer Seite von A, oder
müſſen, weil, wenn z. B. $|\alpha_n$ links von A
ts von A_n läge, offenbar $A_n\alpha_n > A\alpha_n$,
ſeyn würde, welches, wegen der oben bewie-
tion $A_n\alpha_n : A\alpha_n = A_na_n : Aa_n$, nicht mög-
die Punkte α_n und a_n zuſammenfallen müſſen,
oben gezeigt.

alſo a_n immer in der durch $a, a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$
nsverſalebene, ſo daß alſo, unter obigen Vor-
, alle $n + 1$ Berührungspunkte in einer Ebe-
enn n in einer Ebene liegen, w. z. b. w.

gewiſſer Rückſicht gilt der Satz auch für den
wie es bei nicht in einer Ebene liegenden
hl der Fall ſeyn könnte, Winkelpunkte zu-
ungspunkte ſind, nur muß man jeden ſolchen

In jedem um eine Fläche des zweiten Grades beſchrie-enen, nicht in einer Ebene liegenden Viereck, liegen die ier Berührungspunkte in einer Ebene.

Dieſen merkwürdigen Satz hat Brianchon gefunden. l. ſ. deſſen Mémoire sur les lignes du second ordre. aris. 1817. p. 14. Den allgemeinen Satz (13. 14.) fin-t man ohne Beweis in Poncelet Traité des pro-riétés projectives des figures. Paris. 1822. p. 81., nem vortrefflichen, viele neue Ideen enthaltenden Werke, ich in Bezug auf die Transverſalen p. 76 — 98. Wei-re Nachricht davon gebe ich im Art. Viereck (16. ff.) Auch hört hierher: Brianchon Application de la théo-e des transversales. Paris. 1812.

16. Wenn aus D (Fig. 26.) in der Ebene eines Drei-ks ABC durch die drei Spitzen Transverſalen gezogen ſind, elche die Seiten in a, b, c ſchneiden; ſo iſt immer

Aa . Bb . Cc = Ac . Ba . Cb.

enkt man ſich nämlich die beiden Dreiecke ACa, BCa rch die Transverſalen Bc, Ab geſchnitten; ſo iſt nach (1.)

Ac . CD . Ba = AB . Cc . Da,
Cb . AB . Da = CD . Bb . Aa.

Multiplicirt man nun auf beiden Seiten in einander, und bt AB . CD . Da auf beiden Seiten auf; ſo erhält an die zu beweiſende Gleichung. Dieſer Satz iſt von oh. Bernoulli gefunden. Opp. T. IV. p. 33.

17. Haben umgekehrt die Punkte a, b, c auf den ei Seiten des Dreiecks ABC eine ſolche Lage, daß

Aa . Bb . Cc = Ac . Ba . Cb

t, und iſt die Anzahl der auf den Seiten des Dreiecks ſelbſt liegenden Punkte ungerade; ſo ſchneiden ſich die drei inien Ab, Bc, Ca in einem Punkte.

Nach der Vorausſetzung müſſen immer zwei der Punkte a, b, c entweder beide auf den Seiten des Dreiecks ſelbſt, der beide auf den Verlängerungen liegen. Dieſe beiden unkte ſeyen b, c, und D ſey der Durchſchnittspunkt der inien Ab, Bc. Die Linie CD ſchneide verlängert AB in ; ſo iſt nach der Vorausſetzung und nach (16.)

Cc = Ac . Ba . Cb, Aα . Bb . Cc = Ac . Bα

ch Division:

$\frac{Aa}{A\alpha} = \frac{Ba}{B\alpha}$, Aa : Ba = Aα : Bα.

Proportion leitet man ganz wie in (2.) ab
a, α zusammenfallen, und Ab, Bc, C
em Punkte schneiden.

ine unmittelbare Folge hieraus sind die
gen Sätze, daß 1) die drei von den Spit
s nach den Mittelpunkten der Gegenseiten
ei Höhenlinien sich immer in einem P

nlich in Bezug auf No. 1. Aa = Ba, Bb =
(Fig. 27.) ist; so ist Aa . Bb . Cc = Ac . B
offenbar a, b, c alle drei auf den Seiten
schneiden Ab, Bc, Ca sich in einem P
n Bezug auf No. 2. ist (Fig. 28.) △ A
△ BCc ∽ △ CAb, △ CAa ∽ △ ABc.

AB : Bb = BC : Ba,
BC : Cc = AC : Cb,

Viereck. Im Dreieck CDA sind von B nach den Spitzen die Linien BC, BD, BA gezogen. Also (16.)

$$Am \cdot CE \cdot DF = AF \cdot Cm \cdot DE.$$

Betrachtet man aber EF als Transversale dieses Dreiecks; so ist (1.):

$$AF \cdot Cn \cdot DE = An \cdot CE \cdot DF.$$

Durch Multiplication und Aufhebung ergiebt sich:

$$Am \cdot Cn = An \cdot Cm, \quad Cm : Cn = Am : An.$$

Für die andern Diagonalen wird der Beweis auf ganz ähnliche Art geführt.

Dieser Satz scheint schon den Alten bekannt gewesen zu seyn, wie aus des Pappus Collect. math. l. VII. p. 21. erhellet. Dann findet er sich in Gregorius a St. Vincentio. Opus geometricum. pag. 6. prop. 10. auch de la Hire (Section. conicae. p. 9. prop. 20.) und Schooten (Exercitationes math. l. II. Ap. prop. 5.) gebrauchen ihn bei der Auflösung von Aufgaben.

21. Wenn auf einer Linie AB (Fig. 30.) die Punkte a, b so genommen sind, daß $Aa : Ab = Ba : Bb$ ist, und man zieht von einem willkührlichen Punkte C die Linien CA, Ca, CB, Cb; so wird von diesen Linien jede Transversale A′B′ nach denselben Verhältnissen geschnitten, so daß $A'a' : A'b' = B'a' : B'b'$.

Denn es ist

$$Aa = \frac{AC \cdot \sin ACa}{\sin AaC}, \quad Ab = \frac{AC \cdot \sin ACb}{\sin AbC},$$

$$Ba = \frac{BC \cdot \sin BCa}{\sin BaC}, \quad Bb = \frac{BC \cdot \sin BCb}{\sin BbC}.$$

Hieraus ergiebt sich mittelst der Voraussetzung, und weil $\sin AaC = \sin BaC$, $\sin AbC = \sin BbC$ ist, leicht:

$$\sin ACa : \sin ACb = \sin BCa : \sin BCb,$$

$$\sin A'Ca' : \sin A'Cb' = \sin B'Ca' : \sin B'Cb'.$$

Folglich, wenn die beiden ersten Glieder mit A′C, die beiden letzten mit B′C multiplicirt, die Vorderglieder durch $\sin A'a'C = \sin B'a'C$, die Hinterglieder durch $\sin A'b'C = \sin B'b'C$ dividirt werden, nach ganz ähnlichen Formeln wie oben:

$$A'a' : A'b' = B'a' : B'b'.$$

lbe Satz gilt auch, wenn die Linien CA, Ca
der parallel ſind (Fig. 31.), wie augenblick
wenn man durch A′ und a′ Parallelen m

einfache Viereck ABCD (Fig. 32.) werde vo
ſale mq geſchnitten; ſo wird der Theil m
lcher zwiſchen den Diagonalen liegt, dur
ien, die man aus dem Durchſchnittspunk
n G nach den beiden Punkten E, F zieht,
gegenüberſtehenden Seiten des Vierecks ſchn
rtionale Segmente getheilt, ſo daß

$$mp : mq = np : nq.$$

dem vollſtändigen Viereck FBCGDAF iſt (20.)

$$DH : DE = CH : CE.$$

inie mn zwiſchen CG, DG, zwiſchen denen
: $mp : mq = np : nq$ (21.)

gerade Linie ſey der gemeinſchaftliche Durch-
er Ebenen, und zwiſchen zweien derſelben eine
gezogen. Wird nun dieſe Transverſale von
dern Ebenen in proportionale Segmente ge-
dies auch von jeder andern zwiſchen den erſten
enen Transverſale.

ojicire das ganze Syſtem orthographiſch auf

25. Wenn man von einem Punkte A (Fig. 34.) nach einer geraden Linie AB gerade Linien AB, AC, AD, u. ſ. f. in willkührlicher Anzahl, und dann eine beliebige Transverſale $\mathfrak{AB}$ zieht; ſo liegen die Durchſchnittspunkte b, c, d, e, u. ſ. f. der Diagonalen der Vierecke BC$\mathfrak{BC}$, CD$\mathfrak{CD}$, DE$\mathfrak{DE}$, u. ſ. f. mit dem Punkte A in einer geraden Linie.

Man betrachte das vollſtändige Viereck A$\mathfrak{C}$BbBG$\mathfrak{A}$, und ziehe Ab; ſo iſt

$$BA : B\alpha = \mathfrak{B}A : \mathfrak{B}\alpha \quad (20.)$$

Alſo (21.):

$$CA : C\beta = \mathfrak{C}A : \mathfrak{C}\beta,$$
$$DA : D\gamma = \mathfrak{D}A : \mathfrak{D}\gamma,$$
$$EA : E\delta = \mathfrak{E}A : \mathfrak{E}\delta,$$
u. ſ. f.

Man ſieht, daß dieſe Betrachtung nicht auf den Punkt b eingeſchränkt iſt, ſondern für alle übrigen Punkte c, d, e, u. ſ. f. eben ſo gilt, ſo daß alſo die Linien B$\mathfrak{B}$, C$\mathfrak{C}$, D$\mathfrak{D}$, E$\mathfrak{E}$, u. ſ. f. von den Linien Ab, Ac, Ad, Ae u. ſ. f. immer ſo geſchnitten werden, daß

$$BA : B\alpha = \mathfrak{B}A : \mathfrak{B}\alpha,$$
$$CA : C\beta = \mathfrak{C}A : \mathfrak{C}\beta,$$
$$DA : D\gamma = \mathfrak{D}A : \mathfrak{D}\gamma,$$
$$EA : E\delta = \mathfrak{E}A : \mathfrak{E}\delta,$$
u. ſ. f. u. ſ. f.

wo α, β, γ, δ, u. ſ. f. nach der Reihe auf Ab, Ac, Ad, Ae, u. ſ. f. zu beziehen ſind. Folglich müſſen letztere Linien alle in eine gerade Linie zuſammenfallen. Denn wäre α' der Durchſchnittspunkt einer dieſer Linien mit B$\mathfrak{B}$; ſo iſt nach dem Bewieſenen $BA : B\alpha' = \mathfrak{B}A : \mathfrak{B}\alpha'$, und in Bezug auf Ab auch $BA : B\alpha = \mathfrak{B}A : \mathfrak{B}\alpha$. Alſo $B\alpha : \mathfrak{B}\alpha = B\alpha' : \mathfrak{B}\alpha'$, $B\alpha + \mathfrak{B}\alpha : B\alpha' + \mathfrak{B}\alpha' = \mathfrak{B}\alpha : \mathfrak{B}\alpha'$, $B\mathfrak{B} : B\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\alpha : \mathfrak{B}\alpha'$. Alſo $\mathfrak{B}\alpha = \mathfrak{B}\alpha'$, ſo daß folglich α, α' zuſammenfallen.

26. Wir geben nur noch einige Anwendungen der Theorie der Transverſalen auf die Beweiſe mehrerer merkwürdigen Sätze. Der ſchon Thl. IV. S. 876. und Trigonometrie. (22.) bewieſene merkwürdige Satz läßt ſich hier auf folgende ſehr einfache Art beweiſen. Bezeichnen wir die Halbmeſſer der um C, C′, C″ (Fig. 35.) beſchriebenen Kreiſe durch r, r′, r″; ſo iſt offenbar, wenn A′, A″, A‴ die Durchſchnittspunkte der äußern Berührenden ſind:

27. In Bezug auf die innern Berühren
, C′, C″ beſchriebenen Kreiſe (Fig. 35.)

$$\frac{r}{r'} = \frac{B'C}{B'C'},\ \frac{r'}{r''} = \frac{B''C'}{B''C''},\ \frac{r''}{r} =$$

$$\frac{r.r'.r''}{r.r'.r''} = \frac{BC''.B'C.B''C'}{BC.B'C'.B''C''} = 1;$$

$$BC.B'C'.B''C'' = BC''.B'C.B''C$$

a nun B, B′, B″ offenbar immer alle dr
s Dreiecks CC′C″ ſelbſt liegen; ſo ſchne
en CB″, C′B, C″B′ immer in einem P

28. Da $\frac{r}{r'} = \frac{A'C}{A'C'} = \frac{B'C}{B'C'}$ (26. 27.) i
, B″ in einer geraden Linie. Denn in
n Viereck CBC″B″C′AC iſt, wenn m
mittspunkt von BB″ mit CC′ durch
$\frac{}{} = \frac{B'C}{B'C'}$ (20.). Alſo A′C′ : A′C
C′ — A′C : aC′ — aC = A′C : aC = CC
h A′C = aC, ſo daß alſo die Punkte a
enfallen. Eben ſo liegen auch A, B′, B″
einer geraden Linie.

29. A, B, C, D ſeyen die Mittel
ugeln, deren Halbmeſſer wir wie ihre A
chnen wollen. Sie werden zu zweien v

b, c, d in einer Ebene liegen. Denn werde die verlängerte Linie AD von der erweiterten Ebene abc in d' geschnitten; so ist, für das Viereck ABCD nach (4.), Aa. Bb. Cc. Dd' = Ad'. Ba. Cb. Dc, woraus, in Verbindung mit obiger Gleichung, sogleich Dd : Dd' = Ad : Ad', also auch Dd — Ad : Dd' — Ad' = Ad : Ad', AD : AD = Ad : Ad', Ad = Ad' folgt. Da nun alle Spitzen der Kegelflächen in den Verlängerungen der Centrallinien der Kugeln liegen; so fällt d' mit d offenbar zusammen, und a, b, c, d liegen in einer Ebene. Eben so zeigt man, daß jede vier der Punkte a, b, c, d, e, f in einer Ebene liegen. Also liegen diese Punkte alle sechs in einer Ebene.

30. Folglich liegen auch immer drei dieser Punkte, welche zu denselben drei Kugeln gehören, in einer geraden Linie, indem z. B. wenn a, d, f den drei Kugeln A, B, D entsprechen, diese drei Punkte offenbar in dem gemeinschaftlichen Durchschnitt der Ebenen abcdef und A, BD liegen.

31. Nimmt man auf den von A (Fig 36.) ausgehenden Kanten einer dreiseitigen Pyramide willkührlich die Punkte b, c, d, zieht hierauf die sechs Diagonalen der Vierecke BCbc, CDcd, DBdb welche sich in D', B, C', schneiden, und zieht die Transversalen AD', AB', AC' welche die Kanten BC, CD, DB in d', b', c' schneiden; so schneiden sich Bb', Cc', Dd' in einem Punkte der Grundfläche; AA', BB', CC', DD' in einem Punkte des Raumes.

Nach (16.) ist:

$$Ab \cdot Bd' \cdot Co = Ac \cdot Bb \cdot Cd',$$
$$Ac \cdot Cb' \cdot Dd = Ad \cdot Cc \cdot Db',$$
$$Ad \cdot Bb \cdot Dc' = Ab \cdot Bc' \cdot Dd,$$

woraus leicht durch Multiplication:

$$Bd' \cdot Cb' \cdot Dc' = Bc' \cdot Cd' \cdot Db'.$$

Da nun in dem in der Figur dargestellten Falle b', c', d' alle drei auf den Seiten des Dreiecks BCD selbst liegen, übrigens aber leicht erhellen wird, daß auch, wenn b, c, d auf den Verlängerungen der *von A ausgehenden* Kanten

ſo erhält man

$$a'c \cdot b'a \cdot c'b = a'b \cdot b'c \cdot c'a.$$

liegen a, b, c in einer geraden Linie, da
en Verlängerungen der Seiten von a'b'c'

inen andern viel weitläufigern Beweis dieſes
Satzes ſ. m. Thl. III. S. 130—132. Zu
igung der dort mitgetheilten hiſtoriſchen No
ndes. Der Satz kommt zuerſt in Pasc
es coniques. 148. Note. vor. Nach ein
Leibnitzens in einem Briefe an Perrie
euvres de Pascal. T. V. befindet, iſt di
des eingeſchriebenen Sechsecks das ſogenan
mmum mysticum, worauf Pasc
ine Abhandlung der Kegelſchnitte gegründe
mehr vorhanden iſt. Nachher iſt der
iften Maclaurins, R. Simſons u.
n. Einen trigonometriſchen Beweis gieb
m. der Stellung. II. S. 353. M. ſ. auch II.
er Beweis iſt von Gergonne (Annales
l. p. 143.). Auch ſ. m. Poncelet a. a.
eine Abhandlung über die Kegelſchnitte in
école polyt. Cahier XIII. Noch einen B

Sba, Sac, welche ſich in Sa ſchneiden. Hierauf ſchneide man den Kegel durch eine Ebene ſo, daß der Schnitt ein Kreis wird, und bezeichne die Durchſchnittspunkte derſelben mit SA, SB, SC, SD, SE, SF, Sa, Sb, Sc, durch A′, B′, C′, D′, E′, F′, a′, b′, c′; ſo iſt A′B′C′D′E′F′ ein in einen Kreis beſchriebenes Sechseck, und folglich b′a′c′ eine gerade Linie (35.); b′a′c′ iſt aber der Durchſchnitt der Ebene des Kreiſes mit den beiden Ebenen Sab, Sac, und folglich müſſen Sab, Sac nur eine Ebene bilden, alſo auch bac, der Durchſchnitt der Ebene des Kegelſchnitts mit Sbac, eine gerade Linie ſeyn.

Wegen (8) wird ſich der Satz auch leicht auf Figuren in der Oberfläche der Kugel erweitern laſſen.

37. Mittelſt der vorhergehenden Theorie läßt ſich auch der merkwürdige Satz beweiſen, daß die Mittelpunkte der drei Diagonalen eines jeden vollſtändigen Vierecks immer in einer geraden Linie liegen. Sey nämlich abca′c′b′a (Fig. 40.) ein vollſtändiges Viereck; ſo iſt aA : aB = a′A : a′B, bB : bC = b′B : b′C, cC : cA = c′C : c′A (20.). Es iſt immer aA > a′A. Alſo auch immer aB > a′B. Auch iſt offenbar immer zugleich bC ≦ b′C, cC ≦ c′C. Alſo auch immer zugleich bB ≦ b′B, cA ≦ c′A. Demnach fällt der Mittelpunkt a″ von aa′ immer in Ba, d. i. in die Verlängerung von AB, und die Mittelpunkte b″, c″ von bb′, cc′ immer in die Verlängerungen von BC, AC, ſo daß alſo die Punkte a″, b″, c″ immer alle drei in den Verlängerungen der Seiten des Dreiecks ABC liegen. Da nun nach dem Obigen aA . a′B = aB . a′A iſt; ſo iſt (a′A + aa′) . a′B = (aa′ — a′B) . a′A, a′A . a′B + aa′ . a′B = aa′ . a′A — a′A . a′B, 2a′A . a′B = aa′ . (a′A — a′B), a′A . a′B = ½aa′ . (a′A — a′B), a′A . a′B . (a′A + a′B) = ½aa′ . (a′A² — a′B²), a′A² . a′B + a′B² . a′A = ½aa′ . a′A² — ½aa′ . a′B², a′B² . (a′A + ½aa′) = a′A² . (½aa′ — a′B), a′B² . (a′A + a′a″) = a′A² . (a′a″ — a′B), a′B² . Aa″ = a′A² . Ba″. Hieraus, und ganz auf ähnliche Art für die andern beiden Seiten des Dreiecks ABC erhält man:

$aA \cdot aB = aA \cdot aB,$

raus durch Multiplication:

$$a'A \cdot b'B \cdot c'C = a'B \cdot b'C \cdot c'A.$$

ſo auch

$$Aa'' \cdot Bb'' \cdot Cc'' = Ac'' \cdot Ba'' \cdot Cb''.$$

emnach, und weil a'', b'', c'' immer alle drei
igerungen der Seiten des Dreiecks ABC
$b''c''$ eine gerade Linie (2.).

Außer den angeführten Schriften ſ. m. übe
:ſalen auch einen Aufſatz von Ferriot in
Math. XVII. p. 141.

Transversus, ſ. Transversa.

Trapezium, auch Menſula, unglei
ſchickte Vierung bei ältern deutſchen S
nach Euclid (I. Def. 33.) jedes Viereck,
arallelogramm iſt. Archimedes (De a
nt. I. 15.) ſcheint daſſelbe darunter zu verſt
lementa Geom. 99. in der ältern Ausgab
: meiſten ältern Schriftſteller, z. B. Ha
im, Schwenter, Beutel, u. A. gebe
irung. Jedoch bemerkt Wolf ſchon in der
he des mathematiſchen Lexicons, und auch

flüssig wird. Die kleinere der beiden parallelen Seiten eines Trapezii heißt in Gerberts Geometrie Cap. 47. coraustus. In der ersten gedruckten Ausgabe von Euclids Elementen (Erhardus Ratdolt Venetiis impressit. 1482.) heißen Trapezien Helmuariphe. (Kästners G. d. M. I. S. 294.) Trapezium irregulare, Trapezoides, Trapezois (ein Viereck, in welchem keine Seite der andern parallel ist), Trapezium isosceles (ein Viereck, worin zwei Seiten parallel, die beiden andern gleich sind), Trapezium scalenum (ein Viereck, worin zwei Seiten parallel, alle aber ungleich sind), Trapezium solidum (die abgekürzte vierseitige Pyramide), sind veraltete und überflüssige Kunstausdrücke.

1. Im Trapezio ABCD (Fig. 41.) sey AB = a, CD = c, das Perpendikel AE = h; so ist $\triangle ABC = \frac{1}{2}ah$, $\triangle BCD = \frac{1}{2}ch$. Also der Inhalt des Trapeziums $= \frac{1}{2}(a+c)h$.

2. Zieht man AF mit BD parallel, und setzt AB = a, BD = b, CD = c, AC = d, CF = c − a = e, AE = x, EF = y; so ist

$$x^2 = b^2 - y^2 = d^2 - (e-y)^2,\ y = \frac{b^2+e^2-d^2}{2e},$$

$$x^2 = \frac{4b^2e^2-(b^2+e^2-d^2)^2}{4e^2} = \frac{[(b+e)^2-d^2][d^2-(b-e)^2]}{4e^2}$$

$$= \frac{(b+e+d)(b+e-d)(d+b-e)(d-b+e)}{4e^2},$$

woraus man nach (1.) den Inhalt des Trapeziums aus seinen vier Seiten erhält:

$$= \frac{c+a}{4(c-a)}\sqrt{\frac{(-a+b+c+d)(-a+b+c-d)}{(a+b-c+d)(a-b-c+d)}}\times$$

3. Ist der Flächeninhalt einer krummlinigen Figur annähernd zu bestimmen; so nehme man eine Linie an, und fälle in gleichen Abständen p auf dieselbe Perpendikel $P, P_1, P_2, \ldots P_n$; so entstehen, wenn p klein ist, zwei Dreiecke und mehrere Trapezien, deren Flächenräume

$$\frac{Pp}{2},\ \frac{(P+P_1)p}{2},\ \frac{(P_1+P_2)p}{2},\ \text{ꝛc.}$$

$$\frac{(P_{n-2}+P_{n-1})p}{2},\ \frac{(P_{n-1}+P_n)p}{2},\ \frac{P_np}{2}$$

:ichung $a^2 - x^2 = x^2 - b^2$ leicht:

$$x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

durch Conſtruction zu finden, mache man
:l $BE = b$, ziehe AE, halbire es in F, err
ndikel $FG = AF$, ziehe AG, und beſchrei
albmeſſer den Bogen GD. Denn AD^2
$^2 + FG^2 = \frac{1}{2}AE^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2) = x^2$.

. Ein gleichſchenkliges Trapezium ABCD (
zwei auf einander ſenkrechte gerade Linier
: Theile einzutheilen, verlängere man die glei
bis ſie ſich in E ſchneiden, fälle das Perpen
uche einen Punkt H, daß die durch H auf F
: KL das Trapezium AFCG halbirt. Zu
man $FH = x$, $AB = 2a$, $CD = 2c$, EG:
l; ſo iſt $AFKH = \frac{1}{2}(a + KH) \cdot x =$
$- d)$. Aber

$$c : a = b : d, \quad c + a : b + d = a : d,$$
$$(c + a)(b - d) : b^2 - d^2 = a : d,$$
$$\frac{1}{2}(c + a)(b - d) = \frac{a(b^2 - d^2)}{4d}.$$

$$KH : a = d + x : d, \quad KH + a : a = 2d + x$$
$$\frac{1}{2}(a + KH)x = \frac{ax(2d + x)}{2d}.$$

p^2 abzuſchneiden, ſetze man $AF = x$, $GH = y$, AB, $CD = a + d$, $AE = h$; ſo iſt

$$p^2 = \tfrac{1}{2}(a+y)x,$$

wenn AK mit BD parallel: $CK : GL = AC : AG$ $E : AF$;

$$d : y - a = h : x, \quad h(y-a) = dx.$$

, mit dem Ausdruck für p^2 multiplicirt, giebt:

$$\tfrac{1}{2}h(y^2 - a^2) = dp^2,$$

us $\quad y = a\sqrt{\left(1 + \frac{2dp^2}{a^2h}\right)}$,

$$x = \frac{h(y-a)}{d} = \frac{ah}{d}\left\{-1 + \sqrt{\left(1 + \frac{2dp^2}{a^2h}\right)}\right\}.$$

ergiren AC, BD nach unten; ſo iſt d negativ zu ſetzen, olglich

$$x = \frac{ah}{d}\left\{1 - \sqrt{\left(1 - \frac{2dp^2}{a^2h}\right)}\right\}.$$

rſten Falle ſetze man

$$1 + \frac{2dp^2}{a^2h} = \frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi} = 1 + \frac{2\sin\varphi}{1-\sin\varphi},$$

$$\sin\varphi = \frac{dp^2}{a^2h + dp^2} = \frac{1}{1 + \frac{a^2h}{dp^2}},$$

ält man

$$x = \frac{ah}{d}\left\{-1 + \sqrt{\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}}\right\}$$

$$\left\{-1 + \frac{\cos\frac{1}{2}\varphi + \sin\frac{1}{2}\varphi}{\cos\frac{1}{2}\varphi - \sin\frac{1}{2}\varphi}\right\} = \frac{2ah\sin\frac{1}{2}\varphi}{d(\cos\frac{1}{2}\varphi - \sin\frac{1}{2}\varphi)}$$ (Goniometrie. 36.)

$$\sin(45^\circ - \tfrac{1}{2}\varphi) = \sin 45^\circ \cdot \cos\tfrac{1}{2}\varphi - \cos 45^\circ \cdot \sin\tfrac{1}{2}\varphi$$
$$= (\cos\tfrac{1}{2}\varphi - \sin\tfrac{1}{2}\varphi)\sqrt{\tfrac{1}{2}},$$

$$x = \frac{ah\sin\frac{1}{2}\varphi\sqrt{2}}{d\sin(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi)}.$$

auf ähnliche Art erhält man für

$$1 - \frac{2dp^2}{a^2h} = \frac{1-\sin\psi}{1+\sin\psi} = 1 - \frac{2\sin\psi}{1+\sin\psi},$$

eiten Falle:

$$x = \frac{ah\sin\frac{1}{2}\psi\sqrt{2}}{d\sin(45^\circ + \frac{1}{2}\psi)},$$

ur logarithmiſchen Rechnung bequeme Formeln. Es t blos auf den abſoluten Werth von x an, da x im- oſitiv zu nehmen iſt.

iangularzahl, ſ. Polygonalzahlen. (1.)

iangulum quadrilaterum, heißt in
Apiaria philosophiae mathematicae.
. 1645. fol. Ap. III. Progym. 6. Prop
, das einen einwärts gehenden Winkel hat.
klärt ſich gegen den Gebrauch des Worts mi
Abh. i. S. 27.

ridens, ſ. Krumme Linie der zweiten Klaſ

rigonalzahl, gleichbedeutend mit Triang

rigonometria catholica, ſ. Tr
79.)

rigonometrie, im engern Sinne, wörtli
eſſung, iſt die Wiſſenſchaft, welche, w
Seiten und Winkeln eines Dreiecks drei
n gegeben ſind, die übrigen drei Stücke du
zu finden lehrt. Nie iſt Conſtruction Zwe
netrie, weshalb ſie auch vorzüglich praktiſche
en fähig iſt. Aſtronomie und Geodäſie verd
[illegible] die Genauigkeit ihrer Reſultate.

auf der Oberfläche eines elliptischen Sphäroids, sollen aber weiter unten noch bestimmter erklärt werden.

2. Nach einem allgemeinern, in den meisten Lehrbüchern festgehaltenen, Begriffe ist die Trigonometrie die ganze Lehre von den Kreisfunctionen, nebst deren Anwendung auf die Berechnung der Dreiecke, und begreift also den Inhalt der Artikel Goniometrie, Cyclometrie, Cyclotechnie und Trigonometrie dieses Wörterbuchs. Indeß sind die in den drei ersten enthaltenen Sätze eigentlich nur Hülfskenntnisse der Trigonometrie im engern Sinne. Diese bedarf jener, aber nicht umgekehrt.

3. Außer Winkeln und Seiten können in einem Dreieck noch verschiedene andere Stücke, z. B. Umfang, Inhalt, Höhe, u. s. f. zu finden seyn. Alle hierher gehörenden Aufgaben, aus denen Philipp Naudé in den Miscell. Berolin. T. V. VII. eine eigene Wissenschaft — Trigonoscopie — bilden wollte, sind indeß nur als Anwendungen der eigentlichen Trigonometrie zu betrachten.

4. In Bezug auf Methode ist die Trigonometrie entweder synthetisch oder analytisch. Jene leitet Alles aus geometrischen Constructionen ab, und kann hier als aus den Elementen hinlänglich bekannt angesehen werden. Letztere dagegen beweiset nur ein System einfacher Formeln durch eine ganz leichte geometrische Betrachtung, und gelangt zu allen übrigen Resultaten auf dem Wege des Calculs, mittelst goniometrischer und cyclometrischer Formeln. Als weniger bekannt, und, wie es uns scheint, dem Wesen der Trigonometrie am meisten entsprechend, soll diese Methode in diesem Artikel durchgängig angewandt werden.

I. Ebene Trigonometrie.

Entwickelung der Grundformeln.

5. Die drei Winkel eines jeden ebenen oder sphärischen Dreyecks werden immer durch α, β, γ, die gegenüberstehenden Seiten respective durch a, b, c bezeichnet. Euler hat diese, viele Vortheile darbietende, Bezeichnungsart

ſtenten Fallen:

$$x = + \alpha\delta, \quad y = + \gamma\delta;$$
$$x = - \alpha\delta, \quad y = + \gamma\delta;$$
$$x = \quad 0, \quad y = + \alpha\gamma.$$

mt man nun $\alpha\delta' = 1$ und errichtet das ſ
ſo iſt im erſten Falle:

$$\alpha\delta' : \gamma'\delta' = \alpha\delta : \gamma\delta = + \alpha\delta : + \gamma\delta,$$
$$1 : \text{tang } \alpha = x : y.$$

zweiten Falle iſt:

$$\alpha\delta' : \gamma'\delta' = \alpha\delta : \gamma\delta = 1 : \text{tang } \gamma\alpha\delta,$$
$$- \alpha\delta : + \gamma\delta = 1 : - \text{tang } \gamma\alpha\delta = 1 : \text{tan}$$
$$1 : \text{tang } \alpha = x : y.$$

in beiden Fällen:

$$y = x \text{ tang } \alpha.$$

Im dritten Falle iſt $\text{tang } \alpha = \infty =$
$\text{ng } \alpha = 0 . \frac{y}{0} = y$, ſo daß alſo die ob
für dieſen Fall gilt.

Da $(c - x)^2$ immer poſitiv iſt, ſo erhe
nur auf das Vorzeichen von x gehörig Rück
t, daß immer $(c - x)^2 + y^2 = a^2$ un
b^2 iſt. Die drei allgemeinen Formeln

$$y = x \text{ tang } \alpha$$

Subtraction und Subſtitution erhält man aus der zweiten und dritten Gleichung:

$$c^2 - 2bc\cos\alpha = a^2 - b^2,$$

Alſo

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{aligned}\right\} [2]$$

8. Durch Addition der zweiten und dritten Gleichung erhält man leicht:

$$o = 2a^2 - 2ac\cos\beta - 2ab\cos\gamma,$$

Alſo

$$\left.\begin{aligned} a &= c\cos\beta + b\cos\gamma \\ b &= a\cos\gamma + c\cos\alpha \\ c &= b\cos\alpha + a\cos\beta \end{aligned}\right\} [3]$$

9. Nach [2.] iſt.

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},$$

woraus man leicht ſowohl für $b^2 \sin\alpha^2$, als $a^2 \sin\beta^2$, den Werth

$$\frac{2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}{4c^2}$$

erhält. Alſo

$$\left.\begin{aligned} a\sin\beta &= b\sin\alpha \\ b\sin\gamma &= c\sin\beta \\ c\sin\alpha &= a\sin\gamma \\ a : b &= \sin\alpha : \sin\beta \\ b : c &= \sin\beta : \sin\gamma \\ c : a &= \sin\gamma : \sin\alpha \end{aligned}\right\} [4]$$

d. h. in jedem Dreieck verhalten ſich die Seiten wie die Sinus der gegenüberſtehenden Winkel.

10. Alſo

$$b : b \pm c = \sin\beta : 2\sin\tfrac{1}{2}(\beta \pm \gamma)\cos\tfrac{1}{2}(\beta \mp \gamma),$$

woraus ſich durch Verbindung mit der Proportion

$$a : b = \sin\alpha : \sin\beta$$

leicht ergiebt:

$$a : b \pm c = \sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\alpha : \sin\tfrac{1}{2}(\beta \pm \gamma)\cos\tfrac{1}{2}(\beta \mp \gamma).$$

Aber $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma = 90^0$. Alſo $\sin\frac{1}{2}(\beta + \gamma) = \cos\frac{1}{2}\alpha$, $\cos\frac{1}{2}(\beta + \gamma) = \sin\frac{1}{2}\alpha$. Folglich

ien Relationen eine einfachere Form ...
nmer $\alpha = 90^0$, ſo iſt $\sin \alpha = 1$, $\sin$
$\alpha = \cos 45^0 = \gamma\frac{1}{2}$. Alſo aus [2.]

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 \\ o &= c - a \cos \beta \\ 0 &= b - a \cos \gamma \end{aligned}\right\} [7]$$

[4], [5], [6] erhält man:

$$\left.\begin{aligned} a \sin \beta &= b \\ b \operatorname{tang} \gamma &= c,\ b = c \operatorname{tang} \beta \\ c &= a \sin \gamma \end{aligned}\right\} [8]$$

$$\left.\begin{aligned} a \cos \tfrac{1}{2}(\beta - \gamma) &= (b + c)\,\gamma\tfrac{1}{2} \\ b \cos (45^0 - \tfrac{1}{2}\gamma) &= (a + c) \sin \tfrac{1}{2}\beta \\ c \cos (45^0 - \tfrac{1}{2}\beta) &= (a + b) \sin \tfrac{1}{2}\gamma \end{aligned}\right\} [9]$$

$$\left.\begin{aligned} a \sin \tfrac{1}{2}(\beta - \gamma) &= (b - c)\,\gamma\tfrac{1}{2} \\ b \sin (45^0 - \tfrac{1}{2}\gamma) &= (a - c) \cos \tfrac{1}{2}\beta \\ c \sin (45^0 - \tfrac{1}{2}\beta) &= (a - b) \cos \tfrac{1}{2}\gamma \end{aligned}\right\} [10]$$

Da aber $\frac{1}{2}(\beta - \gamma) = 45^0 - \gamma$ iſt, ſo tra
dieſe Gleichungen leicht in:

$$\left.\begin{aligned} a \cos (45^0 - \gamma) &= (b + c)\gamma\tfrac{1}{2} \\ b \cos \tfrac{1}{2}\beta &= (a + c) \sin \tfrac{1}{2}\beta \\ c \cos \tfrac{1}{2}\gamma &= (a + b) \sin \tfrac{1}{2}\gamma \end{aligned}\right\} [11]$$

$$\left.\begin{aligned} a \sin (45^0 - \gamma) &= (b - c)\,\gamma\tfrac{1}{2} \\ b \sin \tfrac{1}{2}\beta &= (a - c) \cos \tfrac{1}{2}\beta \\ c \sin \tfrac{1}{2}\gamma &= (a - b) \cos \tfrac{1}{2}\gamma \end{aligned}\right\} [12]$$

$a \sin (45^0 - \gamma) = (b - c)\,\gamma\tfrac{1}{2}$

$$\left.\begin{aligned}\text{tang}\,(45^\circ - \gamma) &= \frac{b-c}{b+c}\\ \text{tang}\,(45^\circ - \beta) &= \frac{c-b}{c+b}\end{aligned}\right\} \quad [14]$$

Allgemeine Auflösung aller Fälle.

12. Folgende Fälle können nur vorkommen:

a. Gegeben eine Seite und zwei Winkel; also immer auch der dritte.

b. Gegeben zwei Seiten und

α. der eingeschlossene;

β. ein Gegenwinkel.

c. Gegeben alle drei Seiten.

Daß aus drei Winkeln ein Dreieck nicht berechnet werden kann, folgt schon aus der Lehre von der Congruenz, kann aber auch so gezeigt werden. Nimmt man nämlich α, β, γ als gegeben an, so erhält man, wenn je zwei der Gleichungen [2] zu einander addirt werden:

$$\begin{aligned}0 &= a - c\cos\beta - b\cos\gamma,\\ 0 &= b - c\cos\alpha - a\cos\gamma,\\ 0 &= c - b\cos\alpha - a\cos\beta,\end{aligned}$$

wie auch schon in [3] gefunden. Also

$$\begin{aligned}a &= (a\cos\gamma + c\cos\alpha)\cos\gamma + c\cos\beta\\ &= a\cos\gamma^2 + c(\cos\beta + \cos\alpha\cos\gamma),\end{aligned}$$

und eben so:

$$c = c\cos\alpha^2 + a(\cos\beta + \cos\alpha\cos\gamma),$$

woraus durch Substitution und Division durch a leicht folgt:

$$1 = \cos\gamma^2 + \frac{(\cos\beta + \cos\alpha\cos\gamma)^2}{1 - \cos\alpha^2},$$

also keine Bestimmung von a. Nach einigen leichten Reductionen erhält man folgende merkwürdige Gleichung zwischen den drei Winkeln:

$$1 - \cos\alpha^2 - \cos\beta^2 - \cos\gamma^2 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 0.$$

Setzt man $\frac{b}{a} = a'$, $\frac{b}{a} = b'$, $\frac{c}{a} = c'$, so erhält man

ird, wie auch die Geometrie lehrt, [illegible]
l nur das Verhältniß der Seiten beſtimmt.

Wir wenden uns nun zur Auflöſung der einzeln
wobei wir uns nur auf das obige Schema

3. Gegeben a, β, γ
   Geſucht α, b, c
} (12. a.)

$+\beta+\gamma = 180^\circ$ iſt, ſo iſt $\sin\alpha = \sin$
ſind nach [4] die zur Auflöſung dienenden Fo

$$\alpha = 180^\circ - (\beta+\gamma),$$

$$b = \frac{a \sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)},$$

$$c = \frac{a \sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}.$$

14. Gegeben b, c, α
    Geſucht β, γ, a
} (12. b. α.)

) [4] und [3] iſt:

$$a \sin\beta = b \sin\alpha, \quad a \cos\beta = c - b \cos\alpha,$$

durch Diviſion:

$$\tang\beta = \frac{b \sin\alpha}{c - b \cos\alpha};$$

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha+\beta), \quad \tang\gamma = \frac{c \sin\alpha}{b - c \cos\alpha};$$

$$\frac{a \sin\alpha}{}$$

$$\text{tang}\,\beta = \frac{b\sin\alpha}{c(1-\cos\varphi)} = \frac{b\sin\alpha}{2c\sin\frac{1}{2}\varphi^2},$$

$$\text{tang}\,\gamma = \frac{c\sin\alpha}{b(1-\cos\varphi')} = \frac{c\sin\alpha}{2b\sin\frac{1}{2}\varphi'^2}.$$

Die Berechnung der Hülfswinkel φ, φ' ist nur möglich, wenn $\frac{b\cos\alpha}{c}$, $\frac{c\cos\alpha}{b}$ die Einheit nicht übersteigen. Einer dieser Brüche ist aber immer <1. Denn wäre z. B. $\frac{b\cos\alpha}{c} > 1$, $b\cos\alpha > c$; so wäre $b > c$, da $\cos\alpha$ nie >1. Also um so mehr $b > c\cos\alpha$, oder $\frac{c\cos\alpha}{b} < 1$. Einen der beiden Hülfswinkel braucht man aber nur, weil, wenn z. B. β gefunden, γ sich augenblicklich aus der Formel $\gamma = 180^0 - (\alpha+\beta)$ ergiebt.

Unmittelbar aus den Datis wird a mittelst der Formel

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$$

gefunden. Die Größe unter dem Wurzelzeichen ist, wenn man $2\cos\frac{1}{2}\alpha\sqrt{bc} = k$ setzt:

$$= b^2 + 2bc + c^2 - 2bc(1+\cos\alpha)$$
$$= (b+c)^2 - 4bc\cos\tfrac{1}{2}\alpha^2$$
$$= (b+c)^2 - k^2.$$

Also $a = \sqrt{(b+c+k)(b+c-k)}$;

eine zur logarithmischen Rechnung bequeme Formel. Man kann auch einen Hülfswinkel ψ aus der Formel

$$\text{tang}\,\psi = \frac{2\sin\frac{1}{2}\alpha\sqrt{bc}}{b-c}$$

berechnen. Dann hat man

$$a^2 = b^2 - 2bc + c^2 + 2bc(1-\cos\alpha)$$
$$= (b-c)^2 + 4bc\sin\tfrac{1}{2}\alpha^2$$
$$= (b-c)^2 + (b-c)^2\,\text{tang}\,\psi^2$$
$$= (b-c)^2\sec\psi^2 = \frac{(b-c)^2}{\cos\psi^2}.$$

$$a = \frac{b-c}{\cos\psi}.$$

Da, wegen $(b-c)^2 = b^2 + c^2 - 2bc$, immer $b^2 + c^2 \gtrless 2bc$, also $(b+c)^2 = b^2 + c^2 + 2bc \gtrless 4bc$, $b + c \gtrless 2\sqrt{bc}$, $b + c > 2\cos\frac{1}{2}\alpha\sqrt{bc}$ ist; so kann man auch setzen

$$\sin\psi' = \frac{2\cos\frac{1}{2}\alpha\sqrt{bc}}{b+c}.$$

$$- 2bc\,(\cos\tfrac{1}{2}\alpha^2 - \sin\tfrac{1}{2}\alpha^2)$$
$$= (b + c)^2 \sin\tfrac{1}{2}\alpha^2 + (b - c)^2 \cos\tfrac{1}{2}\alpha^2,$$

). die Seite a iſt der Hypotenuſe eines
ieck's gleich, deſſen Katheten (b +
— c) cos ½ α ſind. Dies giebt auch fo
ig von a:

$$a = (b + c) \sin\tfrac{1}{2}\alpha \sqrt{1 + \left(\frac{b - c}{b + c} c\right.}$$

$$\frac{b - c}{b + c} \cot\tfrac{1}{2}\alpha = \operatorname{tang}\Theta,$$

$$a = \frac{(b + c)\sin\frac{1}{2}\alpha}{\cos\Theta}.$$

In den Elementen wird gewöhnlich folge
vorliegenden Falles aus einer Conſtruct
[5] und [6] folgt durch Diviſion augenbl

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\beta - \gamma) = \frac{b - c}{b + c} \cot\tfrac{1}{2}\alpha,$$

da $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma = 90^0$ iſt:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\beta - \gamma) = \frac{b - c}{b + c} \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\beta + \gamma);$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\beta + \gamma) : \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\beta - \gamma) = b + c$$

aus findet man $\frac{1}{2}(\beta - \gamma)$. Iſt nun $\frac{1}{2}($
$+ \gamma) = 90^0 - \frac{1}{2}\alpha = \sigma$; ſo ergi
$= \sigma + \beta$ $\gamma = \sigma - \beta$ wodurch β γ

u finden, oder auch des größern Werks: Tafel zur bequemen Berechnung des Logarithmen der Summe und Differenz zweier Größen, welche selbst nur durch ihre Logarithmen gegeben sind. (Von E. A. Matthiesen). Altona 1817. bedienen, oder auf folgende Art (Puissant Traité de Géodésie. I. p. 54.) verfahren. Man setze $\frac{b}{c} = \text{tang } \varphi$, wo, wenn wir $b > c$ annehmen, $\text{tang}\varphi > 1$, $\varphi > 45^0$ ist. Aber

$$\text{tang}(\varphi - 45^0) = \frac{\text{tang}\varphi - 1}{1 + \text{tang}\varphi} = \frac{b - c}{b + c}.$$

Also $\text{tang}\frac{1}{2}(\beta - \gamma) = \text{tang}(\varphi - 45^0) \cdot \cot\frac{1}{2}\alpha$,

wodurch $\text{tang}\frac{1}{2}(\beta - \gamma)$ nur mit Hülfe der Logarithmen von b, c, ohne diese Seiten selbst zu kennen, gefunden wird.

Die Seite a kann man auch nach [5] und [6] mittelst folgender Formeln berechnen:

$$a = \frac{(b + c)\sin\frac{1}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma)} = \frac{(b - c)\cos\frac{1}{2}\alpha}{\sin\frac{1}{2}(\beta - \gamma)}$$
$$= \frac{(b + c)\cos\frac{1}{2}(\beta + \gamma)}{\cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma)} = \frac{(b - c)\sin\frac{1}{2}(\beta + \gamma)}{\sin\frac{1}{2}(\beta - \gamma)}.$$

15. Gegeben b, c, β
Gesucht α, γ, a } (12. b. β.)

$$\sin\gamma = \frac{c\sin\beta}{b}, \quad \alpha = 180^0 - (\beta + \gamma), \quad a = \frac{b\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Die Berechnung beruht ganz auf der Berechnung von γ, welcher durch seinen Sinus bestimmt wird. Da nun jeder Sinus zu zwei Winkeln gehört, so hat auch γ im Allgemeinen zwei einander zu 180^0 ergänzende Werthe, und folglich auch α und a. Dieser Fall heißt daher der unbestimmte Fall der ebenen Trigonometrie. Man unterscheide jedoch folgende Fälle. Ist $b > c$, also auch $\beta > \gamma$, so ist $\gamma < 90^0$, und die Aufgabe folglich völlig bestimmt. Ist $b = c$, also auch $\beta = \gamma$, so ist die Aufgabe ebenfalls völlig bestimmt. Ist aber $b < c$, $\beta < \gamma$, so kann γ sowohl $>$ als auch $< 90^0$ seyn, und es giebt folglich zwei Auflösungen.

16. Gegeben a, b, c
Gesucht α, β, γ } (12. c.)

folgende Art bequemer eingerichtet.

$$1 \pm \cos\alpha = \frac{2bc \pm (b^2 + c^2 - a^2)}{2bc}$$

$$2\cos\tfrac{1}{2}\alpha^2 = \frac{(b + c)^2 - a^2}{2bc},$$

$$= \frac{(a + b + c)(b + c - a}{2bc}$$

$$2\sin\tfrac{1}{2}\alpha^2 = \frac{a^2 - (b - c)^2}{2bc}$$

$$= \frac{(a + b - c)(a + c -}{2bc}$$

Setzt man nun $\frac{1}{2}(a + b + c) = s$, so erh

$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{s(s - a)}{bc}},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{s(s - b)}{ac}},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{s(s - c)}{ab}},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(s - b)(s - c)}{bc}};$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{(s - a)(s - c)}{ac}},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{(s - a)(s - b)}{ab}}.$$

$$\tan\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(s - b)(s - c)}{s(s - a)}},$$

$$\sqrt{(s - a)(s - c)}$$

etztere Formeln sind nicht so bequem wie die erstern, da ie halben Winkel immer spitz sind, bei den letzten Formeln egegen immer eine besondere Beurtheilung der Art der Winkel erforderlich seyn würde.

Auch folgende Formeln scheinen noch einer Erwähnung u verdienen.:

$$\tang \tfrac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{(s-a)^2(s-b)(s-c)}{(s-b)^2 s(s-a)}}$$
$$= \sqrt{\frac{(s-c)^2 s(s-a)}{s^2(s-b)(s-c)}}$$
$$= \frac{s-a}{s-b}\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$
$$= \frac{s-c}{s}\sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}}.$$

$$\tang \tfrac{1}{2}\beta = \frac{s-a}{s-b}\tang \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{s-c}{s}\cot \tfrac{1}{2}\alpha,$$

$$\tang \tfrac{1}{2}\gamma = \frac{s-a}{s-c}\tang \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{s-b}{s}\cot \tfrac{1}{2}\alpha.$$

17. Bei den rechtwinkligen Dreiecken braucht man nur folgende Fälle zu unterscheiden:

a. Gegeben ein spitzer Winkel und
   α. die Hypotenuse;
   β. eine Kathete.

b. Gegeben eine Kathete und
   α. die Hypotenuse;
   β. die andere Kathete.

a. α. Gegeben β, a;
   Gesucht γ, b, c;

nun α immer den rechten Winkel bezeichnet.

$$\gamma = 90^\circ - \beta,$$
$$b = a \sin\beta,\ c = a\cos\beta \text{ [7. 8.]}.$$

a. β. Gegeben β, b;
   Gesucht γ, c, a.

$$\gamma = 90^\circ - \beta;$$
$$c = b \tang\gamma = b\cot\beta \text{ [8]},$$
$$a = \frac{b}{\sin\beta} = b\operatorname{cosec}\beta \text{ [8]}.$$

Auch ist, wenn γ, c schon gefunden, nach [13]:

$= \frac{b-c}{\sin(45^\circ-\gamma)} \cdot r\frac{1}{2} = \frac{b+c}{\cos(45^\circ-\gamma)} \cdot r\frac{1}{2}$.

egeben a, b.

eſucht β, γ, c.

$\sin\beta = \frac{b}{a}$ [8], $\gamma = 90^\circ - \beta$,

$\gamma = a\cos\beta$ [8] $= r(a^2-b^2) = r(a+b)(a-b)$.

Begegeben b, c.

Beſucht β, γ, a.

$\tan\beta = \frac{b}{c}$, $\tan\gamma = \frac{c}{b}$ [8];

$^\circ - \beta) = \frac{c-b}{c+b}$, $\tan(45^\circ-\gamma) = \frac{b-c}{b+c}$ [14];

$a = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$ [8].

drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks be-
önnte man β, γ auch nach den Formeln [13]:

$\tan\frac{1}{2}\beta = \frac{a-c}{b}$, $\cot\frac{1}{2}\beta = \frac{a+c}{b}$;

$\tan\frac{1}{2}\gamma = \frac{a-b}{c}$, $\cot\frac{1}{2}\gamma = \frac{a+b}{c}$,

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \sin\beta(1+\cos\gamma) + \sin\gamma(1+\cos\beta)$$
$$= 4\sin\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma^2 + 4\sin\tfrac{1}{2}\gamma\cos\tfrac{1}{2}\gamma\cos\tfrac{1}{2}\beta^2$$
$$= 4\cos\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma\sin(\tfrac{1}{2}\beta+\tfrac{1}{2}\gamma) = 4\cos\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma.$$

Eben so ist:

$$\cos\alpha = -\cos(\beta+\gamma) = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma,$$
$$1 + \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma =$$
$$\cos\beta(1-\cos\gamma) + 1 + \cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma$$
$$= 2(1 - 2\sin\tfrac{1}{2}\beta^2)\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2 + 2\cos\tfrac{1}{2}\gamma^2$$
$$+ 4\sin\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma\cos\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma$$
$$= 2 + 4\sin\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma\cos(\tfrac{1}{2}\beta+\tfrac{1}{2}\gamma)$$
$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma.$$

Ferner ist

$$\cot\alpha = -\cot(\beta+\gamma) = -\frac{\cot\beta - \tan\gamma}{1 + \cot\beta\tan\gamma},$$
$$\cot\alpha + \cot\alpha\cot\beta\tan\gamma = -\cot\beta + \tan\gamma,$$
$$\cot\alpha(\cot\beta + \cot\gamma) = 1 - \cot\beta\cot\gamma,$$
$$\cot\alpha\cot\beta\cot\gamma = \cot\alpha - \cot\alpha^2(\cot\beta + \cot\gamma)$$
$$= \cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma - (1+\cot\alpha^2)(\cot\beta + \cot\gamma)$$
$$= \cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma - \operatorname{cosec}\alpha \cdot \frac{\cot\beta + \cot\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$$
$$= \cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma - \operatorname{cosec}\alpha \cdot \frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma\sin(\beta+\gamma)}.$$

Also ist $\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma =$
$\cot\alpha\cot\beta\cot\gamma + \operatorname{cosec}\alpha\operatorname{cosec}\beta\operatorname{cosec}\gamma.$

Da $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 360^0$ ist; so ist $\sin 2\alpha$
$$= -\sin(2\beta + 2\gamma)$$
$$= -\sin 2\beta\cos 2\gamma - \cos 2\beta\sin 2\gamma$$
$$= -\sin 2\beta + \sin 2\beta(1-\cos 2\gamma) - \sin 2\gamma + \sin 2\gamma(1-\cos 2\beta)$$
$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\sin\beta\cos\beta\sin\gamma^2 + 4\sin\gamma\cos\gamma\sin\beta^2$$
$$= 4\sin\beta\sin\gamma\sin(\beta+\gamma) = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

Eben so ist $\cos 2\alpha = \cos(2\beta + 2\gamma) = \cos 2\beta\cos 2\gamma - \sin 2\beta\sin 2\gamma,$
$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = \cos 2\beta(1+\cos 2\gamma) + \cos 2\gamma - \sin 2\beta\sin 2\gamma,$$
$$1 + \cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma =$$
$$(1+\cos 2\beta)(1+\cos 2\gamma) - 4\sin\beta\sin\gamma\cos\beta\cos\gamma$$
$$= 4\cos\beta\cos\gamma\cos(\beta+\gamma) = -4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

Aehnliche Relationen lassen sich mehrere finden. M. s. z. B. Lehrbuch der Geom. und Trig. v. Crelle. Berlin 1826. 1. S. 422.

$= \frac{1}{2} bc \sin\alpha$. Setzt man für $\sin\alpha$ den Ausdruck
erhält man den Inhalt durch die drei Seiten

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

ind eine Seite c und die beiden anliegenden
gegeben; so iſt nach [4]:

$$b = \frac{c \sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{c \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)},$$

$$\Delta = \frac{c^2 \sin\alpha \sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)} = \frac{c^2}{2(\cot\alpha + \cot\beta)},$$

nn wir den Inhalt immer durch Δ bezeichne
β, γ gegeben, ſo hat man

$$\Delta = \frac{c^2 \sin\alpha \sin\beta}{2\sin\gamma} = \frac{c^2 \sin\beta \sin(\beta+\gamma}{2\sin\gamma}$$

Sind b, c, β, d. i. zwei Seiten und ein
, gegeben; ſo iſt nach [2]:

$$(a - c\cos\beta)^2 = a^2 - 2ac\cos\beta + c^2\cos$$
$$= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta - c^2\sin\beta^2 = b^2$$

oraus

$$a = c\cos\beta \pm \sqrt{b^2 - c^2\sin\beta^2}.$$

lſo $\Delta = \frac{1}{2} ac\sin\beta$

$$= \tfrac{1}{2} c\sin\beta(c\cos\beta \pm \sqrt{b^2 - c^2\sin\beta^2}).$$

as doppelte Zeichen zeigt einen doppelten Wer
Gibt $b = c$ iſt bekanntlich nur ei

das untere Zeichen nehmen, so würde $\Delta = 0$. Also muß man das obere nehmen, und es ist in diesem Falle $\Delta = \frac{1}{2} b^2 \sin 2\beta$. Ist endlich $b < c$, so ist, da $c \sin\beta$ die Höhe des Dreiecks in Bezug auf die Seite a ist, nie $c \sin\beta > b$. Also $b^2 - c^2 \sin\beta^2 < c^2 - c^2 \sin\beta^2$, $< c^2 \cos\beta^2$, $\sqrt{b^2 - c^2 \sin\beta^2} < c \cos\beta$. Demnach sind in diesem Falle beide Zeichen brauchbar, und es giebt, wie in (16.) zwei Dreiecke, zwei Werthe von Δ. Nur für $c \sin\beta = b$, wo das Dreieck rechtwinklig wird, giebt es nur einen Werth, $= \frac{1}{2} c^2 \sin\beta \cos\beta = \frac{1}{4} c^2 \sin 2\beta$.

20. Addirt man die Gleichungen

$$a \sin\alpha = a \sin\alpha,$$
$$b \sin\alpha = a \sin\beta,$$
$$c \sin\alpha = a \sin\gamma,$$

zu einander; so erhält man

$$(a + b + c)\sin\alpha = a(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma),$$

oder nach (18.) für $\frac{1}{2}(a+b+c) = s$:

$$a = \frac{2s \sin\alpha}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma} = \frac{4s \sin\frac{1}{2}\alpha \cos\frac{1}{2}\alpha}{4 \cos\frac{1}{2}\alpha \cos\frac{1}{2}\beta \cos\frac{1}{2}\gamma},$$

d. i.

$$a = \frac{s \sin\frac{1}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}\beta \cos\frac{1}{2}\gamma},$$

$$b = \frac{s \sin\frac{1}{2}\beta}{\cos\frac{1}{2}\alpha \cos\frac{1}{2}\gamma},$$

$$c = \frac{s \sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\alpha \cos\frac{1}{2}\beta}.$$

Da $\Delta = \frac{1}{2} bc \sin\alpha$ (19.) ist; so erhält man leicht hieraus:

$$\Delta = s^2 \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\beta \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\gamma,$$
$$s = \sqrt{\Delta \cot\tfrac{1}{2}\alpha \cot\tfrac{1}{2}\beta \cot\tfrac{1}{2}\gamma}$$
$$= \sqrt{\Delta(\cot\tfrac{1}{2}\alpha + \cot\tfrac{1}{2}\beta + \cot\tfrac{1}{2}\gamma)}.$$

(Goniometrie. 57.)

Nach (19.) ist

$$a^2 = 2\Delta(\cot\beta + \cot\gamma),$$
$$b^2 = 2\Delta(\cot\alpha + \cot\gamma),$$
$$c^2 = 2\Delta(\cot\alpha + \cot\beta),$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = 4\Delta(\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma),$$
$$\Delta = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4(\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma)}.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck von Δ mit dem vorher

$= 2\gamma$, $\angle \alpha\beta\delta = 90^\circ - \gamma$. Zu
$2\gamma : \cos\gamma$.

$$r = \frac{c \cos\gamma}{\sin 2\gamma} = \frac{c}{2\sin\gamma}.$$

Fig. 47. ist $\angle \delta\alpha\varepsilon = \frac{1}{2}\alpha$, $\angle \delta\beta\varepsilon =$
$\cot\frac{1}{2}\alpha + \cot\frac{1}{2}\beta) = c$, und folglich

$$r' = \frac{c \sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\beta}{\cos\frac{1}{2}\gamma},$$

$\cos\frac{1}{2}\gamma = \sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$. Also

$$\frac{r'}{r} = 4\sin\tfrac{1}{2}\alpha \sin\tfrac{1}{2}\beta \sin\tfrac{1}{2}\gamma$$

$$= \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma - 1 \quad (18.)$$

$$\frac{r + r'}{r} = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma.$$

ist wie vorher:

$$r'(\cot\tfrac{1}{2}\beta + \cot\tfrac{1}{2}\gamma) = a,$$
$$r'(\cot\tfrac{1}{2}\alpha + \cot\tfrac{1}{2}\gamma) = b,$$
$$r'(\cot\tfrac{1}{2}\alpha + \cot\tfrac{1}{2}\beta) = c;$$
$$2r'(\cot\tfrac{1}{2}\alpha + \cot\tfrac{1}{2}\beta + \cot\tfrac{1}{2}\gamma) = a + b +$$
$$\frac{r'(a + b + c)^2}{2\Delta} = a + b + c \quad (20.)$$

$$r' = \frac{2\Delta}{a + b + c}.$$

$2\Delta = ab\sin\gamma$ (19.). Also

abc abc

Sind in Fig. 48. δ, ε die Mittelpunkte des um und in das Dreieck beschriebenen Kreises; so ist, wenn $\delta\zeta$, $\varepsilon\vartheta$ auf $\alpha\beta$ senkrecht sind, und $\delta\eta$ mit $\alpha\beta$ parallel ist, weil $\angle\zeta\delta\alpha$, als halber Centralwinkel, $= \gamma$ ist, für $\delta\eta = x$, $\varepsilon\eta = y$:

$$x = r' \cot \tfrac{1}{2}\alpha - r \sin\gamma, \quad y = r' - r\cos\gamma.$$

Also, für $\delta\varepsilon = d$, $d^2 = x^2 + y^2$

$$= r'^2(1 + \cot\tfrac{1}{2}\alpha^2) - 2rr'(\cos\gamma + \cot\tfrac{1}{2}\alpha \sin\gamma) + r^2$$

$$= \frac{r'^2}{\sin\frac{1}{2}\alpha^2} - \frac{2rr' \sin(\gamma + \frac{1}{2}\alpha)}{\sin\frac{1}{2}\alpha} + r^2$$

$$= \frac{r'^2}{\sin\frac{1}{2}\alpha^2} - \frac{2rr' \cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma)}{\sin\frac{1}{2}\alpha} + r^2,$$

da $\gamma + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}(\beta - \gamma) = 90^0$ ist. Aber

$$\cos\tfrac{1}{2}(\beta - \gamma) = \sin\tfrac{1}{2}\alpha + 2\sin\tfrac{1}{2}\beta \sin\tfrac{1}{2}\gamma.$$

Also

$$d^2 = \frac{r'^2}{\sin\frac{1}{2}\alpha^2} + r^2 - 2rr' - \frac{4rr' \sin\frac{1}{2}\beta \sin\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\alpha}$$

$$= \frac{r'^2}{\sin\frac{1}{2}\alpha^2} + r^2 - 2rr' - \frac{rr'}{\sin\frac{1}{2}\alpha} \cdot \frac{r'}{r\sin\frac{1}{2}\alpha}$$

da nach dem Obigen

$$\frac{r'}{r} = 4\sin\tfrac{1}{2}\alpha \sin\tfrac{1}{2}\beta \sin\tfrac{1}{2}\gamma.$$

Hieraus folgt unmittelbar

$$d^2 = r^2 - 2rr', \quad d = \sqrt{r(r - 2r')}, \quad r : d = d : r - 2r'.$$

Viele Sätze vom Dreieck, trigonometrisch bewiesen, findet man in folgenden Schriften: Ueber einige Eigenschaften des ebenen Dreiecks, von Crelle. Berlin. 1816. Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des ebenen Dreiecks von Feuerbach. Nürnberg. 1822. De triangulorum rectilineorum proprietatibus quibusdam nondum satis cognitis, auctore C. F. A. Jacobi. Numburgi. 1825. 4. Aufgaben über ebene Dreiecke, worin Summen oder Differenzen von Seiten oder Winkeln gegeben sind, von Kroll. Halle. 1826.

22. Um die Anwendung des trigonometrischen Calculs bei den Beweisen geometrischer Sätze zu zeigen, wählen wir den schon Thl. IV. S. 876. syntherisch bewiesenen, von Monge gefundenen Satz, daß die drei Durchschnittspunkte A, A', A'' (Fig. 49.) von je zwei der an drei Kreise gezogenen sechs äußern *Tangententen in einer* geraden

) leicht ergiebt:

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{(p-p')^2+(q-q')^2+(pq'-p'q)^2}{(1+p^2+q^2)(1+p'^2+q'^2)}}$$

$$\tang\alpha = \frac{\sqrt{(p-p')^2+(q-q')^2+(pq'-p'q)^2}}{1+pp'+qq'}.$$

Coordinaten in einer Ebene; ſo iſt $z = z'$ $= q' = 0$. Alſo

$$\cos\alpha = \frac{1+pp'}{\sqrt{(1+p^2)(1+p'^2)}},$$

$$\sin\alpha = \frac{p-p'}{\sqrt{(1+p^2)(1+p'^2)}},$$

$$\tang\alpha = \frac{p-p'}{1+pp'}.$$

ſung der Dreiecke in beſondern Fälle

Wir wollen nun noch einige beſondere Fä
welche bei der Berechnung der Dreiecke v
en, indem wir Formeln aufſuchen, durch
n Fällen theils die Rechnung erleichtert,
eres Reſultat gefunden werden kann. D

nahe $= 90°$ ist, a genauer als nach der gewöhnlichen ormel auf folgende Art:

$$a = \frac{b}{\sin\beta} = b + b \cdot \frac{\cos\beta}{\sin\beta} \cdot \frac{1 - \sin\beta}{\cos\beta}$$

$$= b + b \cot\beta \tang(45° - \tfrac{1}{2}\beta).$$ (Goniometrie. 39.)

uch ist

$$a = b + b \tang\gamma \cot\tfrac{1}{2}\gamma.$$

oll aus den wenig von einander verschiedenen Seiten a, b r Winkel β gefunden werden, so kommt β dem rechten Winkel sehr nahe, und die Formel $\sin\beta = \frac{b}{a}$ giebt β cht hinreichend genau. Nach [13] hat man

$$c \tang\tfrac{1}{2}\gamma = a - b, \quad c \cot\tfrac{1}{2}\gamma = a + b.$$

lso durch Division

$$\tang\tfrac{1}{2}\gamma^2 = \frac{a-b}{a+b}, \quad \tang\tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}.$$

olglich hat man

$$\tang(45° - \tfrac{1}{2}\beta) = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}},$$

$$\sin(45° - \tfrac{1}{2}\beta) = \sqrt{\frac{a-b}{2a}},$$

$$\cos(45° - \tfrac{1}{2}\beta) = \sqrt{\frac{a+b}{2a}},$$

ur genauern Berechnung von β.

26. Mit Vortheil kann man an die Stelle der meisten oben gefundenen Formeln Näherungsformeln setzen, wobei wir sogleich hier ein für alle Mal auf die in dem Artikel Cyclometrie entwickelten Reihen verweisen. Ist z. B. in der Formel $c = a \cos\beta$ der Winkel β sehr klein; so ist, wenn β in Theilen des Radius ausgedrückt ist:

$$c = a - \frac{a\beta^2}{1.2} + \frac{a\beta^4}{1 \ldots 4} - \ldots$$

Ist β in Secunden ausgedrückt, so erhellet leicht, daß, wenn $\varrho = 206264,8062471$ (S. Thl. I. S. 643.) die Anzahl der in einem, dem Halbmesser gleichen, Bogen enthaltenen Secunden bezeichnet:

$$c = a - \tfrac{1}{2} a \left(\frac{\beta}{\varrho}\right)^2 + \tfrac{1}{24} a \left(\frac{\beta}{\varrho}\right)^4 - \ldots$$

Die Reihe convergirt desto stärker, je kleiner β ist. Setzt

nahe $= 90^0$, ſo iſt, für $\pi' - \gamma = \gamma'$,

$$\frac{a \cos \beta'}{\sin(\pi - \beta - \gamma)} = \frac{a \cos \beta'}{\sin(\pi' - \beta + \pi' - \gamma)}$$

$$\frac{a \cos \beta'}{\sin(\beta' + \gamma')}.$$

man nun für den Sinus und Coſinus wieder
netriſchen Reihen, ſo erhält man wie oben, mit
ſigung der Glieder dritter Ordnung, wenn β',
nden ausgedrückt ſind:

$$\frac{a\varrho}{\beta' + \gamma'} \left\{ 1 - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\beta'}{\varrho} \left(\frac{\beta' - \gamma'}{\varrho} \right) + \tfrac{1}{6} \cdot \left(\frac{\gamma'}{\varrho} \right)^2 \right\}$$

$$\frac{a\varrho}{\beta' + \gamma'} \left\{ 1 - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\gamma'}{\varrho} \left(\frac{\gamma' - \beta'}{\varrho} \right) + \tfrac{1}{6} \left(\frac{\beta'}{\varrho} \right)^2 \right\}$$

nahe $= 180^0$, ſo ſetze man $\sin \beta = \sin(\pi - \beta)$,
ſehr klein iſt, und verfahre wie vorher.

enn in dem Falle, wo b, c, α gegeben ſind,
iſt, alſo b, c wenig von einander verſchieden
timme man wie in (14.) ψ aus der Formel

$$\tang \psi = \frac{2 \sin \frac{1}{2} \alpha \sqrt{bc}}{b - c}.$$

Hat man nun a, so erhält man β, γ aus den in (16) zuletzt bewiesenen Formeln.

Da α sehr stumpf ist, so ist für $\alpha = 180° - \Theta$, Θ sehr klein. Also nach [2]:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\Theta$$
$$= b^2 + c^2 + 2bc\left(1 - \tfrac{1}{2}\Theta^2 + \tfrac{1}{24}\Theta^4 - \ldots\right),$$

woraus mit Vernachlässigung der vierten Potenzen von Θ:

$$a^2 = (b + c)^2 - bc\Theta^2,$$
$$a = b + c - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{bc\Theta^2}{(b+c)\varrho^2},$$

wenn Θ in Secunden gegeben ist.

Ferner ist nach (14.)

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{b\sin\alpha}{c - b\cos\alpha} = \frac{b\sin\Theta}{c + b\cos\Theta}$$
$$= \frac{b(\Theta - \frac{1}{6}\Theta^3)}{c + b(1 - \frac{1}{2}\Theta^2)} = \frac{b\Theta}{b+c}\cdot\frac{1 - \frac{1}{6}\Theta^2}{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{b}{b+c}\right)\Theta^2}$$
$$= \frac{b\Theta}{b+c}\left\{1 + \tfrac{1}{6}\cdot\frac{(2b - c)\Theta^2}{b+c}\right\}.$$

Also nach der Reihe für den Winkel durch die Tangente:

$$\beta = \frac{b\Theta}{b+c}\left\{1 + \tfrac{1}{6}\cdot\frac{(b-c)c\Theta^2}{(b+c)^2}\right\},$$

immer mit Vernachlässigung der Glieder vierter Ordnung. Ist also α sehr stumpf, und Θ in Secunden gegeben, so ist:

$$a = b + c - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{bc}{b+c}\left(\frac{\Theta}{\varrho}\right)^2,$$
$$\beta = \frac{b\Theta}{b+c}\left\{1 + \tfrac{1}{6}\cdot\frac{(b-c)c}{(b+c)^2}\cdot\left(\frac{\Theta}{\varrho}\right)^2\right\},$$
$$\gamma = \frac{c\Theta}{b+c}\left\{1 - \tfrac{1}{6}\cdot\frac{(b-c)b}{(b+c)^2}\cdot\left(\frac{\Theta}{\varrho}\right)^2\right\}.$$

29. Durch Reihen kann man den vorigen Fall auch so auflösen:

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{b\sin\alpha}{c - b\cos\alpha} = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} \quad (14.)$$

Also, wenn man für die Sinus und Cosinus die imaginären Exponentialausdrücke Thl. I. S. 877. setzt, nach einigen leichten Reductionen:

$$\frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{e^{2\beta\sqrt{-1}} - 1}{(e^{2\beta\sqrt{-1}} + 1)\sqrt{-1}},$$

$$\frac{b\sin\alpha}{c - b\cos\alpha} = \frac{b\left(e^{\alpha\sqrt{-1}} - e^{-\alpha\sqrt{-1}}\right)}{\left|2c - b\left(e^{\alpha\sqrt{-1}} + e^{-\alpha\sqrt{-1}}\right)\right|}$$

usdrücke einander gleich gesetzt, und über
irt:

$$e^{2\beta\sqrt{-1}} = \frac{c - be^{-\alpha\sqrt{-1}}}{c - be^{\alpha\sqrt{-1}}}.$$

nach der Reihe Thl. III. S. 492.:

$$\sqrt{-1} = \log n\left(c - be^{-\alpha\sqrt{-1}}\right) - \log n\left(c - be^{\alpha\sqrt{-1}}\right.$$

$$= \log n\left(1 - \frac{b}{c}e^{-\alpha\sqrt{-1}}\right) - \log n\left(1 - \frac{b}{c}\right.$$

$$\beta = \frac{b}{c} \cdot \frac{e^{\alpha\sqrt{-1}} - e^{-\alpha\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

$$+ \frac{b^2}{2c^2} \cdot \frac{e^{2\alpha\sqrt{-1}} - e^{-2\alpha\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

$$+ \frac{b^3}{3c^3} \cdot \frac{e^{3\alpha\sqrt{-1}} - e^{-3\alpha\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} + \ldots.$$

$$a^2 = b^2 - 2bc \cdot \frac{e^{\alpha\sqrt{-1}} + e^{-\alpha\sqrt{-1}}}{2} + c^2$$
$$= b(b - ce^{\alpha\sqrt{-1}}) + c^2 - bce^{-\alpha\sqrt{-1}}$$
$$= b(b - ce^{\alpha\sqrt{-1}}) + c^2 \cdot e^{\alpha\sqrt{-1}} \cdot e^{-\alpha\sqrt{-1}} - bce^{-\alpha\sqrt{-1}}$$
$$= (b - ce^{\alpha\sqrt{-1}})(b - ce^{-\alpha\sqrt{-1}}).$$

$$2\log a = 2\log b + \log\left(1 - \frac{c}{b}e^{\alpha\sqrt{-1}}\right) + \log\left(1 - \frac{c}{b}e^{-\alpha\sqrt{-1}}\right)$$

ſo, wenn man die Logarithmen nach der Reihe Thl. III. S. 492. entwickelt:

$$\log a = \log b - \frac{c}{b} \cdot \frac{e^{\alpha\sqrt{-1}} + e^{-\alpha\sqrt{-1}}}{2} - \frac{c^2}{2b^2} \cdot \frac{e^{2\alpha\sqrt{-1}} + e^{-2\alpha\sqrt{-1}}}{2} - \frac{c^3}{3b^3} \cdot \frac{e^{3\alpha\sqrt{-1}} + e^{-3\alpha\sqrt{-1}}}{2} - \ldots\ldots\ldots$$

$$\log a = \log b - M\left\{\frac{c}{b}\cos\alpha + \frac{c^2}{2b^2}\cos 2\alpha + \frac{c^3}{3b^3}\cos 3\alpha + \ldots\right\},$$

und eben ſo:

$$\log a = \log c - M\left\{\frac{b}{c}\cos\alpha + \frac{b^2}{2c^2}\cos 2\alpha + \frac{b^3}{3c^3}\cos 3\alpha + \ldots\right\}.$$

Die eine dieſer beiden Reihen convergirt immer. Puiſ=ant a. a. O. p. 105. eignet ſie Legendre zu. M. ſ. auch deſſen Élém. de Géom. p. 420.

30. Soll γ nach der Formel $\sin\gamma = \frac{c\sin\beta}{b}$ beſtimmt werden; ſo iſt

$$\sin\gamma = \frac{c}{b}(\beta - \tfrac{1}{6}\beta^3 + \tfrac{1}{120}\beta^5 - \ldots).$$

Alſo, wenn β ſehr klein iſt:

$$\sin\gamma = \frac{c}{b}(\beta - \tfrac{1}{6}\beta^3).$$

folglich nach der Reihe für den Bogen durch den Sinus, wenn man bei dem zweiten Gliede ſtehen bleibt:

$$\gamma = \frac{c}{b}\beta\left\{1 - \frac{(b^2 - c^2)\beta^2}{6b^2}\right\}$$
$$= \frac{c}{b}\beta\left\{1 - \frac{b^2 - c^2}{6b^2} \cdot \left(\frac{\beta}{\varrho}\right)^2\right\}.$$

ist $\gamma < 90^0$, und folglich die Aufgabe völlig
Ist β nahe $= 180^0$, so setze man $\pi - \beta$
hes verstattet ist, weil $\sin\beta = \sin(\pi - \beta)$.
iebt es zwei Werthe von γ. Hat man mit-
Formeln einen gefunden, so ist der andere
γ. Um a nach der Formel

$$\frac{b \sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{b \sin\alpha}{\sin(\alpha + \gamma)}$$

diene man sich der Methode in (27.).
he $= c \sin\beta$, so ist $\sin\gamma$ nahe $= 1$, γ nahe
d wird also durch die Formeln $\sin\gamma = \frac{c \sin\beta}{b}$
genug gefunden. Man kann in diesem Falle
ormel

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{c \sin\beta}{b}$$

o ist

$$\operatorname{tang}(45^0 - \tfrac{1}{2}\gamma) = \sqrt{\frac{1 - \sin\gamma}{1 + \sin\gamma}}$$ (Thl. II. S. 522.)

$$\sqrt{\frac{1 - \operatorname{tang}\varphi}{1 + \operatorname{tang}\varphi}} = \sqrt{\operatorname{tang}(45^0 - \varphi)},$$

Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks aus ſeinen Seiten reducirt.

32. Wenn $\tang\varphi = x$ geſetzt wird; ſo iſt (Umformung der Reihen. 16.)

$$\varphi = \frac{x}{1+x^2}\left\{1 + \tfrac{2}{3}\cdot\frac{x^2}{1+x^2} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^2 + \ldots\right\}$$
$$= \sin\varphi\cos\varphi\left(1 + \tfrac{2}{3}\sin\varphi^2 + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\sin\varphi^4 + \ldots\right).$$

Entwickelt man dieſe Reihe in einen Kettenbruch (M. ſ. dieſen Artikel. 60.); ſo erhält man:

$$\varphi = \cfrac{\sin\varphi\cos\varphi}{1 - \cfrac{\frac{1\cdot 2}{1\cdot 3}\sin\varphi^2}{1 - \cfrac{\frac{1\cdot 2}{3\cdot 5}\sin\varphi^2}{1 - \cfrac{\frac{3\cdot 4}{5\cdot 7}\sin\varphi^2}{1 - \cfrac{\frac{3\cdot 4}{7\cdot 9}\sin\varphi^2}{1 - \ldots}}}}}$$

Der zweite Näherungswerth giebt:

$$\varphi = \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{1 - \frac{1}{3}\sin\varphi^2} = \frac{3\sin 2\varphi}{2(2 + \cos 2\varphi)},$$

eine ſchon von Willebrord Snellius gefundene Formel. S. Thl. I. S. 650. Da nun in einem Dreiecke, wo $\alpha = 90°$ iſt, $\sin\beta = \frac{b}{a}$, $\cos\beta = \frac{c}{a}$ iſt; ſo giebt dieſe Formel für $2\varphi = \beta$:

$$\beta = \frac{3b}{2a + c},$$

in Theilen des Halbmeſſers; und in Graden nach Thl. I. S. 643.:

$$\beta = \frac{3b}{2a + c}\cdot 57°,2957.$$

Zieht man

$$\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{1 - \frac{1}{3}\sin\varphi^2} = \sin\varphi\cos\varphi\left(1 + \tfrac{2}{3}\sin\varphi^2 + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 6}\sin\varphi^4 + \ldots\right)$$

von der obigen Reihe für φ ab; ſo erhält man leicht:

$$\varphi = \frac{3\sin 2\varphi}{2(2 + \cos 2\varphi)} + \tfrac{4}{15}\varphi^5 + \ldots,$$

$$\beta = \frac{3b}{2a + c} + \tfrac{1}{150}\beta^5 + \ldots,$$

hler bei Snellius Regel beträgt also nahe
in Theilen des Halbmesſers. Nach Käſt-
M. I. S. 415. kannte auch ſchon der Kardinal
de Cuſa dieſe Regel. Snellius Beweis
ygens in der Schrift de circuli magnitu-
ta. Lugd. 1654. 4., wo er ſelbſt einen Be-
ungenügend. In Lamberts Beiträgen. II.
. 11. iſt die Formel aus einem allgemeinern
eitet. Wiederholt iſt ſie in Tables des sinus,
etc., par A. Girard. A la Haye. 1626.,
irard noch eine andere Formel mittheilt, wel-
inkel zu groß giebt. Es iſt nämlich (Thl. I.

$$\text{in}\beta + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\sin\beta^3}{3} + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{\sin\beta^5}{5} + \ldots,$$

$$\frac{+\ 2\sin\beta}{3} = \frac{\sin\beta(1-\sin\beta^2)^{-\frac{1}{2}} + 2\sin\beta}{3}$$

$$\sin\beta + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\sin\beta^3}{3} + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{\sin\beta^5}{3} + \ldots,$$

ot durch Subtraction:

$$\beta = \frac{\tan\beta + 2\sin\beta}{3} - \tfrac{1}{20}\beta^5 - \ldots$$

33. Eine Formel, welche bloß die Kenntniß der beiden Katheten erfordert, hat Olbers in der monatl. Correspondenz. Dec. 1807. Febr. 1808. gegeben. Es ist nämlich

$$\varphi = \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{1 - \frac{1}{3}\sin\varphi^2} + \frac{4}{15}\varphi^5 + \ldots$$

$$= \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sin\varphi^2 + \cos\varphi^2 - \frac{1}{3}\sin\varphi^2} + \frac{4}{15}\varphi^5 + \ldots$$

$$= \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\frac{1}{3}\sin\varphi^2 + \cos\varphi^2} + \frac{4}{15}\varphi^5 + \ldots$$

$$= \frac{3\,\mathrm{tang}\,\varphi}{3 + \mathrm{tang}\,\varphi^2} + \frac{4}{15}\varphi^5 + \ldots$$

$$\beta = \frac{3bc}{b^2 + 3c^2} + \frac{4}{15}\beta^5 + \ldots$$

ölglich näherungsweise:

$$\beta = \frac{3bc}{b^2 + 3c^2}$$

Theilen des Radius; und in Graden:

$$\beta = \frac{3bc}{b^2 + 3c^2} \cdot 57°,2957.$$

er Fehler ist $= \frac{4}{45}\beta^5 = \frac{16}{1800}\beta^5$, also ungefähr 16mal groß wie bei Snellius Formel. Man erhält die Formel auch aus dem Kettenbruche für Arc tang x in Thl. IV. S. 97. Die Näherung wird weiter getrieben, wenn man nicht schon die fünften Potenzen von β vernachlässigt.

34. M. s. über den hier behandelten Gegenstand auch Navigation new modell'd. London. 1715. von Henry Wilson. Der Rec. in den Act. Erud. 1716. p. 65. sagt, das Buch sey wegen dieser Regeln geschrieben. Auch Gietermaker t'vergulde Licht der Zeewart. Amst. 1693. 4. Kästners geom. Abh. I. S. 157. u.; einen Aufsatz von Voll in der Isis von Oken. Fünftes Heft. 1826. S. 493., und besonders Mollweide Auflösung ebener Dreiecke ohne Hülfe der trig. Tafeln, vorzüglich zum Gebrauche der Schiffer. Monatl. Corresp. Jul. 1807. S. 18. Lagny in den Mém. de Paris. 1725. giebt die Winkel in unendlichen Reihen. Gebrauchen wir die transformirte Reihe in (32); so ist für

$$x = \mathrm{tang}\,\beta = \frac{b}{c}, \quad \frac{x^2}{1 + x^2} = \frac{b^2}{b^2 + c^2},$$

$$\frac{x}{1+x^2} = \frac{bc}{b^2+c^2}:$$

$$\frac{bc}{+c^2}\left\{1 + \tfrac{2}{3}\cdot\frac{b^2}{b^2+c^2} + \frac{2.4}{3.5}\left(\frac{b^2}{b^2+c^2}\right)^2 +\right.$$

ker convergirende Reihe als die von Lag

tionale Dreiecke sind solche rechtwinklig
ren Seiten alle drei rational sind. Das Au
Dreiecke gründet sich auf die Bemerkung
ng $\frac{1}{2}\beta$ rational ist, immer auch $\sin\beta$, co
nd, da für $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\beta = \frac{m}{n}$:

$$\sin\beta = \frac{2mn}{m^2+n^2},\quad \cos\beta = \frac{n^2-m^2}{m^2+n^2}.$$

kante ist ebenfalls rational:

$$\sec\beta = \frac{m^2+n^2}{n^2-m^2} = \frac{1}{\cos\beta}.$$

man nun für m und n irgend zwei ganze
äßt sich β aus der Gleichung $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\beta = \frac{m}{n}$
n die Tangente jeden Werth haben kann, n
$m < n$ seyn, damit $\frac{1}{2}\beta < 45^0$, $\beta < 9$

guten Beobachtungen immer der Fall ist, können Differentiale die Stelle der Differenzen vertreten, und die Untersuchung verfällt also der Rechnung mit partiellen Differentialen, da die Fehler der gemessenen Stücke offenbar als ganz unabhängig von einander zu betrachten sind.

36. Durch partielle Differentiation der Formeln

$$a^2 = b^2 - 2bc\cos\alpha + c^2,$$

und $a\sin\beta = b\sin\alpha$, und durch Vertauschung der Buchstaben erhält man leicht:

$$\begin{aligned}
a\partial a &= (b - c\cos\alpha)\,\partial b + (c - b\cos\alpha)\,\partial c + bc\sin\alpha\,\partial\alpha \\
&= a\cos\gamma\,\partial b + a\cos\beta\,\partial c + bc\sin\alpha\,\partial\alpha \\
b\partial b &= (a - c\cos\beta)\,\partial a + (c - a\cos\beta)\,\partial c + ac\sin\beta\,\partial\beta \\
&= b\cos\gamma\,\partial a + b\cos\alpha\,\partial c + ac\sin\beta\,\partial\beta \\
c\partial c &= (a - b\cos\gamma)\,\partial a + (b - a\cos\gamma)\,\partial b + ab\sin\gamma\,\partial\gamma \\
&= c\cos\beta\,\partial a + c\cos\alpha\,\partial b + ab\sin\gamma\,\partial\gamma;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin\beta\,\partial a - \sin\alpha\,\partial b &= b\cos\alpha\,\partial\alpha - a\cos\beta\,\partial\beta \\
\sin\gamma\,\partial b - \sin\beta\,\partial c &= c\cos\beta\,\partial\beta - b\cos\gamma\,\partial\gamma \\
\sin\alpha\,\partial c - \sin\gamma\,\partial a &= a\cos\gamma\,\partial\gamma - c\cos\alpha\,\partial\alpha.
\end{aligned}$$

Nimmt man hierzu noch die aus $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ sich leicht ergebende Gleichung

$$\partial\alpha + \partial\beta + \partial\gamma = 0;$$

so hat man die Fundamentalformeln der Fehlerrechnung der ebenen Trigonometrie. Die einzelnen Fälle sind folgende.

37. Gegeben a, β, γ.

Gesucht α, b, c.

$$\partial\alpha = -\partial\beta - \partial\gamma$$

$$\partial b = \frac{\sin\beta\,\partial a - b\cos\alpha\,\partial\alpha + a\cos\beta\,\partial\beta}{\sin\alpha}$$

$$\partial c = \frac{\sin\gamma\,\partial a - c\cos\alpha\,\partial\alpha + a\cos\gamma\,\partial\gamma}{\sin\alpha},$$

mittelst welcher Formeln sich zuerst $\partial\alpha$ und dann ∂b, ∂c berechnen lassen. Man könnte auch $-\partial\beta - \partial\gamma$ für $\partial\alpha$ in die Ausdrücke für ∂b, ∂c setzen.

Da $b\cos\alpha + a\cos\beta = c$ [13]; so erhält man für

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\beta\sin(\beta+\gamma)} = M,\ \cot(\beta+\gamma) = N$$

leicht:

$$\partial b = \frac{\sin\beta\,\partial a + c\,\partial\beta + b\cos\alpha\,\partial\gamma}{\sin\alpha}$$

$$= \frac{b\,\partial a}{a} + bM\,\partial\beta - bN\,\partial\gamma$$

$$\frac{\partial b}{b} = \frac{\partial a}{a} + M\,\partial\beta - N\,\partial\gamma;$$

ben ſo für

$$\frac{\sin\beta}{\sin\gamma\,\sin(\beta+\gamma)} = M',\ \cot(\beta+\gamma) = N:$$

$$\frac{\partial c}{c} = \frac{\partial a}{a} + M'\partial\gamma - N\,\partial\beta.$$

ayers prakt. Geom. II. S. 447. Dur
wird das Verhältniß von ∂b, ∂c zu b,
Ein Exempel ſ. m. a. a. O. S. 453.

Gegeben b, c, α.

Geſucht β, γ, a.

$$\partial a = \frac{a\cos\gamma\,\partial b + a\cos\beta\,\partial c + bc\sin\alpha\,\partial\alpha}{a}$$

$$= \frac{(b - c\cos\alpha)\,\partial b + (c - b\cos\alpha)\,\partial c + bc\sin\alpha\,\partial}{\sqrt{b^2 - 2bc\cos\alpha + c^2}}$$

$$\partial\beta = \frac{b\,\partial b - b\cos\gamma\,\partial a - b\cos\alpha\,\partial c}{ac\sin\beta}$$

$$b\cos\gamma\,\partial\gamma + \sin\gamma\,\partial b = a\cos\beta\,\partial\beta + \sin\beta\,\partial a,$$

$$b\cot\gamma\,\partial\gamma + \partial b = \frac{c\cos\beta}{\sin\gamma}\,\partial\beta + \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\,\partial a,$$

$$\cot\gamma\,\partial\gamma + \frac{\partial b}{b} = \frac{c\cos\beta}{b\sin\gamma}\,\partial\beta + \frac{\sin\beta}{b\sin\gamma}\,\partial a,$$

$$= \frac{\cos\beta}{\sin\beta}\,\partial\beta + \frac{b}{bc}\,\partial a = \cot\beta\,\partial\beta + \frac{\partial a}{c}.$$

)urch Subſtitution des Werthes von ∂a in den Ausdruck
ir $\partial\alpha$ würde man einen von ∂a unabhängigen Ausdruck für
r erhalten können.

40. Gegeben a, b, c.

Geſucht α, β, γ.

Da

$$\partial\alpha = \frac{a\,\partial a - a\cos\gamma\,\partial b - a\cos\beta\,\partial c}{bc\sin\alpha}$$

, ſo ergiebt ſich durch Subſtitution der aus dem Obigen
kannten Ausdrücke für $\sin\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ durch die
ei Seiten, für $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$, zugleich mit Ver-
uſchung der Buchſtaben, leicht:

$$\partial\alpha = \frac{2abc\,\partial a - (a^2+b^2-c^2)c\,\partial b - (a^2+c^2-b^2)b\,\partial c}{2bc\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

$$\partial\beta = \frac{2abc\,\partial b - (a^2+b^2-c^2)c\,\partial a - (b^2+c^2-a^2)a\,\partial c}{2ac\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

$$\partial\gamma = \frac{2abc\,\partial c - (a^2+c^2-b^2)b\,\partial a - (b^2+c^2-a^2)a\,\partial b}{2ab\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

41. Wichtig ſind auch die Gleichungen zwiſchen den
eränderungen der Stücke eines Dreiecks, wenn zwei
tücke als unveränderlich angenommen werden. Man
nn aber als unveränderlich annehmen:

a. Eine Seite und einen anliegenden Winkel.

b. Eine Seite und den gegenüberſtehenden Winkel.

c. Zwei Seiten.

d. Zwei Winkel.

42. Unveränderlich a, β
Veränderlich b, c, α, γ } (41. a.)

lach der Annahme iſt $\partial a = \partial\beta = 0$. Da nun immer
$+\partial\beta+\partial\gamma = 0$ iſt, ſo iſt $\partial\alpha+\partial\gamma = 0$, $\partial\alpha = -\partial\gamma$.

un auch in den Gleichungen in (36.) $\partial a = \partial\beta$
hält man

$$b\,\partial b = b\cos\alpha\,\partial c,$$
$$o = \sin\alpha\partial b + b\cos\alpha\,\partial\alpha.$$

so nach einigen leichten Reductionen folgende

$$\partial\alpha = -\partial\gamma,$$
$$\partial b = \cos\alpha\,\partial c,$$
$$b\,\partial\alpha = -\tang\alpha\,\partial b,$$

∂c, $\partial\alpha$, $\partial\gamma$, aus denen sich, wenn irgend
Größen als bekannt angenommen wird, die
hnen lassen.

eränderlich a, α.
änderlich b, c, β, γ. } (41. b.)
$\partial a = \partial\alpha = o$, $\partial\beta + \partial\gamma = o$.

ichungen in (36.):
$= a\cos\gamma\,\partial b + a\cos\beta\,\partial c,$
$\sin\alpha\,\partial b = -a\cos\beta\,\partial\beta.$
gehöriger Reduction:
$$\partial\beta = -\partial\gamma,$$

Dieſe Gleichungen laſſen ſich aber abkürzen. Es iſt nämlich

$$-bc\sin\alpha\sin\beta\,\partial\alpha = a\sin\beta\cos\beta\,\partial c,$$
$$-bc\sin\alpha\,\mathrm{tang}\beta\,\partial\alpha = a\sin\beta\,\partial c,$$
$$b\sin\alpha = a\sin\beta \quad [4],$$
$$-c\,\mathrm{tang}\beta\,\partial\alpha = \partial c.$$

Eben ſo $-c\,\mathrm{tang}\alpha\partial\beta = \partial c$. Ferner iſt $\partial c = a.\frac{b\sin\gamma}{c}.\partial\gamma = b.\frac{a\sin\gamma}{c}.\partial\gamma = a\sin\beta\partial\gamma = b\sin\alpha\partial\gamma$; und endlich;

$$a\sin\alpha\sin\beta\cos\beta\partial\beta = b\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\partial\alpha,$$
$$a\sin\beta\,\mathrm{tang}\alpha\partial\beta = b\sin\alpha\,\mathrm{tang}\beta\partial\alpha,$$
$$a\sin\beta = b\sin\alpha,$$
$$\mathrm{tang}\alpha\partial\beta = \mathrm{tang}\beta\partial\alpha.$$

Alſo hat man folgende Gleichungen;

$$\partial\alpha + \partial\beta + \partial\gamma = 0,$$
$$-c\,\mathrm{tang}\beta\partial\alpha = \partial c,$$
$$-c\,\mathrm{tang}\alpha\partial\beta = \partial c,$$
$$\partial c = a\sin\beta\partial\gamma = b\sin\alpha\partial\gamma,$$
$$\mathrm{tang}\alpha\partial\beta = \mathrm{tang}\beta\partial\alpha.$$

45. Unveränderlich α, β.
Veränderlich a, b, c. } (41. d.)

Da offenbar auch γ unveränderlich iſt, ſo iſt auch $\partial\gamma = 0$, und man hat folglich nach (36):

$$\partial a = \cos\gamma\partial b + \cos\beta\partial c,$$
$$\partial b = \cos\gamma\partial a + \cos\alpha\partial c,$$
$$\partial c = \cos\beta\partial a + \cos\alpha\partial b,$$
$$\sin\beta\partial a - \sin\alpha\partial b = 0,$$
$$\sin\gamma\partial b - \sin\beta\partial c = 0,$$
$$\sin\alpha\partial c - \sin\gamma\partial a = 0.$$
$$\frac{\partial a}{\partial b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b},$$
$$\frac{\partial b}{\partial c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{b}{c},$$
$$\frac{\partial c}{\partial a} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{c}{a};$$

oder $b\partial a = a\partial b$, $c\partial b = b\partial c$, $a\partial c = c\partial a$.

46. Zu den bei Mayer a. a. O. S. 491. 492. angeführten Schriften, worin dieſer Gegenſtand theils ſynthetiſch, theils analytiſch abgehandelt iſt, füge ich nur noch: Aestimatio errorum in mixta *mathesi* per variatio-

im trianguli plani et sphaerici. Lemg
amerer theoria aestimationis err
anis et sphaericis. Tub. 1783. 4. und
ppl. I. S. 149. Cagnoli Trigono
mpré. Paris. 1808. 4. Chap. XII.

Sphärische Trigonometrie.

ckelung der Grundform

ey $\alpha\beta\gamma$ irgend ein sphärisches Dreieck, d
äche einer Kugel gedacht wird, deren
Radius r ist. Es ist verstattet anzun
Seite dieses Dreiecks die halbe Peripheri
es in einem solchen Falle offenbar imr
ck des gegebenen giebt, dessen Seiten
dieses zu 180°, und alle kleiner als 180
eieck läßt sich statt des gegebenen ber
geometrische Theorie sphärischer Dreieck

ht, die Linien αa, αb, αc auf den Axen der x, y, z
ıkrecht. (Ebene 14.). Alſo

$$Oa = O\alpha \cdot \cos x_1,\ Ob = O\alpha \cdot \cos\lambda_1,\ Oc = O\alpha \cdot \cos\mu_1.$$

ber $O\alpha^2 = Oa'^2 + \alpha a'^2 = Oa^2 + Ob^2 + Oc^2$

$$= O\alpha^2 \cdot \{\cos x_1^2 + \cos\lambda_1^2 + \cos\mu_1^2\}$$

$$1 = \cos x_1^2 + \cos\lambda_1^2 + \cos\mu_1^2.$$

)a nun aber die Winkel x, λ, μ offenbar die Winkel
$_1$, λ_1, μ_1 ſelbſt, oder ihre Ergänzungen zu 180° ſind;
) iſt, weil das Vorzeichen einer Größe keinen Einfluß auf
as Zeichen ihres Quadrates hat, $\cos x_1^2 = \cos x^2$,
$\cos\lambda_1^2 = \cos\lambda^2$, $\cos\mu_1^2 = \cos\mu^2$, und folglich:

$$\left.\begin{aligned} \cos x^2 + \cos\lambda^2 + \cos\mu^2 &= 1 \\ \cos x'^2 + \cos\lambda'^2 + \cos\mu'^2 &= 1 \\ \cos x''^2 + \cos\lambda''^2 + \cos\mu''^2 &= 1 \end{aligned}\right\} [15]$$

50. Bezeichnet man jetzt durch x, y, z die Coordina-
ten des Punktes α; ſo iſt (Fig. 52.) $\pm \alpha\alpha' = z$. Es iſt
aber klar, daß $\alpha\alpha'$ über oder unter der Ebene der xy liegt,
d. i. poſitiv oder negativ zu nehmen iſt, jenachdem der
Winkel $\mu <$ oder $> 180°$ iſt. Da nun $\alpha\alpha' = O\alpha \cdot \cos\mu_1$
(49.) $= r\cos\mu_1$ iſt; ſo iſt $\pm \alpha\alpha' = z = r\cos\mu$.
Alſo $x = r\cos x$, $y = r\cos\lambda$, $z = r\cos\mu$, woraus
ſich nach (49.), wenn die Coordinaten von β und γ durch
x', y', z'; x'', y'', z'' bezeichnet werden, augenblicklich
ergiebt:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= r^2 \\ x'^2 + y'^2 + z'^2 &= r^2 \\ x''^2 + y''^2 + z''^2 &= r^2 \end{aligned}\right\} [16].$$

51. Die den Seiten a, b, c des ſphäriſchen Dreiecks
entſprechenden Sehnen bezeichne man durch a', b', c'; ſo
iſt, wenn man ſich durch β drei neue, mit den primitiven
parallele, Coordinatenaxen gelegt denkt, und die Coordi-
naten von γ in Bezug auf dieſes Syſtem durch x_1, y_1,
$_1$, bezeichnet, nach (50.):

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = a'^2.$$

lugenblicklich erhellet aber, daß, mit gehöriger Berückſich-
gung der Vorzeichen, da die Coordinaten des neuen An-
ngspunktes x', y', z' ſind:

$$x_1 = x'' - x',\ y_1 = y'' - y',\ z_1 = z'' - z';$$

ſo

$$\left.\begin{aligned} -x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2 &= a'^2 \\ -x)^2 + (y'' - y)^2 + (z'' - z)^2 &= b'^2 \\ -x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 &= c'^2 \end{aligned}\right\} [17]$$

wickelt man dieſe Gleichungen, ſo erhält man
uf [16] leicht:

$$\left.\begin{aligned} -a'^2 &= 2x'x'' + 2y'y'' + 2z'z'' \\ -b'^2 &= 2xx'' + 2yy'' + 2zz'' \\ -c'^2 &= 2xx' + 2yy' + 2zz' \end{aligned}\right\} [18]$$

t man nun in dieſen Formeln für die Coordi-
sdrücke in (50.), und bezeichnet eine Größe
n

$$\cos\varkappa' \cdot \cos\varkappa' + \cos\lambda \cdot \cos\lambda' + \cos\mu \cdot \cos\mu'$$

$\varkappa'$); ſo erhält man

$$\left.\begin{aligned} ^2 - a'^2 &= 2r^2 \cdot \varphi(\varkappa', \varkappa'') \\ ^2 - b'^2 &= 2r^2 \cdot \varphi(\varkappa, \varkappa'') \\ ^2 - c'^2 &= 2r^2 \cdot \varphi(\varkappa, \varkappa') \end{aligned}\right\} [19]$$

nun aber in dem ebenen Dreiecke $\beta O\gamma$ nach [2]

$$0 = \cos\varkappa\cos\varepsilon + \cos\lambda\cos\eta + \cos\mu\cos\Theta,$$
$$0 = \cos\varkappa'\cos\varepsilon + \cos\lambda'\cos\eta + \cos\mu'\cos\Theta,$$
$$1 = \cos\varepsilon^2 + \cos\eta^2 + \cos\Theta^2 \text{ [15]};$$
$$0 = \cos\varkappa\cos\varepsilon' + \cos\lambda\cos\eta' + \cos\mu\cos\Theta',$$
$$0 = \cos\varkappa''\cos\varepsilon' + \cos\lambda''\cos\eta' + \cos\mu''\cos\Theta',$$
$$1 = \cos\varepsilon'^2 + \cos\eta'^2 + \cos\Theta'^2 \text{ [15]}.$$

Eliminirt man nun aus den erſten beiden Gleichungen zuerſt $\cos\eta$, und dann $\cos\Theta$; ſo ergiebt ſich, indem man eine Größe von der Form

$$\cos\varkappa\cos\lambda' - \cos\varkappa'\cos\lambda$$

durch $f(\varkappa, \lambda')$ bezeichnet:

$$|f(\varkappa, \lambda')|^2 . \cos\varepsilon^2 = |f(\lambda, \mu')|^2 . \cos\Theta^2$$
$$|f(\varkappa, \mu')|^2 . \cos\varepsilon^2 = |f(\lambda, \mu')|^2 . \cos\eta^2$$
$$|f(\lambda, \mu')|^2 . \cos\varepsilon^2 = |f(\lambda, \mu')|^2 . \cos\varepsilon^2,$$

woraus ſich mittelſt der dritten Gleichung leicht ergiebt:

$$\cos\varepsilon^2 = \frac{|f(\lambda, \mu')|^2}{|f(\varkappa, \lambda')|^2 + |f(\varkappa, \mu')|^2 + |f(\lambda, \mu')|^2}$$
$$\cos\eta^2 = \frac{|f(\varkappa, \mu')|^2}{|f(\varkappa, \lambda')|^2 + |f(\varkappa, \mu')|^2 + |f(\lambda, \mu')|^2}$$
$$\cos\Theta^2 = \frac{|f(\varkappa, \lambda')|^2}{|f(\varkappa, \lambda')|^2 + |f(\varkappa, \mu')|^2 + |f(\lambda, \mu')|^2}.$$

Entwickelt man nun den gemeinſchaftlichen Nenner dieſer Brüche; ſo erhält man, indem man die Producte $\cos\varkappa^2\cos\varkappa'^2$, $\cos\lambda^2\cos\lambda'^2$, $\cos\mu^2\cos\mu'^2$ zu und von der Entwickelung addirt und ſubtrahirt, mit Hülfe von [15] und [20], dieſen Nenner $= 1 - |\varphi(\varkappa, \varkappa')|^2 = 1 - \cos c^2 = \sin c^2$, und folglich

$$\left.\begin{aligned}\cos\varepsilon^2 &= \frac{|f(\lambda, \mu')|^2}{\sin c^2}\\ \cos\eta^2 &= \frac{|f(\varkappa, \mu')|^2}{\sin c^2}\\ \cos\Theta^2 &= \frac{|f(\varkappa, \lambda')|^2}{\sin c^2}\end{aligned}\right\} [21]$$

und eben ſo

$$\left.\begin{aligned}\cos\varepsilon'^2 &= \frac{|f(\lambda, \mu'')|^2}{\sin b^2}\\ \cos\eta'^2 &= \frac{|f(\varkappa, \mu'')|^2}{\sin b^2}\\ \cos\Theta'^2 &= \frac{|f(\varkappa, \lambda'')|^2}{\sin b^2}\end{aligned}\right\} [22]$$

56. Beſtimmt man nun hieraus $\cos\varepsilon$, $\cos\eta$, u. ſ. f.,

usdrücke für $\cos\varepsilon$, $\cos\eta$, $\cos\Theta$ beſtimm
us denſelben die Ausdrücke für $\cos\varepsilon'$, $\cos$
orgehen, wenn man in jenen überall μ'', λ
tzt. Denn ſey z. B. einmal

$$\cos\varepsilon = \frac{\cos\lambda\cos\mu' - \cos\lambda'\cos\mu}{\sin c},$$

ver nicht

$$\cos\varepsilon' = \frac{\cos\lambda\cos\mu'' - \cos\lambda''\cos\mu}{\sin b}$$

ndern

$$\cos\varepsilon' = \frac{\cos\lambda''\cos\mu - \cos\lambda\cos\mu''}{\sin b}$$

Stellt man ſich nun vor, daß ſich die Lin
ſo auch die Ebenen $\alpha O\beta$, $\alpha O\gamma$ einander n
ern ſich auch die beiden Perpendikel, deren
t, einander immer mehr, und fallen mit de
en gleichzeitig zuſammen. Dann nähern
ie Winkel λ', μ', ε immer mehr den Winkel
nd werden dieſen gleich, wenn die Ebenen zu
daß alſo offenbar, wenn $\lambda' = \lambda''$, μ'
$\cos\varepsilon = \cos\varepsilon'$ werden muß. Unter obi
ürde man aber für dieſen Fall, da augen
$= c$ wird, $\cos\varepsilon = -\cos\varepsilon'$ erhalten.

$$\cos\varepsilon' = \frac{\cos\lambda''\cos\mu - \cos\lambda\cos\mu''}{\sin b};$$

oder

$$\cos\varepsilon = \pm\frac{f(\lambda,\mu')}{\sin c},\quad \cos\varepsilon' = \pm\frac{f(\lambda,\mu'')}{\sin b};$$

wo die obern und untern Zeichen sich auf einander beziehen. Also ist immer mit gehöriger Vertauschung der Buchstaben:

$$\left.\begin{aligned}\cos\varepsilon\,.\,\cos\varepsilon' &= \frac{f(\lambda,\mu')\,.\,f(\lambda,\mu'')}{\sin b\sin c}\\ \cos\eta\,.\,\cos\eta' &= \frac{f(\varkappa,\mu')\,.\,f(\varkappa,\mu'')}{\sin b\sin c}\\ \cos\Theta\,.\,\cos\Theta' &= \frac{f(\varkappa,\lambda')\,.\,f(\varkappa,\lambda'')}{\sin b\sin c}\end{aligned}\right\}\ [23]$$

57. Da nun nach [20.]

$$\cos\alpha = \cos\varepsilon\cos\varepsilon' + \cos\eta\cos\eta' + \cos\Theta\cos\Theta'$$

ist; so erhält man aus [23]

$$\begin{aligned}&\cos\alpha\sin b\sin c =\\ &(\cos\lambda\cos\mu' - \cos\lambda'\cos\mu)(\cos\lambda\cos\mu'' - \cos\lambda''\cos\mu)\\ +\ &(\cos\varkappa\cos\mu' - \cos\varkappa'\cos\mu)(\cos\varkappa\cos\mu'' - \cos\varkappa''\cos\mu)\\ +\ &(\cos\varkappa\cos\lambda' - \cos\varkappa'\cos\lambda)(\cos\varkappa\cos\lambda'' - \cos\varkappa''\cos\lambda),\end{aligned}$$

woraus sich, wenn man die Producte entwickelt, und die Ausdrücke $\cos\varkappa^2\cos\varkappa'\cos\varkappa''$, $\cos\lambda^2\cos\lambda'\cos\lambda''$, $\cos\mu^2\cos\mu'\cos\mu''$ zu und von der Entwickelung addirt und subtrahirt, leicht nach [15] ergiebt:

$$\cos\alpha\sin b\sin c = \varphi(\varkappa',\varkappa'') - \varphi(\varkappa,\varkappa'')\,.\,\varphi(\varkappa,\varkappa'),$$

d. i., nach [20], zugleich mit Vertauschung der Buchstaben:

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha\sin b\sin c &= \cos a - \cos b\cos c\\ \cos\beta\sin a\sin c &= \cos b - \cos a\cos c\\ \cos\gamma\sin a\sin b &= \cos c - \cos a\cos b\end{aligned}\right\}\ [24]$$

Diese Formeln sind von der größten Wichtigkeit, weil sich aus ihnen die ganze sphärische Trigonometrie durch bloße Rechnung ableiten läßt, welches die Weitläufigkeit des obigen Beweises entschuldigen mag. Das Streben nach größter Allgemeinheit hat uns zu demselben geführt, da alle uns sonst bekannt gewordenen Beweise nur für Dreiecke, deren Seiten den Quadranten nicht übersteigen, gelten, und, sollen sie allgemein gemacht werden, ebenfalls weitläufige Betrachtungen erfordern. M. v. jedoch Grund-

Dreieck. Man fälle von γ auf $O\alpha$, wenn
unkt der Kugel iſt, das Perpendikel $\gamma\delta$, e
uf $O\alpha$ das Perpendikel $\delta\varepsilon$, und ziehe $\gamma\varepsilon$; ſo
lber [2]:

$$\gamma\varepsilon^2 = O\gamma^2 + O\varepsilon^2 - 2O\gamma \cdot O\varepsilon \cdot co$$
$$\gamma\varepsilon^2 = \gamma\delta^2 + \delta\varepsilon^2 - 2\gamma\delta \cdot \delta\varepsilon \cdot co$$

lber, wenn r den Halbmeſſer der Kugel beze

$$\gamma\delta = r \sin b, \quad \delta\varepsilon = O\delta \cdot \tang c = r \cos b$$
$$O\gamma = r, \quad O\varepsilon = O\delta \cdot \sec c = r \cos b$$

olglich, wenn man ſubſtituirt und mit r^2 d

$$1 + \cos b^2 \sec c^2 - 2 \cos a \cos b \sec c$$
$$= \sin b^2 + \cos b^2 \tang c^2 - 2 \sin b co$$
$$\sin b^2 + \frac{\cos b^2 \sin c^2}{\cos c^2} - \frac{2 \sin b \cos b \sin c}{\cos c}$$
$$= 1 + \frac{\cos b^2}{\cos c^2} - \frac{2 \cos a \cos b}{\cos c},$$
$$\sin b^2 \cos c^2 + \cos b^2 \sin c^2 - 2 \sin b \cos b \sin$$
$$= \cos b^2 + \cos c^2 - 2 \cos a \cos b \cos c,$$
$$2 \cos a \cos b \cos c = 2 \sin b \cos b \sin c \cos c \cos$$
$$+ \cos b^2 (1 - \sin c^2) + \cos c^2 (1 -$$
$$= 2 \sin b \cos b \sin c \cos c \cos \alpha + \cos b^2 \cos c^2 +$$
$$= 2 \sin b \cos b \sin c \cos c \cos \alpha + 2 \cos b^2 c$$
$$\cos a = \sin b \sin c \cos \alpha + \cos b \cos c$$

voraus die beiden andern Formeln unmittell
auſchung der Buchſtaben folgen.

ſelben Ausdruck erhält man ganz auf ähnliche Art für $\sin\beta^2 \sin a^2$. Alſo iſt $\sin\alpha^2 \sin b^2 = \sin\beta^2 \sin a^2$, folglich, da keine Seite, alſo auch offenbar kein Win- $> 180^0$ iſt, die Sinus alſo immer poſitiv ſind:

$$\left.\begin{aligned} \sin a \sin b &= \sin\beta \sin\alpha \\ \sin\beta \sin c &= \sin\gamma \sin b \\ \sin\gamma \sin a &= \sin\alpha \sin c \end{aligned}\right\} \quad [25]$$

us leicht der bekannte Satz folgt, daß in jedem ſphä- n Dreieck die Sinus der Seiten ſich wie die Sinus egenüberſtehenden Winkel verhalten.

9. Man denke ſich nun ein Dreieck $\alpha'\beta'\gamma'$, deſſen en und Winkel die Winkel und Seiten des gegebenen ecks zu 180^0 ergänzen (M. ſ. Supplementardreieck);

$$\begin{aligned} &a + a' = \beta + b' = \gamma + c' = 180^0; \\ &\alpha + \alpha' = b + \beta' = c + \gamma' = 180^0; \\ &\cos a' = -\cos\alpha,\ \cos b' = -\cos\beta,\ \cos c' = -\cos\gamma; \\ &\cos\alpha' = -\cos a,\ \cos\beta' = -\cos b,\ \cos\gamma' = -\cos c. \end{aligned}$$

nach [24.]:

$$\cos\alpha' \sin b' \sin c' = \cos a' - \cos b' \cos c.$$

$$-\cos a \sin\beta \sin\gamma = -\cos a - \cos\beta \cos\gamma,$$

$$\left.\begin{aligned} \cos a \sin\beta \sin\gamma &= \cos\alpha + \cos\beta \cos\gamma \\ \cos b \sin\alpha \sin\gamma &= \cos\beta + \cos\alpha \cos\gamma \\ \cos c \sin\alpha \sin\beta &= \cos\gamma + \cos\alpha \cos\beta \end{aligned}\right\} \quad [26]$$

der Vergleichung dieſer Formeln mit [24] erhellet, man immer die Seiten und Winkel gegen einander uſchen kann, wenn man nur die Coſinus negativ nt.

0. Relationen zwiſchen allen ſechs Stücken erhält auf folgende Art. Nach [24], [25], und bekannten metriſchen Formeln iſt:

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\gamma} &= \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\cos\beta + \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\cos\alpha \\ &= \frac{\sin a}{\sin c} \cdot \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c} \\ &+ \frac{\sin b}{\sin c} \cdot \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \end{aligned}$$

$$\frac{\sin(a+b)}{\sin c} = \frac{\cos\alpha + \cos\beta}{2\sin\frac{1}{2}\gamma^2},$$

$$\frac{\sin(a-b)}{\sin c} = \frac{\cos\beta - \cos\alpha}{2\cos\frac{1}{2}\gamma^2}.$$

Aber auch nach [25]:

$$\frac{\sin\alpha \pm \sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{\sin a \pm \sin b}{\sin c}.$$

Durch eine leichte Transformation (Goniome
ergiebt ſich aus den erhaltenen Reſultaten:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sin\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}\gamma} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}}{\cos\frac{1}{2}c^2}$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}\gamma} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}}{\sin\frac{1}{2}c^2}$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos}{\sin\frac{1}{2}\gamma^2}$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}}{\cos\frac{1}{2}\gamma^2}$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\gamma} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)\cos}{\sin c}$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\gamma} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)\sin}{\sin c}$$

61. Dividirt man nun (5) durch (3),
(5) durch (1), (6) durch (1); ſo erhält man

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}\gamma^2}{\sin\gamma} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)} \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}c}{s}$$

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\gamma &= \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\\
\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\gamma &= \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\\
\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a+b)\cot\tfrac{1}{2}c &= \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\\
\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a-b)\cot\tfrac{1}{2}c &= \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}
\end{aligned}\right\}\ [27]$$

ieſe Relationen zwiſchen fünf Stücken, aus denen ſich erhaupt zwölf Gleichungen durch Verkauſchung der Buchben ergeben, nennt man die Neperſchen Analoen. Mirif. Logar. canonis constructio. pp. 56. 61.

62. Multiplicirt man aber (2) mit (3) und (4), ſo (1) mit (3) und (4); ſo erhält man:

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)^2}{\sin\frac{1}{2}\gamma^2}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\gamma} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)^2}{\sin\frac{1}{2}c^2}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin c},$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)^2}{\cos\frac{1}{2}\gamma^2}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\gamma} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)^2}{\sin\frac{1}{2}c^2}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\sin c},$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)^2}{\sin\frac{1}{2}\gamma^2}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\gamma} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)^2}{\cos\frac{1}{2}c^2}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin c},$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)^2}{\cos\frac{1}{2}\gamma^2}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\gamma} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)^2}{\cos\frac{1}{2}c^2}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin c};$$

raus ſich, vermöge (5) und (6), durch beiderſeitige Diſion, und Ausziehung der Quadratwurzel, leicht ergiebt:

$$\left.\begin{aligned}
\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\tfrac{1}{2}c &= \sin\tfrac{1}{2}(a+b)\sin\tfrac{1}{2}\gamma\\
\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\tfrac{1}{2}c &= \sin\tfrac{1}{2}(a-b)\cos\tfrac{1}{2}\gamma\\
\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}c &= \cos\tfrac{1}{2}(a+b)\sin\tfrac{1}{2}\gamma\\
\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}c &= \cos\tfrac{1}{2}(a-b)\cos\tfrac{1}{2}\gamma
\end{aligned}\right\}\ [28]$$

ieſe höchſt merkwürdige Folge von Gleichungen hat Gauß heoria motus corporum coelestium. Hamb. 1809. 51. ohne Beweis bekannt gemacht, und ſie als ſolche, die in n Lehrbüchern noch fehlten, beſonders empfohlen. Man nnt ſie daher in Deutſchland gewöhnlich die Gauß-

)odurch die dortigen Formeln augenblicklich i
ben gegebene Geſtalt übergehen. Außerdei
Délambre in der Connaissance des tems
ieſelben Formeln bekannt gemacht, weshalb
Schriftſteller ſie gewöhnlich nach ihm benennen.
n obigem Beweiſe, welches vielleicht einigen
en könnte, die Quadratwurzel nicht auch nega
arf, erhellet ſogleich, wenn man überlegt, d
el 180° nicht überſteigen (47.), und daß, i
ie zweite Gleichung, $\alpha - \beta$ negativ iſt, wen
ſt, da dem größern Winkel immer die größe
jenüberſteht. Andere Beweiſe ſ. in Sniad
Trig. A. d. Poln. von Feldt. Lpzg. 1828.
Conn. d. tems. 1812. p. 349.; Traité d'A
par Délambre. T. I. p. 157.; Deſſen A
stronomie. p. 110.; Annales de Math.
XV. p. 284.; Littrows theoret. und pra
I. S. 10.; Puissant Géodésie. I. p. 65.

Allgemeine Auflöſung aller

63. Folgende Fälle können vorkommen:

α. die beiden anliegenden Winkel,

β. ein anliegender und der gegenüberstehende Winkel.

d. Gegeben alle drei Winkel.

64. Gegeben a, b, c
Gesucht α, β, γ } (63. a.)

Nach [24] ist

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c},$$

$$\cos\beta = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c},$$

$$\cos\gamma = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}.$$

Um leichter mit Logarithmen zu rechnen, berechne man den Hülfswinkel φ mittelst der Formel $\cos\varphi = \cos b \cos c$; so hat man

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos\varphi}{\sin b \sin c} = \frac{2\sin\frac{1}{2}(a+\varphi)\sin\frac{1}{2}(\varphi - a)}{\sin b \sin c}$$

Eben so für β und γ. Ferner ist, für $\frac{1}{2}(a+b+c) = s$:

$$1 + \cos\alpha = \frac{\cos a - (\cos b \cos c - \sin b \sin c)}{\sin b \sin c}$$

$$= \frac{\cos a - \cos(b+c)}{\sin b \sin c}$$

$$= \frac{2\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin b \sin c};$$

$$1 - \cos\alpha = \frac{-\cos a + (\cos b \cos c + \sin b \sin c)}{\sin b \sin c}$$

$$= \frac{-\cos a + \cos(b-c)}{\sin b \sin c}$$

$$= \frac{2\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin b \sin c};$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c}},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b \sin c}},$$

$$\tang\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s \sin(s-a)}},$$

$$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{\sin s \sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}{\sin b \sin c}.$$

Durch Weiterrückung der Buchstaben *construirt* man leicht

$$\tan\tfrac{1}{2}\alpha \tan\tfrac{1}{2}\beta \tan\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\sin a \sin b \sin c}{\sin s \sqrt{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}.$$

65. Gegeben b, c, α } (63. b. α.)
Geſucht β, γ, a }

Nach [24] iſt

$$\sin a \cos\beta = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin c},$$

$$\sin b \cos c \cos\alpha = \frac{\cos a \cos c - \cos b \cos c^2}{\sin c},$$

$$\sin a \cos\beta + \sin b \cos c \cos\alpha = \cos b \sin c;$$

$$\sin a = \frac{\sin b \sin\alpha}{\sin\beta} \text{ [25]};$$

$$\sin b \sin\alpha \cot\beta + \sin b \cos c \cos\alpha = \cos b \sin$$

$$\cot\beta = \frac{\cot b \sin c - \cos c \cos\alpha}{\sin\alpha},$$

$$\cot\gamma = \frac{\cot c \sin b - \cos b \cos\alpha}{\sin\alpha},$$

voraus β, γ ohne Zweideutigkeit gefunden n
über dieſe Formeln zur logarithmiſchen Rechnu
ind, ſo berechne man lieber $\frac{1}{2}(\beta+\gamma)$ und $\frac{1}{2}$
en Neperſchen Analogien

$$\cos\tfrac{1}{2}(b - c)$$

$$\sin a = \frac{\sin b \sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin c \sin \alpha}{\sin \gamma},$$

wo aber immer eine besondere Beurtheilung, ob $a <$ oder $> 90°$, nöthig ist. Diese vermeidet man, wenn man a aus

$$\cot \tfrac{1}{2} a = \frac{\cos \tfrac{1}{2}(\beta - \gamma)}{\cos \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma)} \cot \tfrac{1}{2}(b + c)$$
$$= \frac{\sin \tfrac{1}{2}(\beta - \gamma)}{\sin \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma)} \cot \tfrac{1}{2}(b - c);$$

bestimmt. Auch kann man sich, da man alle drei Winkel kennt, der Gaußischen Gleichungen zur Berechnung von a bedienen. Auch ist im Supplementardreieck nach (64)

$$\cos \tfrac{1}{2} a' = \sqrt{\frac{\sin \tfrac{1}{2}(a' + b' + c') \sin \tfrac{1}{2}(b' + c' - a')}{\sin b' \sin c'}},$$
$$\tfrac{1}{2}(a' + b' + c') + \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) = 270°,$$
$$\tfrac{1}{2}(b' + c' - a') + \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma - \alpha) = 90°,$$
$$\sin \tfrac{1}{2}(a' + b' + c') = -\cos \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma),$$
$$\sin \tfrac{1}{2}(b' + c' - a') = \cos \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma - \alpha),$$
$$\tfrac{1}{2} a' + \tfrac{1}{2} a = 90°, \; b' + \beta = 180°, \; c' + \gamma = 180°,$$
$$\cos \tfrac{1}{2} a' = \sin \tfrac{1}{2} a, \; \sin b' = \sin \beta, \; \sin c' = \sin \gamma,$$
$$\sin \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{-\cos \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) \cos \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma - \alpha)}{\sin \beta \sin \gamma}};$$

woraus ebenfalls a ohne Zweideutigkeit gefunden wird, wenn nach dem Obigen die drei Winkel bekannt sind.

Unmittelbar aus den gegebenen Stücken ist nach [24]

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$
$$= \sin b \cos \alpha \left\{ \sin c + \cos c \cdot \frac{\cot b}{\cos \alpha} \right\}.$$

Ist nun $\operatorname{tang} \varphi = \frac{\cot b}{\cos \alpha}$; so ist

$$\cos a = \frac{\cos b}{\operatorname{tang} \varphi} (\sin c + \cos c \operatorname{tang} \varphi)$$
$$= \frac{\cos b}{\sin \varphi} (\sin c \cos \varphi + \cos c \sin \varphi)$$
$$= \frac{\cos b \sin (c + \varphi)}{\sin \varphi}.$$

Kann a durch den Cosinus nicht mit erforderlicher Genauigkeit berechnet werden; so ist

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$
$$= \cos b \cos c + \sin b \sin c (1 - 2 \sin \tfrac{1}{2} \alpha^2)$$
$$= \cos (b - c) - 2 \sin b \sin c \sin \tfrac{1}{2} \alpha^2,$$

ist

$$\sin\tfrac{1}{2}a = \sin\tfrac{1}{2}(b-c)\sqrt{1+\tan g\,\Theta^2}$$
$$= \sin\tfrac{1}{2}(b-c)\sec\Theta = \frac{\sin\tfrac{1}{2}(}{co}$$

uch folgende Transformation scheint bei
lan setze

$$\cos a = 2\cos\tfrac{1}{2}a^2 - 1,$$
$$\cos(b-c) = 2(\cos\tfrac{1}{2}(b-c))^2 - 1;$$

giebt die obige Formel für cos a:

$$\cos\tfrac{1}{2}a^2 = (\cos\tfrac{1}{2}(b-c))^2 \cdot \left\{1 - \frac{\sin b\,si}{(\cos\tfrac{1}{2}(}\right.$$

er negative Theil des binomischen Facto
m, weil sonst $\cos\frac{1}{2}a$ imaginär wäre.
an setzen

$$\sin\eta = \frac{\sin\tfrac{1}{2}\alpha}{\cos\tfrac{1}{2}(b-c)}\sqrt{\sin b\sin c}.$$

so

$$\cos\tfrac{1}{2}a = \cos\tfrac{1}{2}(b-c)\sqrt{1-\sin\eta^2}$$
$$= \cos\tfrac{1}{2}(b-c)\cos\eta.$$

och eine Berechnungsart der Seite a lehrt
der Zeitschrift für Astronomie. I. S. 4
is, den ich beifügen will. Man setze

$$\sin\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\sin\left(\frac{b+c}{2}+u\right)\sin\left(\frac{b+c}{2}-u\right)}.$$

etzt man aber

$$\sin\tfrac{1}{2}a\sqrt{\sin b\sin c} = \sin w,$$

ist

$$\begin{aligned}2\cos\tfrac{1}{2}a^2 &= 1+\cos a = 1+\sin b\sin c\cos a+\cos b\cos c\\ &= 1+\sin b\sin c-2\sin b\sin c\sin\tfrac{1}{2}a^2+\cos b\cos c\\ &= 1-2\sin w^2+\cos(b-c)\\ &= \cos 2w+\cos(b-c)\end{aligned}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\cos\left(\frac{b-c}{2}+w\right)\cos\left(\frac{b-c}{2}-w\right)}.$$

s $\frac{1}{2}a\sqrt{\sin b\sin c}$ und $\sin\frac{1}{2}a\sqrt{\sin b\sin c}$ können offen- r nie >1 seyn, so daß sich also die Hülfswinkel u, w mer bestimmen lassen. Ferner setze man

$$\frac{\sin b\sin c\sin a\cot\frac{1}{2}a}{\sin(b+c)} = \operatorname{tang} y;$$

ist

$$\operatorname{tang} y = \frac{2\sin b\sin c\cos\frac{1}{2}a^2}{\sin(b+c)} = \frac{2\sin w^2}{\sin(b+c)}.$$

lglich nach dem Obigen

$$\begin{aligned}\sin\tfrac{1}{2}a^2 &= 1+\sin b\sin c-\operatorname{tang} y\sin(b+c)-\cos b\cos c\\ &= 1-\frac{\sin y\sin(b+c)}{\cos y}-\cos(b+c)\\ &= \frac{\cos y-\cos(b+c-y)}{\cos y},\end{aligned}$$

$$\sin\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\sin\left(\frac{b+c}{2}\right)\sin\left(\frac{b+c}{2}-y\right)}{\cos y}}.$$

s dem Ausdrucke für $2\sin\frac{1}{2}a^2$ ergiebt sich augen- klich

$$\cos\tfrac{1}{2}a^2 = \frac{\cos y+\cos(b+c-y)}{\cos y},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\cos\left(\frac{b+c}{2}\right)\cos\left(\frac{b+c}{2}-y\right)}{\cos y}},$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\operatorname{tang}\left(\frac{b+c}{2}\right)\operatorname{tang}\left(\frac{b+c}{2}-y\right)}.$$

blich setze man noch

$$\frac{\sin b\sin c\sin a\operatorname{tang}\frac{1}{2}a}{\sin(b-c)} = \operatorname{tang} z,$$

ebient. Auch iſt, weil man nun alle drei S
ach (64.)

$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c}}.$$

nmittelbar aus den gegebenen Stücken ergiebt
le Formel [26]:

$$\cos\alpha = \cos a \sin\beta \sin\gamma - \cos\beta\cos\gamma,$$

elche zur logarithmiſchen Rechnung bequemer
ird, wenn man $\cos a \operatorname{tang}\beta = \cot\Theta$ ſetz
an erhält:

$$\cos\alpha = \frac{\cos\beta \sin(\gamma - \Theta)}{\sin\Theta}.$$

67. Gegeben α, β, γ } (63. d.)
Geſucht a, b, c }

ach [26] iſt

$$\cos a = \frac{\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma},$$

$$\cos b = \frac{\cos\beta + \cos\alpha\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\gamma},$$

$$\cos c = \frac{\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta};$$

nd ganz auf ähnliche Art, wie in (64.) in Be

$$\sin a = \frac{2\sqrt{-\cos s' \cos(s'-\alpha)\cos(s'-\beta)\cos(s'-\gamma)}}{\sin\beta\sin\gamma}.$$

Für $\cos\beta\cos\gamma = \cos\varphi$ erhält man

$$\cos a = \frac{\cos\alpha + \cos\varphi}{\sin\beta\sin\gamma} = \frac{2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\varphi)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\varphi)}{\sin\beta\sin\gamma}.$$

68. Gegeben a, b, α
Gesucht β, c, γ } (63. b. β.)

Man suche zuerst β nach der Formel

$$\sin\beta = \frac{\sin b\sin\alpha}{\sin a},$$

und dann c, γ nach den Neperschen Formeln:

$$\cot\tfrac{1}{2}c = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\cot\tfrac{1}{2}(a+b) = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\cot\tfrac{1}{2}(a-b);$$

$$\tang\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cot\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\cot\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta).$$

Man kann aber auch c, γ unmittelbar aus den Datis erhalten. Setzt man nämlich $\cos b\tang\alpha = \tang\varphi$; so erhält man mittelst der aus (65.) sich leicht ergebenden Formel

$$\cot a\sin b = \cot\alpha\sin\gamma + \cos b\cos\gamma,$$

nach einigen Reductionen:

$$\sin(\gamma+\varphi) = \frac{\tang b\sin\varphi}{\tang a}.$$

Setzt man dagegen $\cos\alpha\tang b = \tang\psi$; so erhält man aus der Formel

$$\cos b\cos c + \cos a\sin b\sin c = \cos a \text{ [24]:}$$

$$\cos(c-\psi) = \frac{\cos a\cos\psi}{\cos b},$$

Der Winkel β, auf welchem die ganze erste Auflösung beruhet, wird in diesem Falle durch seinen Sinus gefunden. Daher kann β zwei, einander zu 180^0 ergänzende, Werthe haben, und die Aufgabe also zwei Auflösungen zulassen. Es ist daher nöthig, die möglichen Fälle näher zu bestimmen.

b. Für $a < 90^0$ ist $b > 90^0$.

c. Für $a > 90^0$ ist $b < 90^0$.

2. Für $\frac{1}{2}(\alpha + \beta) < 90^0$ ist auch $\frac{1}{2}(a$
$+ b < 180^0$.

a. Für $a = 90^0$ ist $b < 90^0$.

b. Für $a < 90^0$ läßt sich keine allge
nung geben. Ist der berechnete stumpfe
$\gtrless 180^0 - a$, so ist $a + b \gtrless 180^0$, da doch a
also muß man $b < 90^0$ nehmen. Ist
stumpfe Werth von b aber $< 180^0 - a$, s
Werthe $a + b < 180^0$, so daß dann also
gen der Aufgabe möglich sind.

c. Für $a > 90^0$ ist $b < 90^0$.

3. Für $\frac{1}{2}(\alpha + \beta) > 90^0$ ist $\frac{1}{2}(a +$
$+ b > 180^0$.

a. Für $a = 90^0$ ist $b > 90^0$.

b. Für $a < 90^0$ ist $b > 90^0$.

c. Für $a > 90^0$ sey der berechnete spitz
$\lessgtr 180^0 - a$, also $a + b \lessgtr 180^0$, da doch a
Also muß man $b > 90^0$ setzen. Ist aber
spitze Werth von $b > 180^0 - a$, so ist fü
he $a + b > 180^0$, und die Aufgabe folglich

sphaericor. occurrunt, praemissa doctrina de angulo trilatero. Halae. 1825. Außer diesen besondern Schriften vorzüglich Kästners Anfangsgründe und Bertrand Developpement nouveau de la partie élém. d. Math. T. II. Trig. Chap. V.

71. Bei der Auflösung rechtwinkliger sphärischer Dreiecke können, da der rechte Winkel α immer an sich gegeben ist, folgende Fälle eintreten:

a. Gegeben zwei Seiten.

α. Die beiden Katheten.

β. Die Hypotenuse und eine Kathete.

b. Gegeben eine Seite und ein schiefer Winkel.

α. Eine Kathete und der anliegende Winkel.

β. Eine Kathete und der Gegenwinkel.

γ. Die Hypotenuse und ein anliegender Winkel.

c. Gegeben die beiden schiefen Winkel.

72. Gegeben b, c
Gesucht a, β, γ } (71. a. α.)

Aus [24] und [26] ergiebt sich für $\alpha = 90^0$:

$$\cos a = \cos b \cos c,$$
$$\cos \beta = \cos b \sin \gamma,$$
$$\cos \gamma = \cos c \sin \beta.$$

Nach [25] ist aber

$$\sin \gamma = \frac{\sin c \sin \beta}{\sin b}, \quad \sin \beta = \frac{\sin b \sin \gamma}{\sin c}.$$

Also $$\cos \beta = \frac{\cos b \sin c \sin \beta}{\sin b},$$

$$\cos \gamma = \frac{\cos c \sin b \sin \gamma}{\sin c},$$

d. i. $$\operatorname{tang} \beta = \frac{\operatorname{tang} b}{\sin c}, \quad \operatorname{tang} \gamma = \frac{\operatorname{tang} c}{\sin b}.$$

Da sich hieraus $\sin c = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} \beta}$ ergiebt, und $\sin c$ immer positiv ist; so haben $\operatorname{tang} b$, $\operatorname{tang} \beta$ immer einerlei Zeichen, d. h. b, β, und eben so c, γ, sind immer von einerlei Art.

geben a, b
ſucht c, β, γ } (71. a. β.)

iſt $\cos c = \frac{\cos a}{\cos b}$. Aber auch $\sin a : \sin b$
$\sin \beta = 1 : \sin \beta$ [25]. Alſo $\sin \beta =$
urch β völlig beſtimmt wird, da nach (72.) β
r gleichartig iſt. Endlich iſt nach (72.)

$$\sin c \sin \beta = \frac{\cos c \sin b}{\sin a} = \frac{\cos a}{\sin a} \cdot \frac{\sin b}{\cos b},$$

$$\cos \gamma = \cot a \operatorname{tang} b.$$

metrie. 41.) immer

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\gamma^2 = \frac{1 - \cos \gamma}{1 + \cos \gamma};$$ ſo iſt

$$\ldots^2 = \frac{\operatorname{tang} a - \operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} a + \operatorname{tang} b} = \frac{\sin (a - b)}{\sin (a + b)},$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{\sin (a - b)}{\sin (a + b)}},$$

zel poſitiv zu nehmen iſt, da $\frac{1}{2}\gamma$ den Quadran-
erſteigt. Dieſe Formel iſt zur Berechnung be-
uchbar, wenn γ ſehr ſpitz iſt.

oder $b+c \gtrless 180^\circ$, $\beta+\gamma \gtrless 180^\circ$. Für $b+c=180^\circ$ ist $\frac{\sin(b-c)}{\sin(b+c)}$, also auch das Product

$$\tang\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)\tang\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma),$$

d. i. $\tang.\frac{1}{2}(\beta+\gamma)=\infty$. Folglich $\frac{1}{2}(\beta+\gamma)=90^\circ$, $\beta+\gamma=180^\circ$.

75. Gegeben b, γ
Gesucht a, c, β } (71. b. α.)

Nach (73.) und (72.) ist:

$$\cot a = \frac{\cos\gamma}{\tang b} = \cos\gamma\cot b,$$

$$\tang c = \sin b\tang\gamma,\ \cos\beta = \cos b\sin\gamma.$$

76. Gegeben b, β
Gesucht a, c, γ } (71. b. β.)

Nach (72.) und (73.) hat man:

$$\sin a = \frac{\sin b}{\sin\beta},\ \cos c = \frac{\cos a}{\cos b},$$

$$\cos\gamma = \cot a\tang b.$$

Auch ist $\sin\gamma = \frac{\cos\beta}{\cos b}$.

Die Auflösung beruhet auf der Bestimmung von a, welches durch seinen Sinus gefunden wird, und demnach zwei Werthe haben kann. Sey

1. $\beta = 90^\circ$, also $\alpha+\beta=180^\circ$, $a+b=180^\circ$ (68.). Aber $b=90^\circ$, da β und b von einerlei Art sind (72.). Also auch $a=90^\circ$.

2. $\beta < 90^\circ$, $\alpha+\beta<180^\circ$, $a+b<180^\circ$ (68.), $b<90^\circ$ (72.). Hier kann also $a \lessgtr 90^\circ$ seyn. Ist jedoch der berechnete stumpfe Werth von $a \lessgtr 180^\circ - b$, so würde $a+b \lessgtr 180^\circ$ seyn, und man muß also $a<90^\circ$ setzen; die Aufgabe bleibt folglich nur dann unbestimmt, wenn der berechnete stumpfe Werth von $a<180^\circ-b$ ist.

3. $\beta > 90^\circ$, $\alpha+\beta>180^\circ$, $a+b>180^\circ$ (68.), $b>90^\circ$ (72.). Es kann also hier wieder $a \lessgtr 90^\circ$ seyn. Ist jedoch der berechnete spitze Werth von $a \lessgtr 180^\circ - b$, so würde $a+b \lessgtr 180^\circ$ seyn, und

glich $a > 90^0$ nehmen, ſo daß alſo die Auf-
nn unbeſtimmt bleibt, wenn der berechnete
von $a > 180^0 - b$ iſt.

geben a, β
ſucht b, c, γ } (71. b. γ.)

$a : \sin b := \sin a : \sin\beta = 1 : \sin\beta$;

$= \sin a \sin\beta$, wodurch b ohne Zweideutigkeit
d, da es mit β gleichartig iſt (72.). Ferner
urch Vertauſchung der Buchſtaben leicht

$$\cos\beta = \cot a \operatorname{tang} c ,$$

$$\operatorname{tang} c = \frac{\cos\beta}{\cot a} = \cos\beta \operatorname{tang} a .$$

rhält man

$$\operatorname{ng}\gamma = \frac{\operatorname{tang} c}{\sin b} = \frac{\cos\beta \operatorname{tang} a}{\sin a \sin\beta} ,$$

$$\cot\gamma = \cos a \operatorname{tang}\beta .$$

eben β, γ
ucht a, b, c } (71. c.)

$$= \sin b \cos c \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\beta$$
$$= \frac{\sin b}{\cos b} \cos b \cos c \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\beta$$
$$= \cos a \operatorname{tang} b \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\beta \quad (72.)$$

Eben so

$$\cos(a - c) = \cos a \cos c + \sin a \sin c$$
$$= \cos b \cos c^2 + \frac{\sin b}{\sin \beta} \sin c \quad (72.\ 73.)$$
$$= \cos b + \left\{ \frac{\sin b}{\sin \beta} - \cos b \sin c \right\} \sin c$$
$$= \cos b + \left\{ \frac{1}{\sin \beta} - \cot b \sin c \right\} \sin b \sin c$$
$$= \cos b + \left\{ \frac{1}{\sin \beta} - \frac{1}{\operatorname{tang} \beta} \right\} \sin b \sin c \quad (72.)$$
$$= \cos b + \frac{1 - \cos \beta}{\sin \beta} \cdot \sin b \sin c$$
$$= \cos b + \sin b \sin c \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\beta.$$
$$\operatorname{tang}(a - c) = \frac{\sin b \cos c \operatorname{tang} \frac{1}{2}\beta}{\cos b + \sin b \sin c \operatorname{tang} \frac{1}{2}\beta}$$
$$= \frac{\cos a \operatorname{tang} b \operatorname{tang} \frac{1}{2}\beta}{\cos b + \sin b \sin c \operatorname{tang} \frac{1}{2}\beta}.$$

79. Neper (Mirif. Logar. canonis descriptio. p. 33.) und Wolf in den Elem. Sphaericorum et Trig. sphaer. 100 — 113., haben die Auflösung der rechtwinkligen sphärischen Dreiecke auf eine allgemeine Regel zu bringen gesucht, welche ich hier nach Wolf darstellen will. Man denke sich nämlich mit Uebergehung des rechten Winkels die Winkel und Seiten in steriger Folge und nehme irgend ein Stück als mittleres (pars media) an; so nennt Wolf die beiden unmittelbar daran liegenden Stücke verbundene, die von dem mittlern durch irgend ein anderes Stück getrennten dagegen getrennte Stücke (partes conjunctas et sejunctas.). Leicht erhellet, daß die im Vorhergehenden gefundenen Formeln zur Auflösung der rechtwinkligen Dreiecke sich auch auf folgende Art darstellen lassen:

$$\cos a = \cot \beta \cot \gamma \quad (76^a)$$
$$\cos(90^\circ - b) = \cot \gamma \cot(90^\circ - c) \quad (72),$$
$$\cos(90^\circ - c) = \cot \beta \cot(90^\circ - b) \quad (72),$$
$$\cos \beta = \cot a \cot(90^\circ - c) \quad (73),$$
$$\cos \gamma = \cot a \cot(90^\circ - b) \quad (73).$$

$$\cos(90° - c) = \sin a \sin\gamma \quad (73),$$
$$\cos\beta = \sin\gamma \sin(90° - b) \quad (72)$$
$$\cos\gamma = \sin\beta \sin(90° - c) \quad (72).$$

Dies giebt Wolfs erſten Satz (a. a. O.
mni triangulo sphaerico rectangulo, e
ectangulum ex sinu toto in cosinum p
equatur rectangulo ex sinibus partium

In obigen zehn Gleichungen, alſo auch i
Regeln, iſt offenbar die Auflöſung aller bei
Dreiecken vorkommender Fälle enthalten.
Wolfs trigonom. Tafeln. Halle. 1772. S.

Nimmt man nicht ſtatt b, c, ſondern
ie Complemente; ſo erhalten die Formeln
alt:

$$\sin(90° - a) = \tang(90° - \beta)\tang(90°$$
$$\sin b = \tang(90° - \gamma)\tang c,$$
$$\sin c = \tang(90° - \beta)\tang b,$$
$$\sin(90° - \beta) = \tang(90° - a)\tang c,$$
$$\sin(90° - \gamma) = \tang(90° - a)\tang b.$$

Sinus totus cum sinu partis mediae
angentibus partium circumpositarum

M. ſ. über dieſe Regeln, deren Inbegriff Wolf Trigonometria catholica (Elementa Mathes. 103.) nennt, Baermann de regulis trig. sphaer. catholicis. Witemb. 1766., und einen Aufſatz von Pingré in den Mém. de Paris. 1756. Montucla (T. II. p. 25.) tadelt die franzöſiſchen Schriftſteller, daß ſie dieſe Regeln übergingen, und lobt Wolf und die Engländer. Da jedes ſchiefwinklige Dreieck in zwei rechtwinklige zerlegt werden kann, ſo ſind die Regeln auch bei der Auflöſung ſchiefwinkliger Dreiecke brauchbar. Auch auf ebene Dreiecke ſind ſie anwendbar, wenn man ſtatt der trigonometriſchen Linien der Seiten die Seiten ſelbſt ſetzt.

Auflöſung ſphäriſcher Dreiecke in beſondern Fällen.

80. Aus (29.) ergiebt ſich

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - 1}{(e^{x\sqrt{-1}} + 1)\sqrt{-1}},$$

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}y = \frac{e^{y\sqrt{-1}} - 1}{(e^{y\sqrt{-1}} + 1)\sqrt{-1}}.$$

Hat man nun zwiſchen x und y die Gleichung $\text{tang}\frac{1}{2}x = \Theta\,\text{tang}\frac{1}{2}y$ wo Θ irgend eine conſtante Größe bezeichnet; ſo iſt

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} - 1}{e^{x\sqrt{-1}} + 1} = \frac{\Theta(e^{y\sqrt{-1}} - 1)}{e^{y\sqrt{-1}} + 1},$$

$$e^{x\sqrt{-1}} = \frac{(\Theta + 1)\,e^{y\sqrt{-1}} - (\Theta - 1)}{\Theta + 1 - (\Theta + 1)e^{y\sqrt{-1}}},$$

oder, für $\frac{\Theta - 1}{\Theta + 1} = \varkappa$:

$$e^{x\sqrt{-1}} = e^{y\sqrt{-1}} \cdot \left\{\frac{1 - \varkappa e^{-y\sqrt{-1}}}{1 - \varkappa e^{y\sqrt{-1}}}\right\},$$

woraus ſich leicht ergiebt:

$$e^{x\sqrt{-1}} = e^{-y\sqrt{-1}} \cdot \left\{\frac{1 - \frac{1}{\varkappa}e^{y\sqrt{-1}}}{1 - \frac{1}{\varkappa}e^{-y\sqrt{-1}}}\right\}.$$

$$+ \tfrac{1}{4}x^4(e^{4y\sqrt{-1}} - e^{$$
$$+ \ldots\ldots$$
$$= y\sqrt{-1} + 2x\sin y.\sqrt{-1} + \tfrac{2}{2}x^2\sin 2y.\sqrt{$$
$$+ \tfrac{2}{3}x^3\sin 3y.\sqrt{-1} + \ldots$$
$$\tfrac{1}{2}x = \tfrac{1}{2}y + x\sin y + \tfrac{1}{2}x^2\sin 2y$$
$$+ \tfrac{1}{3}x^3\sin 3y + \tfrac{1}{4}x^4\sin 4y +$$

(Logarithmus. 25. Thl. I. S. 877.)

In Beziehung auf den zweiten Ausdruc

$$x\sqrt{-1} = -y\sqrt{-1} + \log n\left(1 - \frac{1}{x}e^{y\sqrt{-}}\right.$$
$$- \log n\left(1 - \frac{1}{x}e^{-y\sqrt{-}}\right.$$
$$= -y\sqrt{-1} - \frac{1}{x}\left(e^{y\sqrt{-1}} - e^{-y\sqrt{-1}}\right)$$
$$- \frac{1}{2x^2}\left(e^{2y\sqrt{-1}} - e^{-2y\sqrt{-}}\right.$$
$$- \frac{1}{3x^3}\left(e^{3y\sqrt{-1}} - e^{-3y\sqrt{-}}\right.$$
$$- \frac{1}{4x^4}\left(e^{4y\sqrt{-1}} - e^{-4y\sqrt{-}}\right.$$
$$- \ldots\ldots$$
$$= -y\sqrt{-1} - \frac{2}{x}\sin y.\sqrt{-1} - \frac{2}{2x^2}\sin$$
$$- \frac{2}{3x^3}\sin 3y.\sqrt{-1} - \ldots$$

$$\frac{\frac{1}{\Theta}-1}{\frac{1}{\Theta}+1}=\frac{1-\Theta}{1+\Theta}=-x$$

ist; so erhält man leicht durch Vertauschung der Buchstaben:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}y &= \tfrac{1}{2}x - x\sin x + \tfrac{1}{2}x^2\sin 2x \\ &\quad - \tfrac{1}{3}x^3\sin 3x + \tfrac{1}{4}x^4\sin 4x - \ldots \\ &= -\tfrac{1}{2}x + \frac{1}{x}\sin x - \frac{1}{2x^2}\sin 2x \\ &\quad + \frac{1}{3x^3}\sin 3x - \frac{1}{4x^4}\sin 4x + \ldots\end{aligned}$$

81. Hieraus ergiebt sich eine merkwürdige Auflösung durch Reihen für den Fall, wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind. Vergleicht man nämlich mit der allgemeinen Gleichung

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}x = \Theta\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}y$$

die Neperschen Gleichungen:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\cos\frac{1}{2}(b-c)}{\cos\frac{1}{2}(b+c)},$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\sin\frac{1}{2}(b-c)}{\sin\frac{1}{2}(b+c)},$$

oder

$$\operatorname{tang}|90^\circ - \tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)| = \frac{\cos\frac{1}{2}(b+c)}{\cos\frac{1}{2}(b-c)}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha,$$

$$\operatorname{tang}|90^\circ - \tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)| = \frac{\sin\frac{1}{2}(b+c)}{\sin\frac{1}{2}(b-c)}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha;$$

so ist in Bezug auf die erste:

$$\tfrac{1}{2}x = 90^\circ - \tfrac{1}{2}(\beta+\gamma),\ \tfrac{1}{2}y = \tfrac{1}{2}\alpha,$$

$\Theta = \frac{\cos\frac{1}{2}(b+c)}{\cos\frac{1}{2}(b-c)}$; und in Bezug auf die zweite:

$$\tfrac{1}{2}x = 90^\circ - \tfrac{1}{2}(\beta-\gamma),$$

$$\tfrac{1}{2}y = \tfrac{1}{2}\alpha,\ \Theta = \frac{\sin\frac{1}{2}(b+c)}{\sin\frac{1}{2}(b-c)}.$$

Also nach (80.), da

$$\begin{aligned}1, x &= \frac{\cos\frac{1}{2}(b+c)-\cos\frac{1}{2}(b-c)}{\cos\frac{1}{2}(b+c)+\cos\frac{1}{2}(b-c)} \\ &= -\frac{2\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}{2\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c} = -\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}b}{\cot\frac{1}{2}c}\end{aligned}$$

ist:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma) &= \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\alpha + \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}b}{\cot\frac{1}{2}c}\sin\alpha \\ &\quad - \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}b^2}{2\cot\frac{1}{2}c^2}\sin 2\alpha + \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}b^3}{3\cot\frac{1}{2}c^3}\sin 3\alpha - \ldots\end{aligned}$$

$$\tfrac{1}{2}(\beta - \gamma) = \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\alpha - \frac{\text{tang}\,\tfrac{1}{2}b}{\text{tang}\,\tfrac{1}{2}c}\sin\alpha$$

$$- \frac{\text{tang}\,\tfrac{1}{2}b^2}{2\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}c^2}\sin 2\alpha - \frac{\text{tang}\,\tfrac{1}{2}b^3}{3\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}c^3}\text{si}$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{2}\alpha + \frac{\text{tang}\,\tfrac{1}{2}c}{\text{tang}\,\tfrac{1}{2}b}\sin\alpha$$

$$+ \frac{\text{tang}\,\tfrac{1}{2}c^2}{2\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}b^2}\sin 2\alpha + \frac{\text{tang}\,\tfrac{1}{2}c^3}{3\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}b^3}\text{si}$$

Aus $\frac{1}{2}(\beta + \gamma)$, $\frac{1}{2}(\beta - \gamma)$ ergiebt sich leicht

Die Seite a findet man auf folgende Art
ine Reihe. Es ist

$$\cos a = \sin b \sin c \cos\alpha + \cos b \cos c$$

$$\sin\tfrac{1}{2}a^2 = \frac{1 - \sin b \sin c \cos\alpha - \cos b \cos}{2}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}a^2 = \frac{1 + \sin b \sin c \cos\alpha + \cos b \cos}{2}$$

Den Ausdruck für $\sin\frac{1}{2}a^2$ setze man $= p^2 - 2p$
also

$$p^2 + q^2 = \frac{1 - \cos b \cos c}{2}, \quad pq = \tfrac{1}{4}\sin b \text{ si}$$

$$p^2 + q^2 = \frac{1 - (1 - 2\sin\tfrac{1}{2}b^2)(1 - 2\sin\tfrac{1}{2}}{2}$$

$$= \sin\tfrac{1}{2}b^2 \cos\tfrac{1}{2}c^2 + \cos\tfrac{1}{2}b^2 \sin\tfrac{1}{2}c^2$$

$$2pq = 2\sin\tfrac{1}{2}b \cos\tfrac{1}{2}c \,.\, \cos\tfrac{1}{2}b \sin\tfrac{1}{2}c.$$

Die Summe dieser beiden Gleichungen giebt

er

$$\frac{q}{p} = \frac{\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c} = \frac{\tang\frac{1}{2}b}{\tang\frac{1}{2}c}.$$

er $p^2 - 2pq\cos\alpha + q^2 = \sin\frac{1}{2}a^2$

$$= p^2 - 2pq \cdot \frac{e^{\alpha\sqrt{-1}} + e^{-\alpha\sqrt{-1}}}{2} + q^2$$

$$= p^2 - pq(e^{\alpha\sqrt{-1}} + e^{-\alpha\sqrt{-1}}) + q^2$$

$$= (p - qe^{\alpha\sqrt{-1}})(p - qe^{-\alpha\sqrt{-1}})$$

$$= p^2\left(1 - \frac{q}{p}e^{\alpha\sqrt{-1}}\right)\left(1 - \frac{q}{p}e^{-\alpha\sqrt{-1}}\right),$$

$$\text{gn}\sin\tfrac{1}{2}a = 2\text{log}p - \frac{q}{p}\left(e^{\alpha\sqrt{-1}} + e^{-\alpha\sqrt{-1}}\right)$$

$$- \frac{q^2}{2p^2}\left(e^{2\alpha\sqrt{-1}} + e^{-2\alpha\sqrt{-1}}\right)$$

$$- \frac{q^3}{3p^3}\left(e^{3\alpha\sqrt{-1}} + e^{-3\alpha\sqrt{-1}}\right)$$

$$- \frac{q^4}{4p^4}\left(e^{4\alpha\sqrt{-1}} + e^{-4\alpha\sqrt{-1}}\right)$$

$$- \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

raus ſich, wenn man für $\frac{q}{p}$ den einen oder den andern igen Werth ſetzt, leicht ergiebt:

$$\text{log}\sin\tfrac{1}{2}a = \text{log}(\sin\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c) - \frac{\tang\frac{1}{2}c}{\tang\frac{1}{2}b}\cos\alpha - \frac{\tang\frac{1}{2}c^2}{2\tang\frac{1}{2}b^2}\cos 2\alpha - \ldots$$

$$= \text{log}(\cos\tfrac{1}{2}b\sin\tfrac{1}{2}c) - \frac{\tang\frac{1}{2}b}{\tang\frac{1}{2}c}\cos\alpha - \frac{\tang\frac{1}{2}b^2}{2\tang\frac{1}{2}c^2}\cos 2\alpha - \ldots$$

ſetzt man

$$\cos\tfrac{1}{2}a^2 = p^2 + 2pq\cos\alpha + q^2;$$

erhält man nach einer ganz ähnlichen Entwickelung:

$$\text{log}\cos\tfrac{1}{2}a = \text{log}(\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c) + \frac{\tang\frac{1}{2}b}{\cot\frac{1}{2}c}\cos\alpha - \frac{\tang\frac{1}{2}b^2}{2\cot\frac{1}{2}c^2}\cos 2\alpha + \ldots$$

$$= \text{log}(\sin\tfrac{1}{2}b\sin\tfrac{1}{2}c) + \frac{\cot\frac{1}{2}c}{\tang\frac{1}{2}b}\cos\alpha - \frac{\cot\frac{1}{2}c^2}{2\tang\frac{1}{2}b^2}\cos 2\alpha + \ldots$$

82. Vergleicht man die allgemeine Gleichung in (80.) t den Neperſchen Gleichungen

$$\tang\tfrac{1}{2}(b + c) = \frac{\cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma)}{\cos\frac{1}{2}(\beta + \gamma)}\tang\tfrac{1}{2}a,$$

$$1,\quad x = \frac{\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma) - \cos\frac{1}{2}(\beta\cdot}{\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma) + \cos\frac{1}{2}(\beta\cdot}$$

$$= \frac{2\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma}{2\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma} = \frac{\tang\frac{1}{2}\beta}{\cot\frac{1}{2}\gamma}$$

$$\tfrac{1}{2}(b+c) = \tfrac{1}{2}a + \frac{\tang\frac{1}{2}\beta}{\cot\frac{1}{2}\gamma}\sin a$$

$$+ \frac{\tang\frac{1}{2}\beta^2}{2\cot\frac{1}{2}\gamma^2}\sin 2a + \frac{\tang\frac{1}{2}\beta^3}{3\cot\frac{1}{2}\gamma^3}$$

$$= -\tfrac{1}{2}a - \frac{\cot\frac{1}{2}\gamma}{\tang\frac{1}{2}\beta}\sin a$$

$$- \frac{\cot\frac{1}{2}\gamma^2}{2\tang\frac{1}{2}\beta^2}\sin 2a - \frac{\cot\frac{1}{2}}{3\tang}$$

$$2,\quad x = \frac{\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma) - \sin\frac{1}{2}(\beta+}{\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma) + \sin\frac{1}{2}(\beta+}$$

$$= -\frac{2\cos\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma}{2\sin\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma} = -\frac{\tang}{\tang}$$

$$\tfrac{1}{2}(b-c) = \tfrac{1}{2}a - \frac{\tang\frac{1}{2}\gamma}{\tang\frac{1}{2}\beta}\sin a$$

$$+ \frac{\tang\frac{1}{2}\gamma^2}{2\tang\frac{1}{2}\beta^2}\sin 2a - \frac{\tang\frac{1}{2}\gamma^3}{3\tang\frac{1}{2}\beta^3}$$

$$= -\tfrac{1}{2}a + \frac{\tang\frac{1}{2}\beta}{\tang\frac{1}{2}\gamma}\sin 3a -$$

$$- \frac{\tang\frac{1}{2}\beta^2}{2\tang\frac{1}{2}\gamma^2}\sin 2a + \frac{\tang\frac{1}{2}\beta^3}{3\tang\frac{1}{2}\gamma^3}$$

Aus dieſen beiden Gleichungen findet man b, noch α zu finden, verſehe man jeden Buch

tang $\frac{1}{2}\gamma$. Auch ist $\alpha' + a = 180^0$, $2\alpha' + 2a = 2.180^0$, $3\alpha' + 3a = 3.180^0$, u. s. f.; also $\cos\alpha' = -\cos a$, $\cos 2\alpha' = \cos 2a$, $\cos 3\alpha' = -\cos 3a$, f. Also

$$\log\cos\tfrac{1}{2}a = \log(\cos\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma) + \frac{\cot\frac{1}{2}\gamma}{\cot\frac{1}{2}\beta}\cos a - \frac{\cot\frac{1}{2}\gamma^2}{2\cot\frac{1}{2}\beta^2}\cos 2a + \ldots$$

$$= \log(\sin\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma) + \frac{\cot\frac{1}{2}\beta}{\cot\frac{1}{2}\gamma}\cos a - \frac{\cot\frac{1}{2}\beta^2}{2\cot\frac{1}{2}\gamma^2}\cos 2a + \ldots$$

$$\log\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \log(\sin\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma) - \frac{\cot\frac{1}{2}\beta}{\tan\frac{1}{2}\gamma}\cos a - \frac{\cot\frac{1}{2}\beta^2}{2\tan\frac{1}{2}\gamma}\cos 2a - \ldots$$

$$= \log(\cos\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma) - \frac{\tan\frac{1}{2}\gamma}{\cot\frac{1}{2}\beta}\cos a - \frac{\tan\frac{1}{2}\gamma^2}{2\cot\frac{1}{2}\beta^2}\cos 2a - \ldots$$

f. über diese Entwickelungen Legendre Géomé- p. 420. Littrow theoret. u. prakt. Astr. I. 0.

83. Soll aus den drei Seiten eines sphärischen Drei-, von denen zwei, z. B. a, b, nahe $= 90^0$ sind, der diesen Seiten eingeschlossene Winkel gefunden werden; tze man $a = 90^0 - a_1$; $b = 90^0 - b_1$, $\gamma = c + x$, nach der Voraussetzung a_1, b_1, x nur kleine Größen . Es ist

$$\cos\gamma = \frac{\cos c - \cos a\cos b}{\sin a\sin b},$$

$$\cos(c+x) = \frac{\cos c - \sin a_1\sin b_1}{\cos a_1\cos b_1}$$

$$= \frac{\cos c - (a_1 - \frac{1}{2}a_1^3 + \ldots)(b_1 - \frac{1}{2}b_1^3 + \ldots)}{(1 - \frac{1}{2}a_1^2 + \ldots)(1 - \frac{1}{2}b_1^2 + \ldots)}$$

$$= \frac{\cos c - a_1b_1}{1 - \frac{1}{2}a_1^2 - \frac{1}{2}b_1^2},$$

n man Größen der vierten Ordnung vernachlässigt.

$$\cos(c+x) = \cos c\cos x - \sin c\sin x$$
$$= \cos c(1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \ldots) - \sin c(x - \tfrac{1}{6}x^3 + \ldots)$$
$$= \cos c - x\sin c,$$

n man bloß die erste Potenz von x beibehält. Also

$$\cos c - x\sin c = \frac{\cos c - a_1b_1}{1 - \frac{1}{2}(a_1^2 + b_1)^2},$$

$$= \frac{(\cos c - a_1 b_1)(1 + \frac{1}{4}a_1^2 + \frac{1}{4}b_1^2)}{1 - \frac{1}{4}(a_1^2 + b_1^2)^2}.$$

man nun bloß a_1^2, b_1^2 bei; so ergiebt sic

$$c - x \sin c = \cos c + \tfrac{1}{2}(a_1^2 + b_1^2)\cos c - a$$

$$x = \frac{a_1 b_1 - \frac{1}{2}(a_1^2 + b_1^2)\cos c}{\sin c}.$$

ebt, für $\frac{1}{2}(a_1 + b_1) = p$, $\frac{1}{2}(a_1 - b_1$

$p + q$, $b_1 = p - q$:

$$= \frac{p^2(1 - \cos c) - q^2(1 + \cos c)}{\sin c}$$

$$= p^2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} c - q^2 \cot \tfrac{1}{2} c.$$

nden ist, wenn auch p, q in Secunden ausgedr

$$x = \frac{p^2}{\varrho} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} c - \frac{q^2}{\varrho} \cot \tfrac{1}{2} c.$$

Reduction der Winkel auf den Horizon
ist diese Gleichung von häufigem Gebra
e des gemessenen Winkels selten bedeutend
len abweicht.

Sind die Seiten eines sphärischen Dreiecks
Radius der Kugel, zu welcher es gehö
wird man auch mit Vortheil Näherunge

$$1 + \frac{b^2}{6r^2} + \frac{c^2}{6r^2};$$

ſo erhält man immer mit Vernachläſſigung der Glieder von höhern Dimenſionen als der vierten:

$$\cos a = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^4 + b^4 + c^4 - 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)}{24bcr^2}.$$

Man denke ſich nun ein ebenes Dreieck $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$, deſſen Seiten den Seiten a, b, c des gegebenen ſphäriſchen Dreiecks gleich ſind; ſo ergiebt ſich aus (7. 9.) augenblicklich:

$$\cos a = \cos a_1 - \frac{bc}{6r^2} \sin a_1^2.$$

Setzt man aber $\alpha = \alpha_1 + x$; ſo erhält man wie in (83.)

$$\cos a = \cos a_1 - x \sin a_1.$$

Alſo $x = \frac{bc}{6r^2} \sin \alpha_1$, und folglich:

$$\alpha = a_1 + \frac{bc}{6r^2} \sin a_1,$$

$$\beta = \beta_1 + \frac{ac}{6r^2} \sin \beta_1,$$

$$\gamma = \gamma_1 + \frac{ab}{6r^2} \sin \gamma_1.$$

Bezeichnet nun f den Flächeninhalt des Dreiecks $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$; ſo iſt (19.):

$$f = \tfrac{1}{2} bc \sin a_1 = \tfrac{1}{2} ac \sin \beta_1 = \tfrac{1}{2} ab \sin \gamma_1.$$

Alſo

$$\alpha = a_1 + \frac{f}{3r^2},$$

$$\beta = \beta_1 + \frac{f}{3r^2},$$

$$\gamma = \gamma_1 + \frac{f}{3r^2};$$

$$a_1 + \beta_1 + \gamma_1 = \alpha + \beta + \gamma - \frac{f}{r^2} = 180°,$$

$$\frac{f}{r^2} = \alpha + \beta + \gamma - 180° = \varepsilon,$$

wo ε, wie wir weiter unten mit Mehrerem ſehen werden, der ſphäriſche Exceß des Dreiecks $\alpha\beta\gamma$ genannt wird. Alſo

$$a_1 = \alpha - \tfrac{1}{3}\varepsilon,$$
$$\beta_1 = \beta - \tfrac{1}{3}\varepsilon,$$
$$\gamma_1 = \gamma - \tfrac{1}{3}\varepsilon.$$

Hieraus ergiebt ſich der merkwürdige Satz, daß ein

gefunden worden, zuerst ohne Beweis in Delam-
des sc. 1787. p. 338., mit einem Bewei
bre méthodes analytiques pour la
d'un arc du méridien. Paris. An V
Auch Lagrange beweiſet den Satz in e
sur la Trig. sphér. im Journal de l'éco
que. Nr. 6. Ferner ſ. m. auch Buzen
gleichung zweier ſehr kleinen Drei
chen Seiten, wovon das eine sphäris
eben ist. Zeitschr. für Astr. Bd. 6.
der Vergleichung ebener und ſphär. Dreie
Tralles in dem Aufſatze: Analytisch
ebener und sphärischer Dreiecke und
gie. Abhandlungen der math. Kl. d
für 1816. 17. Berl. 1819. S. 65 — 13
würdige Erweiterungen dieſes Satzes ſ. m.
wichtigen Abhandlung von Gauß: Dis
nerales circa superficies curvas. G
auch für ſphäroidiſche Trigonometrie, w
Rede ſeyn wird, in vieler Beziehung von
keit iſt.

ses, dessen Halbmesser = 1 ist, betrachtet, enthaltenen Secunden; so hat man, da Arc 1″ = sin 1″ gesetzt werden kann:

$$\sin 1'' : \frac{f}{r^2} = 1'' : x,$$

$$x = \frac{f}{r^2 \sin 1''}.$$

Wären z. B. b, c, α gegeben; so müßte man zuerst die Längen von b, c aus dem gegebenen Radius r, daraus $f = \frac{1}{2} bc \sin \alpha$, und hieraus mittelst obiger Formel x berechnen. Dann betrachtet man das gegebene Dreieck als ein ebenes, in welchem b, c, $\alpha - \frac{1}{3}x$ gegeben sind, und berechnet hieraus a, $\beta - \frac{1}{3}x$, $\gamma - \frac{1}{3}x$, woraus man dann, da x schon gefunden, auch a, β, γ findet; a muß man dann nur noch in Secunden ausdrücken. In einzelnen Fällen wird die Rechnung noch einige Abkürzungen zulassen, die leicht aufzufinden sind.

Die Auflösung sphärischer Dreiecke durch Zirkel und Lineal lehrt Cagnoli im Traité de Trig. p. 339. Hierüber sind mit Mehrerem die Lehrbücher der descriptiven Geometrie nachzusehen. Z. B. Lacroix Essais de Géométrie sur les plans et les surfaces courbes. Paris. 1812. p. 37. 38.

Flächeninhalt sphärischer Dreiecke.

86. Von dem Flächeninhalt sphärischer Dreiecke ist schon in dem Artikel Kugel. 35. ff. gehandelt. Indeß wird es, um das Ganze im Zusammenhange zu übersehen, dienlich seyn, den Fundamentalsatz hier nochmals zu wiederholen, da überhaupt der geometrische Beweis desselben nicht immer ganz streng geführt wird.

87. Wenn in zwei gleichen Kreisen (Fig. 54.) AD = A′D′, AB = A′B′ ist; so sind die Winkel BAD B′A′D′ einander gleich. Dies folgt leicht aus der Congruenz der Dreiecke ABC und A′B′C′.

88. Wenn auf zwei gleichen Kugelflächen (oder auch

er) zwei Segmente von zwei gleichen
Kugelkreiſe, und zwei andern Bogen, die
kleinern Kugelkreiſen gehören, eingeſchloſſe
ſind die beiden Segmente einander gleich.

d nämlich ADB, A′D′B′ (Fig. 55.) die
Kreisbogen, ſo ſind, da dieſe Bogen ei
d, auch die Sehnen AB, A′B′, und folgli
eichen Kreiſen gehörenden Segmente AEB,
gleich. Legt man nun größte Kreiſe auf di
, A′B′ ſenkrecht, ſo ſind EFD, E′F′D′ di
nkel der Ebenen ADB, AEB und A′D′B′,
nander. Wegen der Gleichheit der Se
A′D′B′ und AEB, A′E′B′ ſind auch die Höh
eich, d. i. FD = F′D′, FE = F′E′.
7.) auch der Winkel DFE dem Winkel
voraus unmittelbar folgt, daß ſich die beid
n einander legen laſſen, daß die ſphäriſchen
h decken, alſo einander gleich ſind.

Zwei ſphäriſche Dreiecke $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ (Fig
eiten einander gleich ſind, ſind dem Flächen

(89.), alſo $\alpha\beta\gamma + \alpha\delta\varepsilon = \alpha\beta\zeta\gamma$, welches wir durch Segm α bezeichnen wollen, iſt.

Sind für zwei ſolche Segmente Segm α und Segm β die einſchließenden Bogen, wie immer, halbe größte Kugelkreiſe; ſo gehören zu gleichen Winkeln offenbar gleiche Segmente, und es iſt folglich für $\alpha \gtreqless \beta$ auch Segm $\alpha \gtreqless$ Segm β. Alſo

$$\text{Segm}\,\alpha : \text{Segm}\,\beta = \alpha : \beta$$

(Verhältniß. 9. und 11.)

Nimmt man daher den ſphäriſchen Octanten zur Flächeneinheit, den rechten Winkel zur Winkeleinheit an; ſo iſt

$$\text{Segm}\,\alpha : 8 = \alpha : 4.$$

Alſo
$$\text{Segm}\,\alpha = \frac{8\alpha}{4} = 2\alpha.$$

91. Läßt man Alles wie vorher, ſo iſt (Fig. 58.) $\alpha\zeta\vartheta + \alpha\delta\varepsilon + \beta\varepsilon\varkappa + \beta\zeta\eta + \gamma\eta\delta + \gamma\vartheta\varkappa =$ der Halbkugel $+ 2\alpha\beta\gamma$, d. i., wenn wir den Flächeninhalt des Dreiecks $\alpha\beta\gamma$ durch $\triangle$ bezeichnen, nach (90.):

$$\text{Segm}\,\alpha + \text{Segm}\,\beta + \text{Segm}\,\gamma = 4 + 2\triangle$$
$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 4 + 2\triangle$$
$$\triangle = \alpha + \beta + \gamma - 2,$$

der ſphäriſche Octant als Flächeneinheit, der rechte Winkel als Winkeleinheit angenommen.

Da $\triangle$ nie negativ, auch nicht $=$ o ſeyn kann; ſo ergiebt ſich aus dieſer Formel der bekannte Satz, daß die drei Winkel eines ſphäriſchen Dreiecks immer zuſammen mehr als 2R betragen. Drückt man die Winkel in Graden aus, und ſetzt die ganze Kugelfläche $= 4r^2\pi$; ſo wird

$$\triangle = \left\{\frac{\alpha}{90^\circ} + \frac{\beta}{90^\circ} + \frac{\gamma}{90^\circ} - \frac{180^\circ}{90^\circ}\right\} \cdot \frac{4r^2\pi}{8}$$
$$= \frac{(\alpha + \beta + \gamma - 180^\circ) \cdot r^2\pi}{180^\circ}.$$

M. vergl. den Art. Kugel. 35. 36.

92. Man habe nun ein ſphäriſches Vieleck von n Seiten. Die Summen der Winkel der Dreiecke, in welche

$$\frac{(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}\gamma + \cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}\gamma}{\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}\gamma^2 + \cos\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}\gamma^2} \quad [28]$$

$$\cos\frac{1}{2}c$$

$$=$$

$$b) - \{\cos\tfrac{1}{2}(a-b) - \cos\tfrac{1}{2}(a+b)\}\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2$$

$$\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}(a-b) - \cos(a-b) + \cos c$$

$$4\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b$$

$$= \frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b},$$

Alſo

$$2\sqrt{L} = 4\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c,$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{\sqrt{L}}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}.$$

$\cos\frac{1}{2}\varepsilon = \sin\frac{1}{2}\varepsilon : \tan\frac{1}{2}\varepsilon$ iſt, nach (94.):

$$\tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}.$$

für $\sin\frac{1}{2}\varepsilon$ ſ. m. in einer Abhandlung von proprietat. circulor. in superficie sphaer. §. 13. Act. Petrop. 1782.; die für $\cos\frac{1}{2}\varepsilon$, Art bewieſen, in Euleri variae specula- r area triangulor. sphaer. Nov. Act. Pe-

$$= 4\sin\tfrac{1}{4}(\alpha+\beta+\gamma)\sin\tfrac{1}{4}(\beta+\gamma-\alpha)\sin\tfrac{1}{4}(\alpha+\gamma-\beta)\sin\tfrac{1}{4}(\alpha+\beta-\gamma)$$
$$= 4\sin\tfrac{1}{4}(a+b+c)\sin\tfrac{1}{4}(b+c-a)\sin\tfrac{1}{4}(a+c-b)\sin\tfrac{1}{4}(a+b-c)$$
$$= 4\sin\tfrac{1}{4}s\sin\tfrac{1}{4}(s-a)\sin\tfrac{1}{4}(s-b)\sin\tfrac{1}{4}(s-c);$$

$$\sin\tfrac{1}{4}\varepsilon = \sqrt{\frac{\sin\tfrac{1}{4}s\sin\tfrac{1}{4}(s-a)\sin\tfrac{1}{4}(s-b)\sin\tfrac{1}{4}(s-c)}{\cos\tfrac{1}{4}a\cos\tfrac{1}{4}b\cos\tfrac{1}{4}c}}$$

$$\tan\tfrac{1}{4}\varepsilon = \frac{2\sin\tfrac{1}{4}\varepsilon^2}{2\sin\tfrac{1}{4}\varepsilon\cos\tfrac{1}{4}\varepsilon} = \frac{2\sin\tfrac{1}{4}\varepsilon^2}{\sin\tfrac{1}{4}\varepsilon}.$$

Also nach (96.), wenn man für L seinen Werth setzt:

$$\tan\tfrac{1}{4}\varepsilon = \frac{4\sin\tfrac{1}{4}s\sin\tfrac{1}{4}(s-a)\sin\tfrac{1}{4}(s-b)\sin\tfrac{1}{4}c}{\sqrt{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}.$$

Aber allgemein

$$\frac{\sin\tfrac{1}{4}x}{\sqrt{\sin x}} = \sqrt{\frac{\sin\tfrac{1}{4}x^2}{2\sin\tfrac{1}{4}x\cos\tfrac{1}{4}x}} = \sqrt{\tfrac{1}{4}\tan\tfrac{1}{4}x},$$

woraus sich leicht ergiebt:

$$\tan\tfrac{1}{4}\varepsilon = \sqrt{\tan\tfrac{1}{4}s\tan\tfrac{1}{4}(s-a)\tan\tfrac{1}{4}(s-b)\tan\tfrac{1}{4}(s-c)},$$

eine von L'Huilier (M. vergl. jedoch auch Viereck. 13.) gefundene, sehr merkwürdige Formel. Da $\cos\frac{1}{4}\varepsilon = \sin\frac{1}{4}\varepsilon : \tan\frac{1}{4}\varepsilon$ ist; so erhält man leicht aus den beiden Formeln für $\sin\frac{1}{4}\varepsilon$ und $\tan\frac{1}{4}\varepsilon$:

$$\cos\tfrac{1}{4}\varepsilon = \sqrt{\frac{\cos\tfrac{1}{4}s\cos\tfrac{1}{4}(s-a)\cos\tfrac{1}{4}(s-b)\cos\tfrac{1}{4}(s-c)}{\cos\tfrac{1}{4}a\cos\tfrac{1}{4}b\cos\tfrac{1}{4}c}}.$$

98. Ich habe hier die obigen Formeln für den sphärischen Excess vorzüglich aus den Gaußischen Gleichungen abgeleitet. Andere Beweise s. m. in Legendre Géométrie. p. 314.; Buzengeiger: Einige Sätze, den Inhalt sphaer. D. betr. Zeitschrift für Astr. VI. Nr. 9. 10.; Hutton philosophical and mathematical Dictionary in dem Art. Excess.

99. In den bisherigen Formeln ist die Auflösung vieler Aufgaben über den Inhalt sphärischer Dreiecke enthalten. Denn so ist z. B. für den Inhalt aus den drei Seiten, indem wir den Octanten als Flächeneinheit, den rechten Winkel als Winkeleinheit annehmen, nach (97.)

$$\tan\tfrac{1}{4}\Delta = \sqrt{\tan\tfrac{1}{2}s\tan\tfrac{1}{2}(s-a)\tan\tfrac{1}{2}(s-b)\tan\tfrac{1}{2}(s-c)},$$

und für den Inhalt aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel nach (95.)

$$= \frac{}{1 + \cos b \cos c + \cos b +}$$

$$= \frac{\sin b \sin c}{(1 + \cos b)(1 + \cos c)}$$

$$= \frac{\sin b \sin b}{4 \cos \frac{1}{2} b^2 \cos \frac{1}{2} c^2}$$

$$= \tang \tfrac{1}{2} b \tang \tfrac{1}{2} c.$$

M. ſ. Euler de mensura angulorum Act. Petrop. 1778.

101. Da nun für rechtwinklige Dreied $+ \beta + \gamma - 180^0 = \beta + \gamma - 90^0$ iſt;

$$\tang \tfrac{1}{2} \Delta = \tang \tfrac{1}{2} b \tang \tfrac{1}{2} c, \quad \cot \tfrac{1}{2} \Delta \cot$$

$$2 \cot \Delta = \frac{2 \cos \Delta}{\sin \Delta} = \frac{\cos \tfrac{1}{2} \Delta^2 - \sin \tfrac{1}{2}}{\sin \tfrac{1}{2} \Delta \cos \tfrac{1}{2} \Delta}$$

$$= \frac{\cos \tfrac{1}{2} b^2 \cos \tfrac{1}{2} c^2 - \sin \tfrac{1}{2} b^2 \si}{\sin \tfrac{1}{2} b \cos \tfrac{1}{2} b \sin \tfrac{1}{2} c \cos}$$

$$= \frac{(1 + \cos b)(1 + \cos c) - (1 -}{\sin b \sin c}$$

$$\cot \Delta = \frac{\cos b + \cos c}{\sin b \sin c}, \quad \tang \Delta = \frac{}{co}$$

Ferner iſt

$$\tang \tfrac{1}{2} b \tang \tfrac{1}{2} c = \frac{\sin \frac{1}{2} \Delta}{\cos \frac{1}{2} \Delta} = \frac{\sin \frac{1}{2} \Delta}{\sqrt{1 - \sin \frac{1}{2} \Delta^2}}$$

$$\sin \tfrac{1}{2} \Delta^2 = \frac{\tang \tfrac{1}{2} b^2 \tang \tfrac{1}{2} c^2}{1 + \tang \tfrac{1}{2} b^2 \tang \tfrac{1}{2} c^2}$$

$$\sin \tfrac{1}{2} b^2 \sin \tfrac{1}{2} c^2$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\Delta = \frac{\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}a}.$$

lso

$$\sin\Delta = 2\sin\tfrac{1}{2}\Delta\cos\tfrac{1}{2}\Delta = \frac{\sin b\sin c}{1+\cos a},$$

$$\cos\Delta = \cos\tfrac{1}{2}\Delta^2 - \sin\tfrac{1}{2}\Delta^2 = \frac{\cos b+\cos c}{1+\cos a}.$$

R. f. Buzengeiger a. a. O. Nr. 4 — 6.

102. Nach (99.) iſt

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\Delta = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}b\operatorname{tang}\frac{1}{2}c\sin a}{1+\operatorname{tang}\frac{1}{2}b\operatorname{tang}\frac{1}{2}c\cos a}$$

$$\operatorname{tang}(-\tfrac{1}{2}\Delta) = \frac{(-\operatorname{tang}\frac{1}{2}b\operatorname{tang}\frac{1}{2}c)\sin a}{1-(-\operatorname{tang}\frac{1}{2}b\operatorname{tang}\frac{1}{2}c)\cos a}.$$

olglich nach derſelben Entwickelung wie in (29.), wenn an das dortige $\frac{b}{c} = -\operatorname{tang}\frac{1}{2}b\operatorname{tang}\frac{1}{2}c$ ſetzt:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\Delta = {}& \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}b\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c\sin a\\ & -\tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}b^2\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c^2\sin 2a\\ & +\tfrac{1}{4}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}b^3\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c^3\sin 3a\\ & -\tfrac{1}{8}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}b^4\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c^4\sin 4a\\ & +\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

lſo, wenn b, c ſehr klein ſind:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\Delta &= \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}b\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c\sin a\\ &= \tfrac{1}{2}b\cdot\tfrac{1}{2}c\sin a,\\ \Delta &= \tfrac{1}{2}bc\sin a,\end{aligned}$$

oraus erhellet, daß man den Inhalt eines ſphäriſchen Dreiecks mit zwei ſehr kleinen Seiten wie den Inhalt eines benen berechnen kann (19.), wobei man nur erſt Größen er vierten Ordnung vernachläſſigt.

103. Um das ſphäriſche Dreieck zu finden, deſſen Flächeninhalt bei zwei conſtanten Seiten ein Maximum wird, ifferentiire man den Ausdruck

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\Delta = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}b\operatorname{tang}\frac{1}{2}c\sin a}{1+\operatorname{tang}\frac{1}{2}b\operatorname{tang}\frac{1}{2}c\cos a},$$

n Bezug auf α als veränderlich; ſo erhält man leicht

$$\frac{\partial\operatorname{tang}\frac{1}{2}\Delta}{\partial a} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{1}{2}c\cos a+\operatorname{tang}\frac{1}{2}b^2\operatorname{tang}\frac{1}{2}c^2}{(1+\operatorname{tang}\frac{1}{2}b\operatorname{tang}\frac{1}{2}c)^2} = \frac{\partial\Delta}{2\cos\frac{1}{2}\Delta^2\cdot\partial a}.$$

des Maximums $o = \text{tang}\frac{1}{2}b\,\text{tang}\frac{1}{2}c\cos\alpha$
$\text{tang}\frac{1}{2}c^2$, oder, wenn man mit
$\text{tang}\frac{1}{2}b^2\,\text{tang}\frac{1}{2}c^2$

$= \cot\frac{1}{2}b\cot\frac{1}{2}c\cos\alpha + 1$
$= 1 + \cot\frac{1}{2}b\cot\frac{1}{2}c(1 - 2\sin\frac{1}{2}\alpha^2)$
$= 1 + \cot\frac{1}{2}b\cot\frac{1}{2}c(2\cos\frac{1}{2}\alpha^2 - 1)$
$= \cos\frac{1}{2}(b - c) - 2\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c\sin\frac{1}{2}\alpha^2$
$= -\cos\frac{1}{2}(b + c) + 2\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}\alpha^2$

$\frac{\cos\frac{1}{2}(b - c)}{\cos\frac{1}{2}(b + c)} = \text{tang}\frac{1}{2}\alpha^2.$

perſchen Analogien aber:

$\frac{\cos\frac{1}{2}(b - c)}{\cos\frac{1}{2}(b + c)} = \text{tang}\frac{1}{2}(\beta + \gamma)\,\text{tang}\frac{1}{2}\alpha,$

glichen mit dem Obigen, leicht folgt:

$\text{tang}\frac{1}{2}\alpha = \text{tang}\frac{1}{2}(\beta + \gamma).$

Winkel $\frac{1}{2}\alpha$ und $\frac{1}{2}(\beta + \gamma)$ beide $< 180^0$
o folgt aus obiger Gleichung:

$\frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}(\beta + \gamma),\ \alpha = \beta + \gamma.$

bt den merkwürdigen Satz, daß unter allen
reiecken mit zwei constanten Seiten das dan

Mathem. II. 1. S. 45.) Wir theilen daher ſeinen Beweis hier dem Weſentlichen nach mit.

105. Daß in einem gleichſchenkligen Dreiecke, wo $a = b$ iſt; auch die Winkel α, β an der Grundlinie einander gleich ſind, folgt augenblicklich aus [24], weil

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$
$$= \frac{\cos a (1 - \cos c)}{\sin a \sin c}$$
$$= \frac{2 \cos a \sin \frac{1}{2} c^2}{\sin a \sin c}$$
$$= \cot a \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} c,$$
$$\cos\beta = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c}$$
$$= \frac{\cos a (1 - \cos c)}{\sin a \sin c}$$
$$= \cot a \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} c;$$

alſo $\cos\alpha = \cos\beta$, und folglich, da weder α noch β 180° überſteigen, $\alpha = \beta$ iſt.

106. In einen kleinen Kugelkreis ſey (Fig. 59.) ein ſphäriſches Viereck ABCD eingeſchrieben, und P ſey der Pol des kleinen Kreiſes; ſo ſind APB, BPC, u. ſ. f. gleichſchenklige Dreiecke. Alſo

$$a = \beta,\ a' = \delta',\ \gamma = \delta,\ \gamma' = \beta';$$
$$a + a' + \gamma + \gamma' = \beta + \beta' + \delta + \delta';$$
$$A + C = B + D,$$

ſo daß alſo in jedem ſphäriſchen Viereck wie ABCD die Summen der gegenüberſtehenden Winkel einander gleich ſind.

107. Zieht man (Fig. 60.) die ſphäriſche Diagonale AC, und conſtruirt über derſelben noch irgend ein ſphäriſches Dreieck AB'C; ſo iſt nach (106.)

$$a + \alpha + c + \gamma = B + D,$$
$$a' + \alpha + c' + \gamma = B' + D,$$
$$a + c - B = D - \alpha - \gamma,$$
$$a' + c' - B' = D - \alpha - \gamma,$$
$$a + c - B = a' + c' - B',$$

d. h. in allen ſphäriſchen Dreiecken, über derſelben Grundlinie, auf derſelben Seite, in einen kleinen Kugelkreis be-

in einem bestimmten kleinen Kugelkreise,
Endpunkte der Grundlinie geht.

108. Sey ABC (Fig. 61.) irgend
Dreieck, und AA′, BB′ Halbkreiſe. Die
ſollen die Gegenpunkte von A, B heißen.
der Flächeninhalt dieſes Dreiecks conſtant;
nach (91.) die Summe der Winkel a + b
Aber c′ = c, a′ = α = 2R — a, b′ =
Alſo c′ — (a′ + b′) = c — (2R — a
= a + b + c — 4R, ſo daß folglich, w
conſtant bleibt, auch c′ — (a′ + b′) c
Bleibt alſo der Flächeninhalt von ABC conſt
alle Spitzen der Dreiecke A′B′C, alſo auch
Dreiecke ABC, nach (107.) in einem kleine
cher durch A′, B′, C geht, ſo daß alſo di
Dreiecke über derſelben Grundlinie, welche
nen Dreiecke über dieſer Grundlinie gleich
kleinern Kugelkreiſe liegen, welcher durch di
gebenen Dreiecks und die Gegenpunkte der G
Dies iſt der von Steiner gefundene Satz.

Noch einige Sätze und Relat

$$= \frac{1 - \cos b^2}{\sin b(1 + \cos b)} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin b \cot x}{1 + \cos b}.$$

ſo $$\cos(\gamma - \varphi) = \frac{1 - \cos a}{\sin a} \cot x.$$

$$\frac{\cos(\gamma - \varphi)}{\cos\varphi} = \cos\gamma + \sin\gamma \tang\varphi$$

$$= \frac{(1 - \cos a)(1 + \cos b)}{\sin a \sin b},$$

$$\sin\gamma = \frac{2\gamma L}{\sin a \sin b} \quad (94)$$

$$\cos\gamma = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b} \quad [24]$$

ziebt mittelſt obiger Gleichung leicht

$$\tang\varphi = \frac{1 - \cos a + \cos b - \cos c}{2\gamma L};$$

ch φ beſtimmt iſt. Auch iſt nach (97.)

$$g\varphi = \frac{1 - \cos a + \cos b - \cos c}{\gamma 1 - \cos a^2 - \cos b^2 - \cos c^2 + 2\cos a \cos b \cos c},$$

s ſich leicht ergiebt, daß der Zähler von $1 + \tang\varphi^2$, man das Quadrat entwickelt und aufhebt, das Dop- ſt von

$$\begin{aligned} &- \cos a + \cos b - \cos c - \cos a \cos b \\ &\quad + \cos a \cos c - \cos b \cos c + \cos a \cos b \cos c \\ &= (1 + \cos b - \cos c - \cos b \cos c)(1 - \cos a) \\ &= (1 - \cos a)(1 + \cos b)(1 - \cos c) \\ &= 8 \sin \tfrac{1}{2}a^2 \cos \tfrac{1}{2}b^2 \sin \tfrac{1}{2}c^2. \end{aligned}$$

ſt

$$\sec\varphi^2 = \frac{16 \sin \frac{1}{2}a^2 \cos \frac{1}{2}b^2 \sin \frac{1}{2}c^2}{4L},$$

$$\frac{1}{\cos\varphi} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}c}{\gamma L}.$$

nach dem Obigen

$$\cos\varphi = \frac{2 \sin \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}b}{2 \cos \frac{1}{2}b^2} \cot x = \tang \tfrac{1}{2}b \cot x,$$

$$\tang x = \frac{\tang \frac{1}{2}b}{\cos\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}b}{\cos \frac{1}{2}b}$$

$$= \frac{2 \sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}c}{\gamma L}.$$

findet dieſen merkwürdigen Ausdruck bei Legendre D. p. 318. 319.

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta + \gamma) = \frac{1 - \cos a + \cos b}{2\sqrt{L}}$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma) = \frac{1 - \cos a - \cos b}{2\sqrt{L}}$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) + \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(-\alpha + \beta + \gamma$$
$$+ \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta + \gamma) + \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\alpha +$$
$$= \frac{1 - \cos a - \cos b - c}{\sqrt{L}}$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) - \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(-\alpha + \beta \cdot$$
$$= -\frac{1 + \cos a}{\sqrt{L}} = -\frac{2\cos\frac{1}{2}a^2}{\sqrt{L}}$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta + \gamma) + \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta \cdot -$$
$$= \frac{1 - \cos a}{\sqrt{L}} = \frac{2\sin\frac{1}{2}a^2}{\sqrt{L}}.$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) - \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(-\alpha + \beta + \gamma)$$
$$- \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta + \gamma) - \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}($$
$$= -\frac{2}{\sqrt{\sin s \sin(s - a)\sin(s - b)\sin}}$$

$$- \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) + \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(-\alpha + \beta \cdot$$
$$+ \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta + \gamma) + \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\alpha$$
$$= 2\sqrt{\frac{1}{\sin s} \cdot \frac{1}{\sin(s - a)} \cdot \frac{1}{\sin(s - b)} \cdot}$$
$$= 2\sqrt{\operatorname{cosec} s \operatorname{cosec}(s - a)\operatorname{cosec}(s - b)}$$

Ähnliche Relationen würden sich mehrere fi

$$\frac{\sin\alpha\beta}{\sin O} = \frac{\sin\beta O}{\sin\frac{1}{2}\alpha}, \quad \frac{\sin\alpha b'}{\sin O} = \frac{\sin b'O}{\sin\frac{1}{2}\alpha};$$
$$\frac{\sin\alpha\beta}{\sin\alpha b'} = \frac{\sin\beta O}{\sin b'O}.$$

ſind in jedem Dreieck $(\alpha\beta b')$, wo ein Winkel halbirt ie Sinus der dieſen Winkel einſchließenden Seiten, Sinuſſen der anliegenden Abſchnitte der Gegenſeite rtional. Demnach im Dreieck $\alpha\beta\gamma$, wo β hal- t:

$$\frac{\sin\alpha\beta}{\sin\beta\gamma} = \frac{\sin\alpha b'}{\sin\gamma b'}, \quad \frac{\sin\alpha\beta}{\sin\alpha b'} = \frac{\sin\beta\gamma}{\sin\gamma b'}.$$

ch $$\frac{\sin\beta O}{\sin b'O} = \frac{\sin\beta\gamma}{\sin\gamma b'}.$$ Aber

$$\frac{\sin\beta\gamma}{\sin\beta O} = \frac{\sin O}{\sin\beta'}, \quad \frac{\sin\gamma b'}{\sin b'O} = \frac{\sin O}{\sin\alpha'};$$
$$\frac{\sin\beta\gamma}{\sin\gamma b'} = \frac{\sin\beta O \cdot \sin\alpha'}{\sin b'O \cdot \sin\beta'} = \frac{\sin\beta O}{\sin b'O}.$$

$\sin\alpha' = \sin\beta'$, und demnach entweder $\alpha' = \beta'$ $' + \beta' = 180^0$. Da aber Letzteres nicht möglich $< 180^0$; ſo iſt $\alpha' = \beta'$.

12. Denkt man ſich Oa′, Ob′, Oc′ als Perpendikel e drei Seiten; ſo folgt aus

$$\sin Oa' = \sin O\gamma \cdot \sin\tfrac{1}{2}\gamma = \sin Ob' \quad (76),$$
$$\operatorname{tang}\gamma a' = \operatorname{tang} O\gamma \cdot \cos\tfrac{1}{2}\gamma = \operatorname{tang}\gamma b' \quad (73.).$$

daß $Oa' = Ob' = Oc'$, $\gamma a' = \gamma b'$, $\beta a' = \beta c'$, $= \alpha c'$, $2\alpha c' + 2\beta a' + 2\gamma b' = a + b + c$, $= a+b+c-2(\beta a'+\gamma b') = a+b+c-2(\beta a'+\gamma a')$ $+ b + c - 2a = b + c - a$, $\alpha c' = s - a$ iſt. man nun eins der drei gleichen Perpendikel, d. h. härischen Halbmeſſer des in das gegebene Dreieck be- enen Kreiſes, $= 1$; ſo iſt nach (72.)

$$\operatorname{tang} 1 = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha \sin\alpha c',$$
$$\operatorname{tang} 1 = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha \sin(s - a)$$
$$= \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\beta \sin(s - b)$$
$$= \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\gamma \sin(s - c),$$

s, wie auch ſchon in (65.) gefunden, folgt:

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\beta}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha} = \frac{\sin(s - a)}{\sin(s - b)}, \quad \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha} = \frac{\sin(s - a)}{\sin(s - c)}.$$

iſt $\operatorname{tang} 1^3 =$

$g\frac{1}{2}\alpha \operatorname{tang}\frac{1}{2}\beta \operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma \sin(s - a)\sin(s - b)\sin(s - c)$,

Ist l der Halbmesser des [illegible]
nach (109.)

$$\operatorname{tang} l' = \frac{2 \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \sin \frac{1}{2} c}{\sqrt{L}},$$

$$\operatorname{tang} l \operatorname{tang} l' = \frac{2 \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \sin \frac{1}{2} c}{\sin \frac{1}{2}(a + b + c)}.$$

Auch

$$\operatorname{tang} l \operatorname{tang} l' = \frac{\sin \frac{1}{2} \varepsilon \sin a \sin b \sin c}{2 \sin s \sqrt{L}},$$

$$\operatorname{tang} l \cot l' = \frac{\sin \frac{1}{2} \varepsilon \sqrt{L}}{\sin s \operatorname{tang} \frac{1}{2} a \operatorname{tang} \frac{1}{2} b \operatorname{tang} \frac{1}{2} c}$$

113. Nach [28] ist:

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(a - b) \cos \frac{1}{2}(a - b)}{\sin \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} c} = \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) s}{\cos \frac{1}{2}}$$

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(a + b) \cos \frac{1}{2}(a + b)}{\sin \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) c}{\sin \frac{1}{2}}$$

$$\frac{\sin (a + b) \sin (a - b)}{\sin c^2} = \frac{\sin (\alpha + \beta) \sin}{\sin \gamma}$$

$$\frac{\sin a^2}{\sin \alpha^2} = \frac{\sin b^2}{\sin \beta^2} = \frac{\sin c^2}{\sin \gamma^2} = \frac{\sin (a + b) \sin (}{\sin (\alpha + \beta) \sin (}$$

eine merkwürdige Relation.

$$\frac{\sin c}{\sin\frac{1}{2}\gamma^2} = \frac{\sin c}{\sin\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}\gamma}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\gamma} = \frac{2\sin c}{\sin\gamma}\cot\frac{1}{2}\gamma$$
$$= \frac{2\sin a}{\sin\alpha}\cot\frac{1}{2}\gamma,$$

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma = \frac{\sin\alpha\sin(a-b)}{2\sin a\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)},$$

$$\cot\frac{1}{2}\gamma = \frac{\sin\alpha\sin(a+b)}{2\sin a\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}.$$

Dieſe Formeln dienen, um aus a, b, α, β unmittelbar γ zu finden.

115. Man kann auch c aus dieſen gegebenen Stücken finden. Es iſt

$$1 - \cos c = 2\sin\tfrac{1}{2}c^2 =$$
$$1 - \cos a\cos b - \sin a\sin b\cos\gamma =$$
$$1 - \cos a\cos b - \sin a\sin b(1 - 2\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2)$$
$$= 1 - \cos(a-b) + 2\sin a\sin b\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2$$
$$= 2(\sin\tfrac{1}{2}(a-b))^2 + 2\sin a\sin b\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2$$
$$\sin\tfrac{1}{2}c^2 = (\sin\tfrac{1}{2}(a-b))^2 + \sin a\sin b\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2.$$

Ganz eben ſo findet man

$$\cos\tfrac{1}{2}c^2 = (\cos\tfrac{1}{2}(a+b))^2 + \sin a\sin b\cos\tfrac{1}{2}\gamma^2,$$

und mittelſt des Supplementardreiecks ergiebt ſich leicht:

$$\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2 = (\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta))^2 + \sin\alpha\sin\beta\sin\tfrac{1}{2}c^2,$$
$$\cos\tfrac{1}{2}\gamma^2 = (\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta))^2 + \sin\alpha\sin\beta\cos\tfrac{1}{2}c^2,$$

Subſtituirt man nun die Werthe von $\sin\frac{1}{2}\gamma^2$ und $\cos\frac{1}{2}\gamma^2$ in die beiden erſten Gleichungen; ſo erhält man leicht:

$$\sin\tfrac{1}{2}c^2 = \frac{(\sin\frac{1}{2}(a-b))^2 + \sin a\sin b(\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta))^2}{1 - \sin a\sin b\sin\alpha\sin\beta},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}c^2 = \frac{(\cos\frac{1}{2}(a+b))^2 + \sin a\sin b(\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta))^2}{1 - \sin a\sin b\sin\alpha\sin\beta},$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c^2 = \frac{(\sin\frac{1}{2}(a-b))^2 + \sin a\sin b(\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta))^2}{(\cos\frac{1}{2}(a+b))^2 + \sin a\sin b(\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta))^2}.$$

116. Ferner iſt nach (65.)

$$\cot a = \frac{\cos a\sin b - \sin a\cos b\cos\gamma}{\sin a\sin\gamma}.$$

Hieraus erhält man, wenn $\cos\frac{1}{2}\gamma^2 - \sin\frac{1}{2}\gamma^2$ ſtatt $\cos\gamma$, und $\cos a\sin b(\cos\frac{1}{2}\gamma^2 + \sin\frac{1}{2}\gamma^2)$ ſtatt $\cos a\sin b$ geſetzt wird, leicht:

$$\cot a = \frac{\sin(a+b)\sin\frac{1}{2}\gamma^2 - \sin(a-b)\cos\frac{1}{2}\gamma^2}{\sin a\sin\gamma},$$

und eben ſo:

leicht:

$$\sin b \cot\beta \pm \sin a \cot\alpha = \frac{\sin(a \pm b) \mp \sin(a \pm b)\cos\gamma}{\sin\gamma}$$

$$= \frac{\sin(a \pm b)(1 \mp \cos\gamma)}{\sin\gamma},$$

woraus leicht erhalten wird:

$$\sin b \cot\beta + \sin a \cot\alpha = \sin(a + b)\,t$$

$$\sin b \cot\beta - \sin a \cot\alpha = \sin(a - b)\,c$$

$$\frac{\sin b \cot\beta + \sin a \cot\alpha}{\sin b \cot\beta - \sin a \cot\alpha} = \frac{\sin(a + b)}{\sin(a - b)}$$

$$\sin b^2 \cot\beta^2 - \sin a^2 \cot\alpha^2 = \sin(a + b)\,s$$

118. Noch sind folgende Formeln für zweier Seiten merkwürdig:

$$\sin(a - c) = \sin a \cos c - \cos a \sin c$$

$$= \frac{\sin b \sin\alpha}{\sin\beta}\cos c - \frac{\sin b \sin\gamma}{\sin\beta}\cos a$$

$$= \frac{\sin b(\sin\alpha\cos c - \sin\gamma\cos a)}{\sin\beta},$$

$$\cos\gamma = \cos c \sin\alpha \sin\beta - \cos\alpha\cos\beta \quad [$$

$$= \cos c \sin\alpha \sin\beta$$

$$- (\cos a \sin\beta \sin\gamma - \cos\beta\cos$$

$$= \cos c \sin\alpha \sin\beta + \cos\gamma - \sin$$

$$- \cos a \sin\beta \cos\beta \sin\gamma,$$

$$o = \cos c \sin\alpha - \cos a \cos\beta \sin\gamma - \sin$$

$$\sin\alpha\cos c - \cos a \cos\beta \sin\gamma + \sin\beta\cos$$

$$= \cos b + 2\sin a \cdot \frac{\sin b \sin\gamma}{\sin\beta} \cdot \sin\tfrac{1}{2}\beta^2$$

$$= \cos b + \sin a \sin b \sin\gamma \tang\tfrac{1}{2}\beta,$$

$$\tang(a - c) = \frac{\sin b(\cos\gamma - \cos a \sin\gamma \tang\frac{1}{2}\beta)}{\cos b + \sin a \sin b \sin\gamma \tang\frac{1}{2}\beta}$$

$$= \frac{\tang b(\cos\gamma - \cos a \sin\gamma \tang\frac{1}{2}\beta)}{1 + \sin a \tang b \sin\gamma \tang\frac{1}{2}\beta}.$$

119. Nach den Formeln von Gauß ist:

$$\sin\tfrac{1}{2}(\alpha + \gamma)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha - \gamma) =$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\beta^2 \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}(a - c)\cos\frac{1}{2}(a - c)}{\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}b} = \cos\tfrac{1}{2}\beta^2 \cdot \frac{\sin(a - c)}{\sin b},$$

$$\sin(a - c) = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha + \gamma)\sin\frac{1}{2}(\alpha - \gamma)\sin b}{\cos\frac{1}{2}\beta^2}$$

$$= \frac{\sin b(\cos\gamma - \cos\alpha)}{2\cos\frac{1}{2}\beta^2},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(\alpha + \gamma)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha - \gamma) =$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\beta^2 \cdot \frac{\cos\frac{1}{2}(a + c)\sin\frac{1}{2}(a + c)}{\cos\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}b} = \sin\tfrac{1}{2}\beta^2 \cdot \frac{\sin(a + c)}{\sin b},$$

$$\sin(a + c) = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha + \gamma)\cos\frac{1}{2}(\alpha - \gamma)\sin b}{\sin\frac{1}{2}\beta^2}$$

$$= \frac{\sin b(\cos\gamma + \cos\alpha)}{2\sin\frac{1}{2}\beta^2}.$$

120. $\cos\alpha = \cos a \sin\beta \sin\gamma - \cos\beta\cos\gamma$. Addirt und subtrahirt man auf beiden Seiten $\cos\gamma$; so erhält man

$$\cos\alpha \pm \cos\gamma = \begin{cases} \cos a \sin\beta\sin\gamma + 2\sin\frac{1}{2}\beta^2\cos\gamma \\ \cos a \sin\beta\sin\gamma - 2\cos\frac{1}{2}\beta^2\cos\gamma \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2\cos\frac{1}{2}(\alpha + \gamma)\cos\frac{1}{2}(\alpha - \gamma) \\ -2\sin\frac{1}{2}(\alpha + \gamma)\sin\frac{1}{2}(\alpha - \gamma) \end{cases}$$

$$2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha + \gamma)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha - \gamma) =$$
$$2\sin\tfrac{1}{2}\beta^2\cos\gamma + \cos a \sin\beta\sin\gamma,$$

$$2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha + \gamma)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha - \gamma) =$$
$$2\cos\tfrac{1}{2}\beta^2\cos\gamma - \cos a \sin\beta\sin\gamma,$$

$$\tang\tfrac{1}{2}(\alpha + \gamma)\tang\tfrac{1}{2}(\alpha - \gamma) =$$
$$\frac{2\cos\frac{1}{2}\beta^2\cos\gamma - \cos a\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\frac{1}{2}\beta^2\cos\gamma + \cos a\sin\beta\sin\gamma},$$

Relationen zwischen den drei Winkeln und einer Seite, woraus sich mittelst des Supplementardreiecks mehrere andere mit Leichtigkeit ableiten lassen würden.

121. Noch einige Relationen zwischen allen sechs Stücken erhält man so. Nach (118.) mit gehöriger Vertauschung der Zeichen, und mittelst des Supplementardreiecks ist:

$$\frac{\sin\beta + \cos c \operatorname{tang} a \cos\beta}{\sin c} = \frac{\sin\gamma}{\sin b - \cos\gamma \operatorname{tang}}$$

Auch iſt

$$\frac{\cos\alpha \sin c}{\cos a \sin\gamma} = \frac{\cos\alpha \sin a}{\cos a \sin\alpha} = \frac{\cot\alpha}{\cot a}$$
$$= \frac{\cos a \sin b - \sin a \cos b c}{\cos\alpha \sin\beta + \sin\alpha \cos\beta c}$$

Auch iſt nach (118.)

$$\cos a \sin\gamma = \cos\alpha \sin\beta + \cos c \sin\alpha \cos\beta$$
$$\cos\beta \sin c = \cos b \sin a - \cos\gamma \cos a \sin b$$
$$\frac{\cos\alpha \sin\beta + \cos c \sin\alpha \cos\beta}{\cos\beta \sin c}$$
$$= \frac{\cos a \sin\gamma}{\cos b \sin a - \cos\gamma \cos a \sin b},$$
$$\frac{\cos\alpha \operatorname{tang}\beta + \sin\alpha \cos c}{\sin c} = \frac{\sin\gamma}{\cos b \operatorname{tang} a - co}$$

122. Nach (118.) iſt

$$\cos\beta \sin\gamma = \cos b \sin\alpha - \cos a \sin\beta \cos$$

Folglich, wenn man mit $\cos\beta$ multiplicirt:

$$\sin\gamma - \sin\beta^2 \sin\gamma$$
$$= \cos b \sin\alpha \cos\beta - \cos a \sin\beta \cos\beta \cos$$
$$\sin\beta \sin\gamma - \cos a \cos\beta \cos\gamma$$
$$= \frac{\sin\gamma - \cos b \sin\alpha \cos\beta}{\sin\beta}.$$

$$= \frac{\sin c}{\sin b}\left\{1 - \cos b \cos\beta . \frac{\sin a}{\sin c}\right\}$$
$$= \frac{\sin c - \cos\beta \sin a \cos b}{\sin b}.$$

Also

$$\sin b \sin c + \cos\alpha \cos b \cos c = \sin\beta \sin\gamma - \cos a \cos\beta \cos\gamma,$$

ebenfalls eine merkwürdige Relation zwischen den sechs Stücken. M. s. Cagnoli Traité de Trigon. p. 326. Puissant Géod. I. p. 79.

Die meisten der obigen Relationen sind von Délambre gefunden. Ihre Anzahl ließe sich noch vermehren, worüber nachzusehen: Délambre Traité d'Astronomie. Tom. I. Chap. X.

Differentialformeln für sphärische Dreiecke.

123. Zunächst kommt es hier wieder auf die Differentiation der Fundamentalgleichungen der sphärischen Trigonometrie:

$$\cos a = \sin b \sin c \cos\alpha + \cos b \cos c,$$
$$\sin\alpha \sin b = \sin\beta \sin a,$$
$$\cos\alpha = \cos a \sin\beta \sin\gamma - \cos\beta \cos\gamma;$$

an.

Die erste giebt durch partielle Differentiation:

$$\sin a\,\partial a = (\sin b \cos c - \cos b \sin c \cos\alpha)\,\partial b + (\cos b \sin c - \sin b \cos c \cos\alpha)\,\partial c + \sin b \sin c \sin\alpha\,\partial\alpha.$$

Da aber

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

ist; so ist der in ∂b multiplicirte Factor

$$= \frac{\sin b^2 \cos c - \cos a \cos b + \cos b^2 \cos c}{\sin b}$$
$$= \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin b} = \sin a \cos\gamma,$$

$$+ \sin b \sin c \sin \alpha \, \partial\alpha ,$$

$$\sin b \partial b = (\sin a \cos c - \cos a \sin c \cos \beta) \partial$$
$$+ (\cos a \sin c - \sin a \cos c \cos \beta) \partial$$
$$+ \sin a \sin c \sin \beta \, \partial\beta ,$$

$$\sin c \partial c = (\sin a \cos b - \cos a \sin b \cos \gamma)$$
$$+ (\cos a \sin b - \sin a \cos b \cos \gamma)$$
$$+ \sin a \sin b \sin \gamma \, \partial\gamma ,$$

$$\partial a = \cos\gamma \, \partial b + \cos\beta \, \partial c + \sin c \sin\beta \, \partial$$
$$\partial b = \cos\alpha \, \partial c + \cos\gamma \, \partial a + \sin a \sin\gamma \, \partial$$
$$\partial c = \cos\beta \, \partial a + \cos\alpha \, \partial b + \sin b \sin\alpha \, \partial$$

Aus der zweiten Fundamentalgleichung erhält blicklich:

$$\sin a \cos b \, \partial b + \cos a \sin b \, \partial a$$
$$= \sin\beta \cos a \, \partial a + \cos\beta \sin$$

$$\sin\beta \cos c \, \partial c + \cos\beta \sin c \, \partial\beta$$
$$= \sin\gamma \cos b \, \partial b + \cos\gamma \sin$$

$$\sin\gamma \cos a \, \partial a + \cos\gamma \sin a \, \partial\gamma$$
$$= \sin\alpha \cos c \, \partial c + \cos\alpha \sin$$

Die dritte Fundamentalgleichung giebt:

$$- \sin\alpha \, \partial\alpha = (\cos a \cos\beta \sin\gamma + \sin\beta \cos$$
$$+ (\cos a \sin\beta \cos\gamma + \cos\beta \sin$$
$$- \sin a \sin\beta \sin\gamma \, \partial a ;$$

woraus, wegen

$$\cos\alpha + \cos\beta \cos\gamma \quad \sin a \sin\beta$$

$$
\begin{aligned}
-\sin\gamma\,\partial\gamma = {} & (\cos c\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta)\,\partial\alpha \\
& + (\cos c\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)\,\partial\beta \\
& - \sin c\sin\alpha\sin\beta\,\partial c,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\partial\alpha &= \cos c\,\partial\beta + \cos b\,\partial\gamma - \sin b\sin\gamma\,\partial a, \\
-\partial\beta &= \cos a\,\partial\gamma + \cos c\,\partial\alpha - \sin c\sin\alpha\,\partial b, \\
-\partial\gamma &= \cos b\,\partial\alpha + \cos a\,\partial\beta - \sin a\sin\beta\,\partial c.
\end{aligned}
$$

124. Gegeben a, b, c.

Gesucht α, β, γ.

Nimmt man an, daß α, β, γ aus a, b, c berechnet sind; so ist nach (123.)

$$\partial\alpha = \frac{\partial a - \cos\gamma\,\partial b - \cos\beta\,\partial c}{\sin c\sin\beta},$$

$$\partial\beta = \frac{\partial b - \cos\alpha\,\partial c - \cos\gamma\,\partial a}{\sin a\sin\gamma},$$

$$\partial\gamma = \frac{\partial c - \cos\beta\,\partial a - \cos\alpha\,\partial b}{\sin b\sin\alpha}.$$

Setzt man nun statt der trigonometrischen Linien der Winkel aus dem Obigen ihre Ausdrücke durch die Seiten: so erhält man für

$$
\begin{aligned}
(\cos a - \cos b\cos c)\sin a &= \mathfrak{A}, \\
(\cos b - \cos a\cos c)\sin b &= \mathfrak{B}, \\
(\cos c - \cos a\cos b)\sin c &= \mathfrak{C},
\end{aligned}
$$

leicht:

$$\partial\alpha = \frac{\sin a\sin b\sin c\,\partial a - \mathfrak{C}\,\partial b - \mathfrak{B}\,\partial c}{2\sin b\sin c\sqrt{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}},$$

$$\partial\beta = \frac{\sin a\sin b\sin c\,\partial b - \mathfrak{C}\,\partial a - \mathfrak{A}\,\partial c}{2\sin a\sin c\sqrt{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}},$$

$$\partial\gamma = \frac{\sin a\sin b\sin c\,\partial c - \mathfrak{B}\,\partial a - \mathfrak{A}\,\partial b}{2\sin a\sin b\sqrt{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}.$$

125. Gegeben b, c, α.

Gesucht β, γ, a.

Nach (123.) ist

$$
\begin{aligned}
\partial\beta &= \frac{\partial b - \cos\alpha\,\partial c - \cos\gamma\,\partial a}{\sin a\sin\gamma} \\
&= \frac{\partial b - \cos\alpha\,\partial c - \cos\gamma\,\partial a}{\sin c\sin\alpha},
\end{aligned}
$$

woraus, wenn man für ∂a aus (123.) seinen Werth

$$\partial a = \cos\gamma\,\partial b + \cos\beta\,\partial c + \sin c\sin\beta\,\partial\alpha$$

$$\partial b = \frac{\partial\beta + \cos a\,\partial\gamma + \cos c\,\partial\alpha}{\sin c \sin\alpha}$$
$$= \frac{\partial\beta + \cos a\,\partial\gamma + \cos c\,\partial\alpha}{\sin a \sin\gamma},$$

woraus, wenn man für $\partial\alpha$ ſeinen Werth:

$$\partial\alpha = \sin b \sin\gamma\,\partial a - \cos c\,\partial\beta - \cos l$$

ſetzt, leicht erhalten wird:

$$\partial b = \frac{\sin c^2\,\partial\beta + \sin b \sin c \cos\alpha\,\partial\gamma + \sin b}{\sin a \sin\gamma}$$
$$\partial c = \frac{\sin b^2\,\partial\gamma + \sin b \sin c \cos\alpha\,\partial\beta + \cos h}{\sin a \sin\beta}$$

127. Gegeben α, β, γ.

Geſucht a, b, c.

Nach (123.) iſt wieder

$$\partial a = \frac{\partial\alpha + \cos c\,\partial\beta + \cos b\,\partial\gamma}{\sin b \sin\gamma},$$
$$\partial b = \frac{\partial\beta + \cos a\,\partial\gamma + \cos c\,\partial\alpha}{\sin c \sin\alpha},$$
$$\partial c = \frac{\partial\gamma + \cos b\,\partial\alpha + \cos a\,\partial\beta}{\sin a \sin\beta}.$$

Setzt man nun für die trigonometriſchen Lini ihre Ausdrücke durch die Winkel; ſo erhält r

$$\partial c = \frac{\sin a \sin\beta \sin\gamma\, \partial\gamma + \mathfrak{B}'\partial a + \mathfrak{A}'\partial\beta}{2\sin a \sin\beta \sqrt{-\cos s' \cos(s'-a)\cos(s'-\beta)\cos(s'-\gamma)}}.$$

128. Gegeben a, b, α.

Gesucht β, c, γ.

Nach (123.) ist

$$\partial\beta = \frac{\sin a \cos b\, \partial b + \cos a \sin b\, \partial a - \sin\beta \cos a\, \partial a}{\cos\beta \sin a},$$

$$\partial c = \frac{\partial a - \cos\gamma\, \partial b - \sin c \sin\beta\, \partial\alpha}{\cos\beta},$$

$$\partial\gamma = \frac{\partial c - \cos\beta\, \partial a - \cos a\, \partial b}{\sin b \sin a}.$$

129. Gegeben a, α, β.

Gesucht b, c, γ.

Nach (123.) ist

$$\partial b = \frac{\sin\beta \cos a\, \partial a + \cos\beta \sin a\, \partial\beta - \cos a \sin b\, \partial\alpha}{\sin a \cos b},$$

$$\partial\gamma = \frac{-\partial\alpha - \cos c\, \partial\beta + \sin b \sin\gamma\, \partial a}{\cos b},$$

$$\partial c = \frac{\partial\gamma + \cos b\, \partial\alpha + \cos a\, \partial\beta}{\sin a \sin\beta}.$$

130. Nimmt man zwei Stücke als unveränderlich an; so sind dieselben Fälle wie in (41.) möglich, worauf wir uns also hier beziehen.

131. Unveränderlich a, β
Veränderlich b, c, α, γ } (41. a.)

Für $\partial a = \partial\beta = 0$ geben die allgemeinen Gleichungen in (123.):

$$\partial b = \cos a\, \partial c,$$
$$\sin a \cos b\, \partial b + \cos a \sin b\, \partial\alpha = 0,$$
$$-\partial\alpha = \cos b\, \partial\gamma,$$

drei Gleichungen, aus denen sich immer drei der Größen ∂b, ∂c, $\partial\alpha$, $\partial\gamma$ bestimmen lassen, wenn eine als gegeben angenommen wird. Dividirt man die zweite Gleichung durch $\cos\alpha \cos b$; so werden diese Gleichungen:

$$\partial b = \cos a\, \partial c,$$
$$\operatorname{tang} a\, \partial b = -\operatorname{tang} b\, \partial\alpha,$$
$$-\partial\alpha = \cos b\, \partial\gamma.$$

$$\frac{\sin\gamma}{\cos\beta}\,\partial b = \frac{\sin a}{\cos b}\,\partial\beta\,,$$

iſt; ſo werden dieſe Gleichungen:

$$\cos\beta\,\partial c = -\cos\gamma\,\partial b,$$
$$\operatorname{tang}\beta\,\partial b = \operatorname{tang} b\,\partial\beta,$$
$$\cos c\,\partial\beta = -\cos b\,\partial\gamma,$$

aus denen ſich auch, wenn eine der Größe $\partial\gamma$ gegeben iſt, die übrigen drei immer beſti

133. Unveränderlich a, b
Veränderlich α, β, γ, c } (41. c

Für $\partial a = \partial b = o$ iſt:

$$o = \cos\beta\,\partial c + \sin c \sin\beta\,\partial\alpha,$$
$$o = \cos\alpha\,\partial c + \sin a \sin\gamma\,\partial\beta,$$
$$\cos\alpha \sin b\,\partial\alpha = \cos\beta \sin a\,\partial\beta,$$

oder

$$o = \partial c + \sin c \operatorname{tang}\beta\,\partial\alpha$$
$$o = \partial c + \sin c \operatorname{tang}\alpha\,\partial\beta,$$
$$\cos\alpha\,\partial\alpha = \cos\beta \cdot \frac{\sin a}{\sin b}\,\partial\beta = \sin\alpha c$$

oder

$$\partial c = -\sin c \operatorname{tang}\beta\,\partial\alpha,$$
$$\partial c = -\sin c \operatorname{tang}\alpha\,\partial\beta.$$

oder

$$\frac{\sin a}{\sin \beta} \cos b\, \partial b = \cos a\, \partial a,$$

$$\frac{\sin a}{\sin b} \cos b\, \partial b = \cos a\, \partial a,$$

$$0 = \partial\gamma - \operatorname{tang} b \sin\gamma\, \partial a,$$

$$0 = \partial\gamma - \frac{\sin a \sin\gamma}{\cos a}\, \partial b$$

$$= \partial\gamma - \operatorname{tang} a \sin\gamma\, \partial b.$$

Alſo

$$\operatorname{tang} a\, \partial b = \operatorname{tang} b\, \partial a,$$

$$\partial\gamma = \operatorname{tang} b \sin\gamma\, \partial a,$$

$$\partial\gamma = \operatorname{tang} a \sin\gamma\, \partial b.$$

III. Sphäroidiſche Trigonometrie.

Grundbegriffe.

135. Unter einem Sphäroid verſtehen wir hier einen durch Umdrehung einer Ellipſe um ihre kleine Axe entſtandenen Körper. Die Drehungsaxe heißt ſchlechthin die Axe, und ihre Endpunkte die Pole. Der von der großen Axe der Ellipſe beſchriebene Kreis wird der Aequator, und jeder, mit demſelben parallele, Schnitt des Sphäroids ein Parallelkreis genannt. Jeder Schnitt durch die Axe iſt eine der erzeugenden gleiche Ellipſe. Die zwiſchen den beiden Polen liegenden Hälften ſolcher Schnitte ſollen Meridiane genannt werden.

136. Der Aequator theilt das Sphäroid in zwei Hälften, von denen die eine die poſitive, die andere die negative genannt werden ſoll. Die beiden Pole erhalten nach den Hälften, in welchen ſie liegen, gleiche Benennungen.

137. Legt man durch einen Punkt auf der Oberfläche des Sphäroids einen Meridian; ſo heißt der ſpitze Winkel, welchen die durch den gegebenen Punkt gezogene Normale mit der großen Axe des Meridians einſchließt, die Breite des gegebenen Punktes. Die Breiten der Pole ſind $= 90^0$, ſonſt ſind alle Breiten $< 90^0$, und werden als poſitiv oder negativ betrachtet, jenachdem die entſpre-

0° bis 360°. Die positive Differenz zwi
zweier Punkte heißt die Längendiffere

139. Die kürzeste Linie, welche sich
fläche des Sphäroids zwischen irgend zwei g
ten ziehen läßt, soll schlechthin die Kürze
den. Eine solche Linie ist natürlich immer
stimmten Gesetze gekrümmt, und kann als
über die beiden gegebenen Punkte hinaus ve
werden.

140. Die nach der Richtung der Läng
Seite des positiven Pols hin mit den M
Punkte von ihrer Kürzesten eingeschlossenen
Azimuthe genannt.

141. Unter einem sphäroidischen
hen wir hier ein Dreieck auf der Oberfläc
roids, dessen Spitze im positiven Pol lieg
von zwei Meridianbogen nebst der zwischen
derselben liegenden Kürzesten eingeschlosse
wir die Spitze uns im positiven Pol li
wird der Allgemeinheit nicht schaden.

Sonst nennt man auch Dreiecke, welc

ungsſtücke eingeführt. Dieſe ſechs Stücke ſind, wenn ir den Pol durch P, die Endpunkte der Meridianbogen ver durch A und A_1 bezeichnen:

1. Die Kürzeſte zwiſchen A und A_1, $= s$.
2. Die Breiten dieſer beiden Punkte: λ, λ_1.
3. Die Längendifferenz derſelben, $= \sigma$.
4. Die Azimuthe dieſer beiden Punkte: α, α_1.

Es iſt klar, daß durch dieſe ſechs Stücke das ſphäroidiſche Dreieck ebenfalls beſtimmt wird, wie durch die drei Seiten und die drei Winkel.

143. Aus drei gegebenen dieſer Stücke die übrigen durch Rechnung zu finden, iſt der Zweck der ſphäroidiſchen Trigonometrie. Sie erfordert einen weit größern Aufwand analytiſcher Hülfsmittel, als die beiden erſten Trigonometrieen, und die Formeln fallen oft ſehr weitläufig aus. Wir müſſen uns daher in dieſem Artikel auf eine vollſtändige Entwickelung der Grundformeln, und die Auflöſung einiger der wichtigſten Hauptaufgaben beſchränken. Ihre wichtigſten Anwendungen findet dieſe Wiſſenſchaft in der Geographie und höhern Geodäſie, alſo bei einem Sphäroid, welches durch eine Ellipſe mit ſehr kleiner Excentricität erzeugt worden iſt. Hieraus ergiebt ſich in den meiſten Fällen eine bedeutende Abkürzung der Rechnungen und Formeln, indem man höhere Potenzen der Excentricität vernachläſſigt, ohne der Genauigkeit zu ſchaden. Die obigen Grundbegriffe ſind eigentlich aus der Geographie entlehnt, mußten aber hier entwickelt werden, weny die ſphäroidiſche Trigonometrie als für ſich beſtehende, rein mathematiſche, Wiſſenſchaft daſtehen ſollte.

Reducirte Breiten.

144. Du-Ségour (Mém. de Paris. 1778.) hat zuerſt die Formeln der ſphäroidiſchen Trigonometrie durch Beziehung des ſphäroidiſchen Dreiecks auf ein correſpondirendes ſphäriſches Dreieck auf der in das Sphäroid be-

wahren gleichzeitig positiv und negativ, l, l_1 bezeichnet werden.

145. Durch den Punkt A denke man dian gelegt, und bezeichne die Coordinate den Mittelpunkt als Anfang angenomme ist die Gleichung der Ellipse

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

woraus leicht erhalten wird:

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{a^2y}{b^2x}.$$

Folglich die Gleichung der Normale:

$$z - y = \frac{a^2y}{b^2x}(u - x).$$

Also

$$\text{tang}\lambda = \frac{a^2y}{b^2x},$$

wo offenbar x immer als positiv anzuseh und folglich auch λ, positiv oder negativ es ist. M. v. die Art. Normale und Li

Für den Kreis wäre

$$\text{tang}\lambda = \frac{y}{\quad}.$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

und augenscheinlich

$$x'^2 + y^2 = b^2,$$

woraus durch Elimination:

$$\frac{\text{tang}\lambda}{\text{tang}l} = \frac{a^2x'}{b^2x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{ax'}{bx}$$

$$= \frac{a}{b} \cdot \frac{\sqrt{a^2b^2 - a^2y^2}}{\sqrt{a^2b^2 - a^2y^2}} = \frac{a}{b};$$

$$\text{tang}l = \frac{b}{a}\text{tang}\lambda, \quad \text{tang}\lambda = \frac{a}{b}\text{tang}l.$$

Diese Formeln dienen, aus der wahren die reducirte Breite zu finden, und umgekehrt.

147. Setzt man

$$e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}, \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2}};$$

$$e^2 = \frac{\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2}, \quad \varepsilon^2 = \frac{e^2}{1 - e^2};$$

$$1 - e^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2}, \quad 1 + \varepsilon^2 = \frac{1}{1 - e^2};$$

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}, \quad \frac{a}{b} = \sqrt{1 + \varepsilon^2};$$

so ist

$$\text{tang}l = \text{tang}\lambda.\sqrt{1 - e^2} = \frac{\text{tang}\lambda}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}$$

$$= \text{tang}\lambda.(1 - \tfrac{1}{2}e^2 - \tfrac{1}{8}e^4 - \ldots)$$

$$\text{tang}\lambda = \frac{\text{tang}l}{\sqrt{1 - e^2}} = \text{tang}l.\sqrt{1 + \varepsilon^2}$$

$$= \text{tang}l.(1 + \tfrac{1}{2}e^2 + \tfrac{3}{8}e^4 + \ldots)$$

und folglich mit Vernachlässigung der zweiten oder vierten Potenzen von e^2:

$$\text{tang}l = \text{tang}\lambda.(1 - \tfrac{1}{2}e^2),$$
$$\text{tang}\lambda = \text{tang}l.(1 + \tfrac{1}{2}e^2);$$

oder

$$\text{tang}l = \text{tang}\lambda.(1 - \tfrac{1}{2}e^2 - \tfrac{1}{8}e^4),$$
$$\text{tang}\lambda = \text{tang}l.(1 + \tfrac{1}{2}e^2 + \tfrac{3}{8}e^4).$$

148. Aus (80.) ergiebt sich, da das dortige

$$\varepsilon = \frac{\frac{b}{a} - 1}{\frac{b}{a} + 1} = \frac{b - a}{b + a} = -\frac{a - b}{a + b},$$

$$+ (\cos a \sin c - \sin a \cos c \cos \beta) \partial \alpha$$
$$+ \sin a \sin c \sin \beta \, \partial \beta,$$

$$\sin c \partial c = (\sin a \cos b - \cos a \sin b \cos \gamma) \partial$$
$$+ (\cos a \sin b - \sin a \cos b \cos \gamma) \partial$$
$$+ \sin a \sin b \sin \gamma \, \partial \gamma,$$

$$\partial a = \cos \gamma \, \partial b + \cos \beta \, \partial c + \sin c \sin \beta \partial$$
$$\partial b = \cos \alpha \, \partial c + \cos \gamma \, \partial a + \sin a \sin \gamma \partial$$
$$\partial c = \cos \beta \, \partial a + \cos \alpha \, \partial b + \sin b \sin \alpha \partial$$

Aus der zweiten Fundamentalgleichung erhält blicklich:

$$\sin a \cos b \, \partial b + \cos a \sin b \, \partial a$$
$$= \sin \beta \cos a \, \partial a + \cos \beta \sin$$
$$\sin \beta \cos c \, \partial c + \cos \beta \sin c \, \partial \beta$$
$$= \sin \gamma \cos b \, \partial b + \cos \gamma \sin$$
$$\sin \gamma \cos a \, \partial a + \cos \gamma \sin a \, \partial \gamma$$
$$= \sin \alpha \cos c \, \partial c + \cos \alpha \sin$$

Die dritte Fundamentalgleichung giebt:

$$- \sin \alpha \, \partial \alpha = (\cos a \cos \beta \sin \gamma + \sin \beta \cos$$
$$+ (\cos a \sin \beta \cos \gamma + \cos \beta \sin$$
$$- \sin a \sin \beta \sin \gamma \, \partial a;$$

woraus, wegen

$$\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma \quad \sin a \sin \beta$$

$$
\begin{aligned}
-\sin\gamma\,\partial\gamma = {} & (\cos c\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta)\,\partial\alpha \\
& + (\cos c\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)\,\partial\beta \\
& - \sin c\sin\alpha\sin\beta\,\partial c, \\
-\partial\alpha = {} & \cos c\,\partial\beta + \cos b\partial\gamma - \sin b\sin\gamma\,\partial a, \\
-\partial\beta = {} & \cos a\,\partial\gamma + \cos c\,\partial\alpha - \sin c\sin\alpha\,\partial b, \\
-\partial\gamma = {} & \cos b\,\partial\alpha + \cos a\,\partial\beta - \sin a\sin\beta\,\partial c.
\end{aligned}
$$

124. Gegeben a, b, c.

Gesucht α, β, γ.

Nimmt man an, daß α, β, γ aus a, b, c berechnet sind; so ist nach (123.)

$$\partial\alpha = \frac{\partial a - \cos\gamma\,\partial b - \cos\beta\,\partial c}{\sin c\sin\beta},$$

$$\partial\beta = \frac{\partial b - \cos\alpha\,\partial c - \cos\gamma\,\partial a}{\sin a\sin\gamma},$$

$$\partial\gamma = \frac{\partial c - \cos\beta\,\partial a - \cos\alpha\,\partial b}{\sin b\sin\alpha}.$$

Setzt man nun statt der trigonometrischen Linien der Winkel aus dem Obigen ihre Ausdrücke durch die Seiten: so erhält man für

$$
\begin{aligned}
(\cos a - \cos b\cos c)\sin a &= \mathfrak{A}, \\
(\cos b - \cos a\cos c)\sin b &= \mathfrak{B}, \\
(\cos c - \cos a\cos b)\sin c &= \mathfrak{C},
\end{aligned}
$$

leicht:

$$\partial\alpha = \frac{\sin a\sin b\sin c\,\partial a - \mathfrak{C}\,\partial b - \mathfrak{B}\,\partial c}{2\sin b\sin c\sqrt{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}},$$

$$\partial\beta = \frac{\sin a\sin b\sin c\,\partial b - \mathfrak{C}\,\partial a - \mathfrak{A}\,\partial c}{2\sin a\sin c\sqrt{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}},$$

$$\partial\gamma = \frac{\sin a\sin b\sin c\,\partial c - \mathfrak{B}\,\partial a - \mathfrak{A}\,\partial b}{2\sin a\sin b\sqrt{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}.$$

125. Gegeben b, c, α.

Gesucht β, γ, a.

Nach (123.) ist

$$
\begin{aligned}
\partial\beta &= \frac{\partial b - \cos\alpha\,\partial c - \cos\gamma\,\partial a}{\sin a\sin\gamma} \\
&= \frac{\partial b - \cos\alpha\,\partial c - \cos\gamma\,\partial a}{\sin c\sin\alpha},
\end{aligned}
$$

woraus, wenn man für ∂a aus (123.) seinen Werth

$$\partial a = \cos\gamma\,\partial b + \cos\beta\,\partial c + \sin c\sin\beta\,\partial\alpha$$

$$\partial b = \frac{\partial\beta + \cos a\,\partial\gamma + \cos c\,\partial\alpha}{\sin c \sin\alpha}$$
$$= \frac{\partial\beta + \cos a\,\partial\gamma + \cos c\,\partial\alpha}{\sin a \sin\gamma},$$

woraus, wenn man für $\partial\alpha$ ſeinen Werth:

$$\partial\alpha = \sin b \sin\gamma\,\partial a - \cos c\,\partial\beta - \cos b$$

ſetzt, leicht erhalten wird:

$$\partial b = \frac{\sin c^2\,\partial\beta + \sin b \sin c \cos a\,\partial\gamma + \sin b}{\sin a \sin\gamma}$$

$$\partial c = \frac{\sin b^2\,\partial\gamma + \sin b \sin c \cos a\,\partial\beta + \cos b}{\sin a \sin\beta}$$

127. Gegeben α, β, γ.

Geſucht a, b, c.

Nach (123.) iſt wieder

$$\partial a = \frac{\partial\alpha + \cos c\,\partial\beta + \cos b\,\partial\gamma}{\sin b \sin\gamma},$$

$$\partial b = \frac{\partial\beta + \cos a\,\partial\gamma + \cos c\,\partial\alpha}{\sin c \sin\alpha},$$

$$\partial c = \frac{\partial\gamma + \cos b\,\partial\alpha + \cos a\,\partial\beta}{\sin a \sin\beta}.$$

Setzt man nun für die trigonometriſchen Linie ihre Ausdrücke durch die Winkel; ſo erhält m

$$\partial c = \frac{\sin a \sin\beta \sin\gamma\, \partial\gamma + \mathfrak{B}'\partial a + \mathfrak{A}'\partial\beta}{2 \sin a \sin\beta \sqrt{-\cos s' \cos(s'-a)\cos(s'-\beta)\cos(s'-\gamma)}}.$$

128. Gegeben a, b, α.

Gesucht β, c, γ.

Nach (123.) ist

$$\partial\beta = \frac{\sin a \cos b\, \partial b + \cos a \sin b\, \partial a - \sin\beta \cos a\, \partial a}{\cos\beta \sin a},$$

$$\partial c = \frac{\partial a - \cos\gamma\, \partial b - \sin c \sin\beta\, \partial\alpha}{\cos\beta},$$

$$\partial\gamma = \frac{\partial c - \cos\beta\, \partial a - \cos a\, \partial b}{\sin b \sin a}.$$

129. Gegeben a, α, β.

Gesucht b, c, γ.

Nach (123.) ist

$$\partial b = \frac{\sin\beta \cos a\, \partial a + \cos\beta \sin a\, \partial\beta - \cos a \sin b\, \partial\alpha}{\sin a \cos b},$$

$$\partial\gamma = \frac{-\partial\alpha - \cos c\, \partial\beta + \sin b \sin\gamma\, \partial a}{\cos b},$$

$$\partial c = \frac{\partial\gamma + \cos b\, \partial\alpha + \cos a\, \partial\beta}{\sin a \sin\beta}.$$

130. Nimmt man zwei Stücke als unveränderlich an; so sind dieselben Fälle wie in (41.) möglich, worauf wir uns also hier beziehen.

131. Unveränderlich a, β
Veränderlich b, c, α, γ } (41. a.)

Für $\partial a = \partial\beta = 0$ geben die allgemeinen Gleichungen in (123.):

$$\partial b = \cos a\, \partial c,$$
$$\sin a \cos b\, \partial b + \cos a \sin b\, \partial\alpha = 0,$$
$$-\partial\alpha = \cos b\, \partial\gamma,$$

drei Gleichungen, aus denen sich immer drei der Größen ∂b, ∂c, $\partial\alpha$, $\partial\gamma$ bestimmen lassen, wenn eine als gegeben angenommen wird. Dividirt man die zweite Gleichung durch $\cos\alpha \cos b$; so werden diese Gleichungen:

$$\partial b = \cos a\, \partial c,$$
$$\operatorname{tang} a\, \partial b = -\operatorname{tang} b\, \partial\alpha,$$
$$-\partial\alpha = \cos b\, \partial\gamma.$$

$$\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\,\partial b = \frac{\sin b}{\cos b}\partial\beta\,,$$

ist; so werden diese Gleichungen:

$$\cos\beta\,\partial c = -\cos\gamma\,\partial b,$$
$$\operatorname{tang}\beta\,\partial b = \operatorname{tang} b\,\partial\beta,$$
$$\cos c\,\partial\beta = -\cos b\,\partial\gamma,$$

aus denen sich auch, wenn eine der Größen $\partial\gamma$ gegeben ist, die übrigen drei immer bestim

133. Unveränderlich a, b
Veränderlich α, β, γ, c } (41. c.

Für $\partial a = \partial b = o$ ist:

$$o = \cos\beta\,\partial c + \sin c \sin\beta\,\partial\alpha,$$
$$o = \cos\alpha\,\partial c + \sin a \sin\gamma\,\partial\beta,$$
$$\cos\alpha \sin b\,\partial\alpha = \cos\beta \sin a\,\partial\beta,$$

oder

$$o = \partial c + \sin c \operatorname{tang}\beta\,\partial\alpha$$
$$o = \partial c + \sin c \operatorname{tang}\alpha\,\partial\beta,$$
$$\cos\alpha\,\partial\alpha = \cos\beta\,.\,\frac{\sin a}{\sin b}\,\partial\beta = \sin\alpha\cot$$

oder

$$\partial c = -\sin c \operatorname{tang}\beta\,\partial\alpha,$$
$$\partial c = -\sin c \operatorname{tang}\alpha\,\partial\beta$$

oder

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\cos b\,\partial b = \cos a\,\partial a,$$

$$\frac{\sin a}{\sin b}\cos b\,\partial b = \cos a\,\partial a,$$

$$0 = \partial\gamma - \operatorname{tang} b \sin\gamma\,\partial a,$$

$$0 = \partial\gamma - \frac{\sin a \sin\gamma}{\cos a}\,\partial b$$

$$= \partial\gamma - \operatorname{tang} a \sin\gamma\,\partial b.$$

Alſo

$$\operatorname{tang} a\,\partial b = \operatorname{tang} b\,\partial a,$$

$$\partial\gamma = \operatorname{tang} b \sin\gamma\,\partial a,$$

$$\partial\gamma = \operatorname{tang} a \sin\gamma\,\partial b.$$

III. Sphäroidiſche Trigonometrie.

Grundbegriffe.

135. Unter einem Sphäroid verſtehen wir hier einen durch Umdrehung einer Ellipſe um ihre kleine Axe entſtandenen Körper. Die Drehungsaxe heißt ſchlechthin die Axe, und ihre Endpunkte die Pole. Der von der großen Axe der Ellipſe beſchriebene Kreis wird der Aequator, und jeder, mit demſelben parallele, Schnitt des Sphäroids ein Parallelkreis genannt. Jeder Schnitt durch die Axe iſt eine der erzeugenden gleiche Ellipſe. Die zwiſchen den beiden Polen liegenden Hälften ſolcher Schnitte ſollen Meridiane genannt werden.

136. Der Aequator theilt das Sphäroid in zwei Hälften, von denen die eine die poſitive, die andere die negative genannt werden ſoll. Die beiden Pole erhalten nach den Hälften, in welchen ſie liegen, gleiche Benennungen.

137. Legt man durch einen Punkt auf der Oberfläche des Sphäroids einen Meridian; ſo heißt der ſpitze Winkel, welchen die durch den gegebenen Punkt gezogene Normale mit der großen Axe des Meridians einſchließt, die Breite des gegebenen Punktes. Die Breiten der Pole ſind $= 90^0$, ſonſt ſind alle Breiten $< 90^0$, und werden als poſitiv oder negativ betrachtet, *jenachdem* die entſpre-

0 bis 360°. Die positive Differenz zwi
zweier Punkte heißt die Längendiffere

139. Die kürzeste Linie, welche sich
fläche des Sphäroids zwischen irgend zwei g
ten ziehen läßt, soll schlechthin die Kürze
den. Eine solche Linie ist natürlich immer
stimmten Gesetze gekrümmt, und kann also
über die beiden gegebenen Punkte hinaus ve
werden.

140. Die nach der Richtung der Länge
Seite des positiven Pols hin mit den Me
Punkte von ihrer Kürzesten eingeschlossenen
Azimuthe genannt.

141. Unter einem sphäroidischen D
hen wir hier ein Dreieck auf der Oberfläch
roids, dessen Spitze im positiven Pol liegt
von zwei Meridianbogen nebst der zwischen i
derselben liegenden Kürzesten eingeschlossen
wir die Spitze uns im positiven Pol lie
wird der Allgemeinheit nicht schaden.

Sonst nennt man auch Dreiecke, welch

mungsſtücke eingeführt. Dieſe ſechs Stücke ſind, wenn wir den Pol durch P, die Endpunkte der Meridianbogen aber durch A und A_1 bezeichnen:

1. Die Kürzeſte zwiſchen A und A_1, $= s$.
2. Die Breiten dieſer beiden Punkte: λ, λ_1.
3. Die Längendifferenz derſelben, $= \sigma$.
4. Die Azimuthe dieſer beiden Punkte: α, α_1.

Es iſt klar, daß durch dieſe ſechs Stücke das ſphäroidiſche Dreieck ebenfalls beſtimmt wird, wie durch die drei Seiten und die drei Winkel.

143. Aus drei gegebenen dieſer Stücke die übrigen durch Rechnung zu finden, iſt der Zweck der ſphäroidiſchen Trigonometrie. Sie erfordert einen weit größern Aufwand analytiſcher Hülfsmittel, als die beiden erſten Trigonometrieen, und die Formeln fallen oft ſehr weitläufig aus. Wir müſſen uns daher in dieſem Artikel auf eine vollſtändige Entwickelung der Grundformeln, und die Auflöſung einiger der wichtigſten Hauptaufgaben beſchränken. Ihre wichtigſten Anwendungen findet dieſe Wiſſenſchaft in der Geographie und höhern Geodäſie, alſo bei einem Sphäroid, welches durch eine Ellipſe mit ſehr kleiner Excentricität erzeugt worden iſt. Hieraus ergiebt ſich in den meiſten Fällen eine bedeutende Abkürzung der Rechnungen und Formeln, indem man höhere Potenzen der Excentricität vernachläſſigt, ohne der Genauigkeit zu ſchaden. Die obigen Grundbegriffe ſind eigentlich aus der Geographie entlehnt, mußten aber hier entwickelt werden, wenn die ſphäroidiſche Trigonometrie als für ſich beſtehende, rein mathematiſche, Wiſſenſchaft daſtehen ſollte.

Reducirte Breiten.

144. Du-Ségour (Mém. de Paris. 1778.) hat zuerſt die Formeln der ſphäroidiſchen Trigonometrie durch Beziehung des ſphäroidiſchen Dreiecks auf ein correſpondirendes ſphäriſches Dreieck auf der in das Sphäroid be-

wahren gleichzeitig positiv und negativ, l, l_1 bezeichnet werden.

145. Durch den Punkt A denke man dian gelegt, und bezeichne die Coordinater den Mittelpunkt als Anfang angenommer ist die Gleichung der Ellipse

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

woraus leicht erhalten wird:

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{a^2y}{b^2x}.$$

Folglich die Gleichung der Normale:

$$z - y = \frac{a^2y}{b^2x}(u - x).$$

Also

$$\text{tang}\lambda = \frac{a^2y}{b^2x},$$

wo offenbar x immer als positiv anzusehe und folglich auch λ, positiv oder negativ es ist. M. v. die Art. Normale und Lin

Für den Kreis wäre

$$\text{tang}\lambda = \frac{y}{}.$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

und augenſcheinlich

$$x'^2 + y^2 = b^2,$$

woraus durch Elimination:

$$\frac{\text{tang}\lambda}{\text{tang}l} = \frac{a^2x'}{b^2x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{ax'}{bx}$$

$$= \frac{a}{b} \cdot \frac{\sqrt{a^2b^2 - a^2y^2}}{\sqrt{a^2b^2 - a^2y^2}} = \frac{a}{b};$$

$$\text{tang}l = \frac{b}{a}\text{tang}\lambda,\ \text{tang}\lambda = \frac{a}{b}\text{tang}l.$$

Dieſe Formeln dienen, aus der wahren die reducirte Breite zu finden, und umgekehrt.

147. Setzt man

$$e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}},\ \varepsilon = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2}};$$

$$e^2 = \frac{\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2},\ \varepsilon^2 = \frac{e^2}{1 - e^2};$$

$$1 - e^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2},\ 1 + \varepsilon^2 = \frac{1}{1 - e^2};$$

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2},\ \frac{a}{b} = \sqrt{1 + \varepsilon^2};$$

ſo iſt

$$\text{tang}l = \text{tang}\lambda.\sqrt{1 - e^2} = \frac{\text{tang}\lambda}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}$$

$$= \text{tang}\lambda.(1 - \tfrac{1}{2}e^2 - \tfrac{1}{8}e^4 - \ldots)$$

$$\text{tang}\lambda = \frac{\text{tang}l}{\sqrt{1 - e^2}} = \text{tang}l.\sqrt{1 + \varepsilon^2}$$

$$= \text{tang}l.(1 + \tfrac{1}{2}e^2 + \tfrac{1}{8}e^4 + \ldots)$$

und folglich mit Vernachläſſigung der zweiten oder vierten Potenzen von e^2:

$$\text{tang}l = \text{tang}\lambda.(1 - \tfrac{1}{2}e^2),$$
$$\text{tang}\lambda = \text{tang}l.(1 + \tfrac{1}{2}e^2);$$

oder

$$\text{tang}l = \text{tang}\lambda.(1 - \tfrac{1}{2}e^2 - \tfrac{1}{8}e^4),$$
$$\text{tang}\lambda = \text{tang}l.(1 + \tfrac{1}{2}e^2 + \tfrac{3}{8}e^4).$$

148. Aus (80.) ergiebt ſich, da das dortige

$$s = \frac{\frac{b}{a} - 1}{\frac{b}{a} + 1} = \frac{b - a}{b + a} = -\frac{a - b}{a + b},$$

n kann, wegen der Gleichungen in (146.) au-

$$= \lambda - \frac{a-b}{a+b}\sin 2\lambda + \tfrac{1}{2}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 . \sin 4\lambda$$
$$- \tfrac{1}{3}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^3 . \sin 6\lambda + \tfrac{1}{4}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^4 . \sin 8\lambda - \ldots$$
$$= \lambda + \frac{a-b}{a+b}\sin 2\lambda + \tfrac{1}{2}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 . \sin 4\lambda$$
$$+ \tfrac{1}{3}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^3 . \sin 6\lambda + \tfrac{1}{4}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^4 . \sin 8\lambda + \ldots$$

b ſehr wenig von einander verſchieden, alſo
hr kleiner Bruch; ſo erhält man mit Vernach-
Quadrate:

$$l = \lambda - \frac{a-b}{a+b}\sin 2\lambda,$$
$$\lambda = l + \frac{a-b}{a+b}\sin 2l.$$

n $\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^n$ nach Potenzen von e oder ε zu ent-
raus ſich merkwürdige Reihen ergeben, wollen
erhaupt

$$y = (x + \sqrt{x^2-1})^n,$$

Setzt man nun alle Coefficienten $= o$; ſo erhellet ſogleich, daß

$$B = D = F = H = \ldots = o.$$

Da $n^2 - n - n(n-1) = o$ iſt; ſo bleibt A unbeſtimmt. Allgemein iſt nun

$$o = [n^2 - (n-\alpha) - (n-\alpha)(n-\alpha-1)]N + (n-\alpha+2)(n-\alpha+1)L,$$

woraus

$$N = -\frac{(n-\alpha+2)(n-\alpha+1)}{\alpha(2n-\alpha)}L = -\frac{(n-\alpha+2)(n-\alpha+1)}{2\alpha(n-\frac{1}{2}\alpha)}L.$$

Alſo

$$C = -\frac{n}{4}A = -\frac{n^2}{4}A,$$

$$E = -\frac{n-3}{8}C = \frac{n(n-3)}{4.8}A,$$

$$G = -\frac{(n-4)(n-5)}{12(n-3)}E = -\frac{n(n-4)(n-5)}{4.8.12}A,$$

$$I = -\frac{(n-6)(n-7)}{16(n-4)}G = \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{4.8.12.16}A.$$

etc. etc. etc. etc.

Entwickelt man aber y nach dem binomiſchen Lehrſatze; ſo erhält man als erſtes Glied

$$\left\{1 + \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1.2} + \ldots\right\} x^n = (1+1)^n x^n = 2^n x^n.$$

Alſo $A = 2^n$, und folglich

$$y = (2x)^n - n(2x)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{2}(2x)^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{2.3}(2x)^{n-6} + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{2.3.4}(2x)^{n-8} - \ldots\ldots\ldots$$

Da, wie leicht erhellet,

$$(x - \sqrt{x^2-1})^n = (x + \sqrt{x^2-1})^{-n}$$

iſt; ſo iſt, für

$$(x - \sqrt{x^2-1})^n = y':$$

alſo auch sin l, mit y gleichzeitig poſitiv und ſo iſt

$$b \sin l = y,$$

$$= \frac{\sin l}{\text{tang } l} = \frac{y}{b} \cdot \frac{bx}{ay} = \frac{x}{a},$$

$$a \cos l = x.$$

zeſte Linie zwiſchen A und A_1.

ſey

$$u = f(x, y, z) = o$$

e Gleichung einer krummen Fläche, auf welzeſte Linie s gezogen werden ſoll; ſo iſt

$$s = \int \partial x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}$$

$$= \int \partial x \sqrt{1 + y_1^2 + z_1^2}.$$

tionsrechnung (38.) iſt

$$v = \sqrt{1 + y_1^2 + z_1^2},\ \partial s = v \partial x,$$

$$\left.\begin{array}{l} N = Q = R = \ldots . \\ N' = Q' = R' = \ldots . \end{array}\right\} = o,$$

$$P = \left(\frac{\partial v}{\partial z_1}\right) = \frac{z_1}{\sqrt{1 + y_1^2 + z_1^2}}$$
$$= \frac{z_1}{v} = \frac{\partial z}{v\partial x} = \frac{\partial z}{\partial s}.$$

Alſo

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right).\partial\frac{\partial y}{\partial s} - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right).\partial\frac{\partial z}{\partial s} = 0.$$

Das Integral dieſer Gleichung, in Verbindung mit der gegebenen Gleichung

$$f(x, y, z) = 0,$$

reicht zur Beſtimmung der kürzeſten Linie hin.

Durch Vertauſchung der Buchſtaben erhält man aus obiger Gleichung:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right).\partial\frac{\partial y}{\partial s} - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right).\partial\frac{\partial x}{\partial s} = 0,$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right).\partial\frac{\partial z}{\partial s} - \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right).\partial\frac{\partial y}{\partial s} = 0,$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right).\partial\frac{\partial x}{\partial s} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right).\partial\frac{\partial z}{\partial s} = 0.$$

Betrachtet man ∂s als conſtant; ſo werden dieſe Gleichungen:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\partial^2 y - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\partial^2 x = 0,$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\partial^2 z - \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\partial^2 y = 0,$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\partial^2 x - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\partial^2 z = 0.$$

153. Bei einem Revolutionsſphäroid ſey jetzt die Axe der Drehung die Axe der z. Denkt man ſich von irgend einem Punkte ſeiner Oberfläche auf die Ebene der xy ein Perpendikel z gefällt, und durch deſſen Fußpunkt nach dem Anfange der Coordinaten die Linie t gezogen; ſo ſind t, z Coordinaten der erzeugenden Curve, deren Gleichung alſo durch

$$\varphi(t, z) = 0$$

bezeichnet werden kann, ſo daß folglich t eine Function von z iſt, und demnach

$$t = \varphi' z$$

geſetzt werden kann. Da offenbar

$$\partial\varphi\,\partial s = \frac{C(\partial v^2 + \partial z^2)}{v^2 - C^2},$$

$$\frac{\partial s^2 + v^2\partial\varphi^2}{\partial s^2 - v^2\partial\varphi^2} = \frac{v^2 + C^2}{v^2 - C^2}.$$

t nun (Fig. 64.) P der Endpunkt der Rota-
im elliptiſchen Sphäroid der Pol, und AA_1
kürzeſten Linie durch A und A_1; ſo ſey A_1B
durch A_1 lege man eine mit der Ebene der xy
ene, deren Durchſchnitt A_1C mit der Ober-
phäroids ein Kreis iſt. Der Radius dieſes
wenn x, y, z die Coordinaten von A_1 ſind,
v, und, da $\partial\varphi$ immer zu einem Kreiſe gehört,
neſſer $= 1$ iſt; ſo iſt

$$1 : v = \partial\varphi : A_1C, \quad A_1C = v\,\partial\varphi,$$

nerken iſt, daß, ſo wie ∂s und $\partial\varphi$, offenbar
nd $\partial\varphi$ gleichzeitig poſitiv und negativ ſind. Be-
nun die Winkel PA_1B, BA_1C reſpective durch
in dem unendlich kleinen rechtwinkligen Drei-

$$\frac{A_1C}{A_1B} = \cos\gamma, \quad \frac{v\,\partial\varphi}{\partial s} = \cos\gamma.$$

woraus durch Multiplication ſich leicht ergiebt:

$$\sin\alpha\sin\alpha'\sin\alpha'' = \sin\alpha_1\sin\alpha'_1\sin\alpha''_1,$$

für jedes Dreieck wie AA_1A_2 auf der Oberfläche eines Rotationsſphäroids.

157. Iſt nun das Sphäroid ein elliptiſches; ſo iſt offenbar v die immer als poſitiv betrachtete Abſciſſe der erzeugenden Ellipſe. Beziehen ſich daher jetzt v, α auf den Punkt A, dagegen v_1, α_1 auf den Punkt A_1; ſo iſt (151.):

$$v = a\cos l,\ v_1 = a\cos l_1.$$

Alſo, da $v\sin\alpha$ conſtant iſt:

$$a\cos l\sin\alpha = a\cos l_1\sin\alpha_1,$$
$$\cos l\sin\alpha = \cos l_1\sin\alpha_1.$$

Dieſe Gleichung enthält eine ſehr wichtige allgemeine Relation zwiſchen den reducirten Breiten und Azimuthen irgend zweier Punkte. Man kann dieſe Gleichung auch ſo ſchreiben:

$$\frac{\sin(90^0 - l)}{\sin(90^0 - l_1)} = \frac{\sin(180^0 - \alpha_1)}{\sin\alpha},$$

woraus erhellet, daß ſie einem ſphäriſchen Dreieck angehört, deſſen zwei Seiten und Gegenwinkel $90^0 - l$, $90^0 - l_1$ und $180^0 - \alpha_1$, α ſind. Wir wollen dieſes für das Folgende ſehr wichtige Dreieck immer das Hülfsdreieck nennen, und die dritte Seite nebſt ihrem Gegenwinkel durch f und ψ bezeichnen.

158. Bezeichnet man den Radius des Parallelkreiſes durch A_1 mit ϱ, ſo daß in (156.) $v = \varrho$, den Radius des Krümmungskreiſes der Ellipſe für denſelben Punkt aber durch r; ſo bleibt r auch für C unverändert, und das unendlich kleine BC kann als ein Theil des Krümmungskreiſes in C betrachtet werden. Da nun BC offenbar das Differential der Breite von A_1 iſt, welche wir hier $= \lambda$ ſetzen wollen; ſo iſt

$$1 : r = \partial\lambda : BC,\ BC = r\partial\lambda.$$

Alſo im Dreieck A_1BC nach (156.), da $A_1B^2 = A_1C^2 - BC^2$ iſt,

$$\partial s = \partial\varphi\sqrt{\varrho^2 + r^2\frac{\partial\lambda^2}{\partial\varphi^2}},$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \frac{1}{\varrho\sqrt{1 + \left(\frac{r}{\varrho}\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi}\right)^2}},$$

$$\pm \cos\alpha_1 = \frac{\sqrt{\cos l_1^2 - \sin\alpha^2 \cos l^2}}{\cos l_1}.$$

l wird immer positiv genommen (159.), und
ist, da l_1 nie $> 90^0$, immer positiv. Also
uch immer positiv, und folglich das obere oder
en zu nehmen, jenachdem $\alpha_1 <$ oder $> 90^0$
gehöriger Substitution erhält man:

$$\frac{\sin\alpha \cos l \sqrt{1 - e^2 \cos l_1^2} \cdot \cos\alpha_1 \cos l_1 \partial\psi}{\cos l_1 \sin\alpha_1 \cdot \pm \cos\alpha_1 \cos l_1},$$

$$\frac{a \cos l_1 \sqrt{1 - e^2 \cos l_1^2} \cdot \cos\alpha_1 \partial f}{\pm \cos\alpha_1 \cos l_1},$$

n oder untern Zeichen zu nehmen sind, jenach-
oder $> 90^0$ ist. (M. s. vorher und 159.).
eben sich nach leichter Reduction als Grund-
sphäroidischen Trigonometrie:

$$\sin\alpha \cos l = \sin\alpha_1 \cos l_1,$$

$$\partial\sigma = \sqrt{1 - e^2 \cos l_1^2} \cdot \partial\psi,$$

$$\partial s = a\sqrt{1 - e^2 \cos l_1^2} \cdot \partial f;$$

dratwurzel immer positiv zu nehmen ist. e oder
leicht statt e einführen.

) erhält man nach einigen Reductionen:

$$\partial s = a\sqrt{1 - e^2 + e^2\cos h^2 \sin(h_1 + f)^2}.\partial f$$
$$= b\sqrt{1 + e^2\cos h^2 \sin(h_1 + f)^2}.\partial f.$$

Da ferner nach der erſten Hauptformel in (160.) und ach den dort bewieſenen Differentialformeln

$$\partial\psi = \frac{\sin\alpha_1}{\cos\alpha_1\cos l_2}\partial l_1 = \frac{\sin\alpha_1}{\cos l_1}\partial f$$
$$= \frac{\sin\alpha\cos l}{\cos l_1^2}\partial f$$

l; ſo iſt

$$\partial\sigma = \frac{\sin\alpha\cos l\sqrt{1 - e^2\cos l_1^2}}{\cos l_1^2}\partial f.$$

Integration der Formeln für ∂s und $\partial\sigma$.

162. Um dieſe Integration mit Leichtigkeit auszufüh- n, iſt zuerſt zu bemerken, daß die Größe $1 \pm p^2\sin x^2$ h immer in zwei imaginäre Factoren zerfällen läßt. Be- ichnet man nämlich die Baſis der hyperboliſchen Logarith- en, um ſie von der Excentricität zu unterſcheiden, hier rch c, und $\sqrt{-1}$ durch i; ſo ſetze man

$$1 + p^2\sin x^2 = m^2(1 - nc^{2ix})(1 - nc^{-2ix}),$$

oraus nach Entwickelung des Products, indem man

$$\frac{c^{ix} - c^{-ix}}{2i} = \sin x$$

ßt (Differentialformeln. 48.), leicht erhalten wird.

$$1 + p^2\sin x^2 = m^2\{(1 - n)^2 + 4n\sin x^2\}.$$

ies giebt die beiden Gleichungen $m^2(1 - n)^2 = 1$, $m^2 n = p^2$, aus denen nach bekannten Regeln

$$n = \frac{p^2 + 1 \pm 2\sqrt{p^2 + 1} + 1}{p^2}$$
$$= \left\{\frac{\sqrt{p^2 + 1} \pm 1}{p}\right\}^2 = \frac{\sqrt{p^2 + 1} - 1}{\sqrt{p^2 + 1} + 1},$$

enn man nur das untere Zeichen beibehält. Ferner

$$m = \frac{p^2}{2(\sqrt{p^2 + 1} \pm 1)} = \tfrac{1}{2}(\sqrt{p^2 + 1} \mp 1)$$
$$= \tfrac{1}{2}(\sqrt{p^2 + 1} + 1),$$

enn man, wie vorher, das untere Zeichen beibehält.

$$\int \cos n(h_1 + f)\,\partial f = \frac{1}{n} \sin n(h_1 + f).$$

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{1-\varepsilon^2\cosh^2}+1\}\}\mathfrak{A}f - \frac{1}{1}\overset{1}{\mathfrak{A}}\sin 2(h_1 + f) \\ \qquad - \frac{1}{2}\overset{2}{\mathfrak{A}}\sin 4(h_1 + f) \\ \qquad - \frac{1}{3}\overset{3}{\mathfrak{A}}\sin 6(h_1 + f) \\ \qquad - \frac{1}{4}\overset{4}{\mathfrak{A}}\sin 8(h_1 + f) \\ \qquad - \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}$$

+ Const.

ffenbar $s = o$ für $\alpha_1 = \alpha$, $l_1 = l$, d. i.,
licklich erhellet, da denn das Hülfsdreieck in den
gen durch A übergeht, für $f = o$; ſo er-

$$\left.\begin{array}{l} \}\sqrt{1+\varepsilon^2\cosh^2}+1\}\}\frac{1}{1}\overset{1}{\mathfrak{A}}\sin 2h_1 + \frac{1}{2}\overset{2}{\mathfrak{A}}\sin 4h_1 \\ \qquad + \frac{1}{3}\overset{3}{\mathfrak{A}}\sin 6h_1 \end{array}\right\}$$

Diese Formel soll im Folgenden immer durch (A) bezeichnet werden.

164. Wäre ε sehr klein, und es wäre verstattet, höhere Potenzen als ε^2 zu vernachlässigen; so erhielte man

$$\frac{\partial s}{b} = \sqrt{1 + e^2 \cos h^2 \sin (h_1 + f)^2}\,.\,\partial f$$
$$= |1 + \tfrac{1}{2} e^2 \cos h^2 \sin (h_1 + f)^2 |\partial f$$
$$= |1 + \tfrac{1}{4} e^2 \cos h^2 [1 - \cos 2 (h_1 + f)]|\partial f,$$

$$\frac{s}{b} = (1 + \tfrac{1}{4} e^2 \cos h^2) f - \tfrac{1}{8} e^2 \cos h^2 \sin 2 (h_1 + f)$$
$$+ \text{Const.}$$

Bestimmt man nun die Constante wie vorher; so erhält man nach einigen leichten Reductionen:

$$\frac{s}{b} = f + \tfrac{1}{4} e^2 \cos h^2 | f - \cos (2h_1 + f) \sin f | ,$$

welche Näherungsformel immer durch (A′) bezeichnet werden soll.

165. Um nun auch σ zu finden, entwickele man in der Formel für $\partial\sigma$ (161.) die Quadratwurzel in eine Reihe; so erhält man:

$$\partial\sigma = \frac{\sin\alpha \cos l \partial f}{\cos l_1^{\,2}}$$
$$- \tfrac{1}{4} e^2 \sin\alpha \cos l \Big| 1 + \tfrac{1}{2} e^2 \cos l_1^{\,2} + \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 6} e^4 \cos l_1^{\,4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 6 \cdot 8} e^6 \cos l_1^{\,6} + \ldots\ldots \Big\} \partial f$$

$$\int \frac{\partial f}{\cos l_1^{\,2}} = \int \frac{\partial f}{1 - \cos h^2 \sin (h_1 + f)^2}$$
$$= \frac{1}{\sin h} \int \frac{\sin h \partial f}{1 - \cos h^2 \sin (h_1 + f)^2} ,$$

woraus, wenn man Zähler und Nenner mit $\cos (h_1 + f)^2$ dividirt, und $\partial f = \partial (h_1 + f)$ setzt, leicht erhalten wird:

$$\int \frac{\partial f}{\cos l_1^{\,2}} = \frac{1}{\sin h} \int \frac{\partial . \sin h \tang (h_1 + f)}{1 + \sin h^2 \tang (h_1 + f)^2}$$
$$= \frac{1}{\sin h} \operatorname{Arc\,tang} \sin h \tang (h_1 + f).$$

(Differentialformeln. 31.)

Die Constante muß hier wieder dadurch bestimmt wer-

$$\frac{(n-1)(n-2)}{1.2.3}\varepsilon_2{}^3 + \frac{n}{1}\cdot\frac{n\ldots(n-3)}{1\ldots4}\varepsilon_2{}^5 + \frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{n..(n-4)}{1..5}\varepsilon_2{}^7$$
$$+ \frac{n..(n-2)}{1.2.3}\cdot\frac{n..(n-5)}{1\ldots6}\cdot\varepsilon_2{}^9 + \ldots.$$

u. ſ. f. u. ſ. f.

obiges Product

$$\begin{aligned}
&N\\
&- \overset{1}{N}\left\{c^{2i(h_1+f)} + c^{-2i(h_1+f)}\right\}\\
&+ \overset{2}{N}\left\{c^{4i(h_1+f)} + c^{-4i(h_1+f)}\right\}\\
&- \overset{3}{N}\left\{c^{6i(h_1+f)} + c^{-6i(h_1+f)}\right\}\\
&+ \overset{4}{N}\left\{c^{8i(h_1+f)} + c^{-8i(h_1+f)}\right\}\\
&- \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \; & N\\
& - 2\overset{1}{N}\cos 2(h_1+f)\\
& + 2\overset{2}{N}\cos 4(h_1+f)\\
& - 2\overset{3}{N}\cos 6(h_1+f)\\
& + 2\overset{4}{N}\cos 8(h_1+f)\\
& - \ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$$+\frac{1.3.5}{4.6.8}e^6.\left(\frac{\sin h+1}{2}\right)^6.\left\{\begin{array}{l}C\\ -2\overset{1}{C}\cos 2(h_1+f)\\ +2\overset{2}{C}\cos 4(h_1+f)\\ -2\overset{3}{C}\cos 6(h_1+f)\end{array}\right.$$

$$+\frac{1\ldots7}{4..10}e^8.\left(\frac{\sin h+1}{2}\right)^8.\left\{\begin{array}{l}D\\ -2\overset{1}{D}\cos 2(h_1+f)\\ +2\overset{2}{D}\cos 4(h_1+f)\\ -2\overset{3}{D}\cos 6(h_1+f)\\ +2\overset{4}{D}\cos 8(h_1+f)\end{array}\right.$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

net man nun nach den Coſinuſſen der Vielfachen, und ſetzt

$$\mathfrak{B}=1+\tfrac{1}{4}e^2.\left(\frac{\sin h+1}{2}\right)^2.A$$
$$+\frac{1.3}{4.6}e^4\left(\frac{\sin h+1}{2}\right)^4.B$$
$$+\frac{1.3.5}{4.6.8}e^6\left(\frac{\sin h+1}{2}\right)^6.C$$
$$+\ldots\ldots\ldots$$

$$\overset{1}{\mathfrak{B}}=\tfrac{1}{4}e^2.\frac{(\sin h+1)^2}{2}.\overset{1}{A}$$
$$+\frac{1.3}{4.6}e^4.\frac{(\sin h+1)^4}{2^3}.\overset{1}{B}$$
$$+\frac{1.3.5}{4.6.8}e^6.\frac{(\sin h+1)^6}{2^5}.\overset{1}{C}$$
$$+\ldots\ldots\ldots$$

$$\overset{2}{\mathfrak{B}}=\frac{1.3}{4.6}e^4.\frac{(\sin h+1)^4}{2^3}.\overset{2}{B}$$
$$+\frac{1.3.5}{4.6.8}e^6.\frac{(\sin h+1)^6}{2^5}.\overset{2}{C}$$
$$+\frac{1\ldots7}{4..10}e^8.\frac{(\sin h+1)^8}{2^7}.\overset{2}{D}$$
$$+\ldots\ldots\ldots$$

$$\overset{3}{\mathfrak{B}}=\frac{1.3.5}{4.6.8}e^6.\frac{(\sin h+1)^6}{2^5}.\overset{3}{C}$$
$$+\frac{1\ldots7}{4..10}e^8.\frac{(\sin h+1)^8}{2^7}.\overset{3}{D}$$
$$+\frac{1\ldots9}{4..12}e^{10}.\frac{(\sin h+1)^{10}}{2^9}.\overset{3}{E}$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

u. ſ. f. u. ſ. f.

4. p. 49. beſchäftigt haben, iſt folgende:

Aus der Länge der kürzeſten Linie s, d
dem Azimuth α des einen Punktes A, die
Azimuth α_1, und die Längendifferenz σ zu

Man überſieht leicht, daß die Auflöſu
kehrung der Reihe (A) zurückkommt, um
zu finden. Denn dann ſind drei Stücke
des Hülfsdreiecks gegeben, und $90^0 - l_1$
alſo auch l_1 und α_1 laſſen ſich nach bekan
aber mittelſt der Reihe (B) berechnen, da
ſung des Hülfsdreiecks ſich auch ψ ergiebt.
übung ſcheint folgendes Verfahren den V
nen, wenn die Excentricität e, alſo auch
wie dies bei der Anwendung auf geodätiſch
kanntlich immer der Fall iſt. Aus (A) e

$$f = \frac{1}{\alpha}\left\{\frac{2s}{b\sqrt{1 + e^2\cos h^2}} + 1\right\}$$
$$+ \tfrac{1}{2}\alpha^1 \cos(2h_1 + f)\sin f$$
$$+ \tfrac{1}{2}\alpha^2 \cos(4h_1 + 2f)\sin 2$$
$$+ \tfrac{1}{3}\alpha^3 \cos(6h_1 + 3f)\sin 3$$

ıchdem man h, h_1 wie vorher (166.) aus α, l berechnet
ıt. Dieſen erſten Näherungswerth ſetze man für f in den
veiten Theil obiger Gleichung, woraus ein zweiter Nä-
ıerungswerth von f hervorgeht, welcher eben ſo zu einem
ıitten, dieſer wieder zu einem vierten führt, u. ſ. f. Man
ıuß dieſes Verfahren ſo lange fortſetzen, bis zwei auf
inander folgende Näherungswerthe ſich in der verlangten
lnzahl von Decimalſtellen nicht mehr unterſcheiden.

Dieſes Verfahren iſt, wie es uns ſcheint, für die Aus-
ıbung bei Weitem das brauchbarſte, in dieſem Falle, und
ı allen ähnlichen. Um indeß auch einen entwickelten
Werth von f zu erhalten, und zugleich die Anwendung des
von Oriani und Legendre ebenfalls häufig gebrauchten
lagrangiſchen Satzes zu zeigen, wollen wir hier noch f bis
ıuf die vierte Potenz von ε berechnen. So weit geht
ıch Legendre a. a. O., Oriani dagegen giebt eine ſehr
omplicirte allgemeine Reihe.

Entwickelt man ∂s bis zu dem Gliede mit ε^4; ſo er-
iebt ſich

$$\frac{\partial s}{b} = \left\{ \begin{matrix} 1 + \frac{1}{2}e^2 \cos h^2 \sin (h_1 + f)^2 \\ - \frac{1}{8}e^4 \cos h^4 \sin (h_1 + f)^4 \end{matrix} \right\} \partial f,$$

oraus, wenn man

$$2 \sin (h_1 + f)^2 = 1 - \cos 2 (h_1 + f),$$
$$2 \cos 2(h_1 + f)^2 = 1 + \cos 4 (h_1 + f)$$

ıt, leicht erhalten wird:

$$\frac{\partial s}{b} = (1 + \tfrac{1}{4}e^2 \cos h^2 - \tfrac{3}{64}e^4 \cos h^4)\partial f$$
$$- \tfrac{1}{4}e^2 \cos h^2 (1 - \tfrac{1}{4}e^2 \cos h^2) \cos 2 (h_1 + f) \partial f$$
$$- \tfrac{1}{64}e^4 \cos h^4 \cos 4 (h_1 + f) \partial f.$$

lſo, wenn man integrirt:

$$\frac{s}{b} = (1 + \tfrac{1}{4}e^2 \cos h^2 - \tfrac{3}{64}e^4 \cos h^4) f$$
$$- \tfrac{1}{8}e^2 \cos h^2 (1 - \tfrac{1}{4}e^2 \cos h^2) \sin 2 (h_1 + f)$$
$$- \tfrac{1}{128}e^4 \cos h^4 \sin 4 (h_1 + f) + C.$$

)ie Conſtante wird wie vorher ſo beſtimmt, daß s = o
ir f = o. Dies giebt:

$$\frac{s}{b} = (1 + \tfrac{1}{4}e^2 \cos h^2 - \tfrac{3}{64}e^4 \cos h^4) f$$
$$- \tfrac{1}{8}e^2 \cos h^2 (1 - \tfrac{1}{4}e^2 \cos h^2) \cos (2h_1 + f) \sin f$$
$$- \tfrac{1}{128}e^4 \cos h^4 \cos (4h_1 + 2f) \sin 2f.$$

$$+ e^2 \Big\{ (- \tfrac{1}{4} \cos h^2 + \tfrac{7}{64} e^2 \cos h^4)$$
$$+ \tfrac{1}{4} \cos h^2 (1 - \tfrac{1}{2} e^2 \cos h^2) c$$
$$+ \tfrac{1}{192} e^2 \cos h^4 \cos (4h_1 + 2$$

Vergleicht man dieſe Gleichung mit der G

$$x = y + u \varphi x,$$

des Lagrangiſchen Satzes (M. ſ. dieſen A
Umkehrung der Reihen. 27. ff.); ſo erhält

$$x = f, \; y = \frac{s}{b}, \; u = e^2;$$

$$\varphi x = \varphi f = (- \tfrac{1}{4} \cos h^2 + \tfrac{7}{64} e^2 \cos h^4) \tfrac{s}{b}$$
$$+ \tfrac{1}{4} \cos h^2 (1 - \tfrac{1}{2} e^2 \cos h^2) \cos (2h_1$$
$$+ \tfrac{1}{192} e^2 \cos h^4 \cos (4h_1 + 2f) \sin 2f,$$
$$\varphi y = \varphi \left(\frac{s}{b} \right) = (- \tfrac{1}{4} \cos h^2 + \tfrac{1}{64} e^2 \cos h^4$$
$$+ \tfrac{1}{4} \cos h^2 (1 - \tfrac{1}{2} e^2 \cos h^2) \cos (2h_1 -$$
$$+ \tfrac{1}{192} e^2 \cos h^4 \cos \left(4h_1 + \frac{2s}{b}\right) \sin \frac{2s}{b}.$$

Nach dem Lagrangiſchen Satze iſt nun

$$\frac{\partial y}{} \; u$$

in Bezug auf $x = f$ differentiiren, und dann $\frac{s}{b}$ für f ſetzen. Es erhellet aber, daß man bei der Entwickelung von $(\varphi x)^2$ weglaſſen kann:

1, alle Glieder, welche kein f enthalten, da dieſe, bei der Differentiation verſchwinden; 2, alle Glieder, welche ε^4 enthalten, da das Differential in $\frac{u^2}{1.2} = \frac{\varepsilon^4}{1.2}$ multiplicirt wird, und man bloß ε^4 berückſichtigt.

Hieraus erhält man:

$$(\varphi x)^2 = (\varphi f)^2$$

$$= \left\{ -\tfrac{1}{4}\cos h^2 . \frac{s}{b} + \tfrac{1}{4}\cos h^2 \cos(2h_1 + f)\sin f \right\}^2,$$

$$= -\tfrac{1}{4}\cos h^4 \cos(2h_1 + f)\sin f . \frac{s}{b}$$
$$+ \tfrac{1}{16}\cos h^4 \cos(2h_1 + f)^2 . \sin f^2$$

$$= \tfrac{1}{8}\cos h^4 \left\{ -\frac{s}{b}\cos(2h_1 + f)\sin f \right.$$
$$\left. + \tfrac{1}{2}\cos(2h_1 + f)^2 \sin f^2 \right\}$$

$$\frac{\partial . (\varphi f)^2}{\partial f} = \tfrac{1}{8}\cos h^4 \left\{ -\frac{s}{b}\cos(2h_1 + f)\cos f \right.$$
$$+ \frac{s}{b}\sin(2h_1 + f)\sin f$$
$$+ \cos(2h_1 + f)^2 \sin f \cos f$$
$$\left. - \sin(2h_1 + f)\cos(2h_1 + f)\sin f^2 \right\}$$

$$= \tfrac{1}{8}\cos h^4 \left\{ -\frac{s}{b}\cos 2(h_1 + f) \right.$$
$$\left. + \cos(2h_1 + f)\cos 2(h_1 + f)\sin f \right\}$$

$$= \tfrac{1}{8}\cos h^4 \cos 2(h_1 + f) \left\{ -\frac{s}{b} + \cos(2h_1 + f)\sin f \right\}$$

Alſo

$$\frac{\partial . (\varphi y)^2}{\partial y} = \tfrac{1}{8}\cos h^4 \cos 2(h_1 + \tfrac{s}{b})$$
$$\times \left\{ -\frac{s}{b} + \cos(2h_1 + \frac{s}{b})\sin\frac{s}{b} \right\}.$$

Subſtituirt man nun die gefundenen Ausdrücke in die Reihe für $x = f$, und ordnet nach Potenzen von ε; ſo erhält man nach einigen leichten Reductionen:

$$f = \frac{s}{b}$$
$$- \tfrac{1}{4}\varepsilon^2 \cos h^2 \left\{ \frac{s}{b} - \cos(2h_1 + \frac{s}{b})\sin\frac{s}{b} \right\}$$

172. Jede Seite $\alpha\beta$ hat zwei Richtu
und von β nach α, jenachdem α oder β
angeſehen wird. Der Winkel einer Se
nommenen Axe wird erhalten, wenn n
fang der Seite eine Parallele mit der A
dieſer Parallele an aufwärts von der li
ten Hand hin die Winkel von 0^0 bis 3
Neigungswinkel der Seiten

$$\alpha\beta,\ \beta\gamma,\ \gamma\delta,\ \ldots\ \mu\nu,\ \nu\alpha$$

ſollen, wenn man

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots\ \mu,\ \nu$$

als Anfangspunkte annimmt, durch

$$\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1,\ \ldots\ \mu_1,\ \nu_1;$$

wenn man aber

$$\beta,\ \gamma,\ \delta,\ \ldots\ \nu,\ \alpha$$

als Anfangspunkte annimmt, durch

$$\alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2,\ \ldots\ \mu_2,\ \nu_2$$

bezeichnet werden.

173. Aus Fig. 67. erhellet augenbl

$$\pm\alpha_1 \mp \alpha_2 = 180^0,\ \pm\alpha_1 = 180^0$$

ie beiden von der linken nach der rechten Hand hin darauf olgenden durch β, γ, und die entsprechenden Seiten wie orher. Die spitzen Neigungswinkel der Seiten gegen die Are seyen α', β', γ', die nach dem obigen Geſetz (172.) genommenen dagegen α_1, β_1, γ_1. Die Entfernungen der berſten und unterſten, oberſten und mittelſten, unterſten und mittelſten Parallelen von einander ſeyn p, q, r, ſo daß immer $p = q + r$. Man muß nun zwei Fälle unterſcheiden, jenachdem β in der mittelſten, γ in der oberſten, oder β in der oberſten, γ in der mittelſten Parallele liegt. Im erſten Falle iſt, wie augenblicklich erhellet, $= a \sin \alpha'$, $q = b \sin \beta'$, $p = c \sin \gamma'$. Alſo

$$c \sin \gamma' = a \sin \alpha' + b \sin \beta'.$$

ber offenbar $\alpha_1 < 180^0$, $\beta_1 < 180^0$, $\gamma_1 > 180^0$. lſo $\sin \alpha' = \sin \alpha_1$, $\sin \beta' = \sin \beta_1$, $\sin \gamma' = -\sin \gamma_1$, und folglich

$$-c \sin \gamma_1 = a \sin \alpha_1 + b \sin \beta_1,$$
$$a \sin \alpha_1 + b \sin b_1 + c \sin \gamma_1 = 0.$$

m zweiten Falle dagegen iſt $p = a \sin \alpha'$, $q = b \sin \beta'$, $= c \sin \gamma'$. Alſo

$$a \sin \alpha' = b \sin \beta' + c \sin \gamma'.$$

ber $\alpha_1 < 180^0$, $\beta_1 > 180^0$, $\gamma_1 > 180^0$. Alſo n $\alpha' = \sin \alpha_1$, $\sin \beta' = -\sin \beta_1$, $\sin \gamma' = -\sin \gamma_1$, id folglich

$$a \sin \alpha_1 = -b \sin \beta_1 - c \sin \gamma_1,$$

er ebenfalls

$$a \sin \alpha_1 + b \sin \beta_1 + c \sin \gamma_1 = 0.$$

175. Zieht man jetzt durch die drei Spitzen des gegenen Dreiecks Perpendikel auf die angenommene Are, und ißt p, q, r die Entfernung der beiden äußerſten Perpenikel, des am weiteſten rechts und des mittelſten, und des m weiteſten links liegenden Perpendikels und des mittelen bedeuten; ſo muß man, wenn α den in dem Perendikel am weiteſten links liegenden Punkt bezeichnet, ieder zwei Fälle unterſcheiden, jenachdem β in dem mitlſten, γ in dem Perpendikel rechts, oder β in dem Perendikel rechts, γ in dem mittelſten Perpendikel liegt.

iſt. Im zweiten Falle iſt $p = a\cos\alpha$
$r = c\cos\gamma'$. Alſo

$$a\cos\alpha' = b\cos\beta' + c\cos\gamma$$

In dieſem Falle liegt aber immer α_1 z
270^0, β_1 zwiſchen 270^0 und 90^0, γ_1 z
90^0, ſo daß $\cos\alpha' = -\cos\alpha_1$, co
$\cos\gamma' = \cos\gamma_1$, und folglich

$$-a\cos\alpha_1 = b\cos\beta_1 + c\cos$$
$$a\cos\alpha_1 + b\cos\beta_1 + c\cos;$$

iſt, wie vorher.

Man hat alſo immer

$$a\sin\alpha_1 + b\sin\beta_1 + c\sin\gamma_1 =$$
$$a\cos\alpha_1 + b\cos\beta_1 + c\cos\gamma_1 =$$

176. Denkt man ſich nun das neck
die Diagonale $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$, $\alpha\varepsilon$, ... $\alpha\mu$ in
$\alpha\gamma\delta$, $\alpha\delta\varepsilon$, ... $\alpha\mu\nu$ zerlegt, und bezeich
gungswinkel der Diagonalen gegen die
durch α', β', γ', δ', ...; ſo iſt in den
ander folgenden Dreiecken, da offenba
nach ihren beiden Richtungen (172.)

$$a\cos\alpha_1 + b\cos\beta_1 + a\gamma.\cos\alpha' = 0$$
$$-a\gamma.\cos\alpha' + c\cos\gamma_1 + a\delta.\cos\beta' = 0$$
$$-a\delta.\cos\beta' + d\cos\delta_1 + a\varepsilon.\cos\gamma' = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$-a\lambda.\cos\varkappa' + l\cos\lambda_1 + a\mu.\cos\varkappa' = 0$$
$$-a\mu.\cos\varkappa' + m\cos\mu_1 + n\cos\nu_1 = 0,$$

voraus sich folgende, für jedes Polygon geltende, zwei merkwürdige Gleichungen ergeben:

$$a\sin\alpha_1 + b\sin\beta_1 + c\sin\gamma_1 + d\sin\delta_1 + \ldots = 0,$$
$$a\cos\alpha_1 + b\cos\beta_1 + c\cos\gamma_1 + d\cos\delta_1 + \ldots = 0,$$

die sich auch leicht in Worten ausdrücken lassen würden. Ich finde sie zuerst, wenigstens die zweite, in Carnot Geom. der Stellung, a. d. F. v. Schumacher. II. S. 58. Indeß sagt Carnot S. 57., daß schon seit langer Zeit eine Abhandlung von L'Huilier im Sekretariat des Nationalinstituts niedergelegt sey, worin die zweite Gleichung ebenfalls vorkomme. In L'Huiliers Polygonométrie. Genève. 1789. finden sie sich noch nicht.

177. Man bezeichne nun die äußern Winkel des gegebenen Vielecks durch

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots \mu, \nu,$$

wobei zu bemerken ist, daß die äußern Winkel negativ genommen werden, wenn der entsprechende innere Winkel $> 180^0$ ist. Bezeichne λ den lten äußern Winkel und λ' seinen positiven Werth, $\varkappa_1$ dagegen den $(l-1)$ten und λ_1 den lten Neigungswinkel; so ergiebt sich aus (Fig. 68.) sogleich $\lambda_1 = \lambda' + \varkappa_1$, oder $\lambda_1 = -\lambda' + \varkappa_1$, $\lambda_1 - 180^0 = \lambda' + \varkappa_1 - 180^0$, $\lambda_1 - 180^0 = -\lambda' + \varkappa_1 - 180^0$, d. i. allgemein $\lambda_1 = \lambda + \varkappa_1$, so daß also der lte Neigungswinkel erhalten wird, wenn man den lten äußern Winkel und den $(l-1)$ten Neigungswinkel zu einander addirt.

178. Nehmen wir daher die Seite $\nu\alpha$ als Axe an; so ist, da die Neigungs- und Außenwinkel jetzt so auf einander folgen:

$$\nu_1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots\ldots \mu_1;$$
$$\nu, \alpha, \beta, \gamma \ldots\ldots \mu;$$

$= 0,$
$= \alpha,$
$= \alpha + \beta,$
$= \alpha + \beta + \gamma,$
$= \alpha + \beta + \gamma + \delta,$
. . . . . .
$= \alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots + \mu.$

§. 4.):

$\beta + \gamma + \delta + \ldots + \mu + \nu = 360°.$

$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots + \mu + \nu) = 0,$
$+ \beta + \gamma + \delta + \ldots + \mu + \nu) = 1;$

da auch $\sin \nu_1 = 0,\ \cos \nu_1 = 1$ iſt:

$\alpha_1 = \sin \alpha,$
$\beta_1 = \sin(\alpha + \beta),$
$\gamma_1 = \sin(\alpha + \beta + \gamma),$
$\delta_1 = \sin(\alpha + \beta + \gamma + \delta);$
. . . . . .
$\mu_1 = \sin(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots + \mu),$
$\nu_1 = \sin(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots + \mu + \nu),$

$$0 = a\cos\alpha + b\cos(\alpha+\beta) + c\cos(\alpha+\beta+\gamma) + d\cos(\alpha+\beta+\gamma+\delta) \ldots\ldots\ldots\ldots + m\cos(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots+\mu) + n\cos(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots+\mu+\nu).$$

ie zwei sehr merkwürdigen Formeln sind von Lexell v. Comm. Petrop. T. XIX. XX. De resol. polyg. ilin. dissertatio 1. et 2.) gefunden, und dadurch Grund zur Polygonometrie gelegt worden. Auch uilier ist auf dieselben gekommen, ohne Etwas von ells Arbeit zu wissen. M. s. L'Huilier Polyométrie. p. 5. Sie sind p. 18. und 22. auf folgende dargestellt.

$$0 = a\sin\alpha + b\sin(\alpha+\beta) + c\sin(\alpha+\beta+\gamma) + d\sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta) \ldots\ldots\ldots\ldots + m\sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots+\mu)$$

$$0 = n + a\cos\alpha + b\cos(\alpha+\beta) + c\cos(\alpha+\beta+\gamma) + d\cos(\alpha+\beta+\gamma+\delta) \ldots\ldots\ldots\ldots + m\cos(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots+\mu).$$

uilier gelangt aber auf einem Umwege zu diesen Forn, da er von einer Formel für den Flächeninhalt der lygone, die wir nachher (186.) auch beweisen werden, geht.

Auflösung der einzelnen Fälle.

179. Aus den vorher entwickelten Formeln ergiebt sich Auflösung aller einzelnen Fälle. Es ist im Folgenden r unsere Absicht, die Möglichkeit einer vollständigen Poonometrie zu zeigen, wenn bloß Seiten und Winkel ge-

daß wir unter Winkeln eines Polygons imm
Winkel verſtehen. Hiernach ſind nun bloß
denkbar:

a. Gegeben n — 1 Seiten und n —

α. Die beiden geſuchten Winkel liege
ten Seite.

β. Die beiden geſuchten Winkel lieg
geſuchten Seite, aber neben einant

γ. Die beiden geſuchten Winkel lieg
geſuchten Seite und auch nicht nebe

b. Gegeben n — 2 Seiten und
n' Winkel.

c. Gegeben n Seiten und n — 3 ?

Dieſelbe Eintheilung befolgt L'Hui
p. 37. Sie ſcheint uns zu unſerm Zwecke
große Ausführlichkeit geſtattet, am paſſ
Mehrerem ſ. m. Crelle Geometrie. I.
S. 451.

181. Geſucht α, γ, n (180. a. α.). Au

$$+ c\cos\alpha\sin(\beta+\gamma)$$
$$+ d\cos\alpha\sin(\beta+\gamma+\delta)$$
$$\ldots\ldots,\ldots\ldots$$
$$+ m\cos\alpha\sin(\beta+\gamma+\delta+\ldots+\mu);$$

woraus für

$$P = a$$
$$+ b\cos\beta$$
$$+ c\cos(\beta+\gamma)$$
$$+ d\cos(\beta+\gamma+\delta)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ m\cos(\beta+\gamma+\delta+\ldots+\mu);$$
$$Q = b\sin\beta$$
$$+ c\sin(\beta+\gamma)$$
$$+ d\sin(\beta+\gamma+\delta)$$
$$\ldots\ldots,\ldots\ldots$$
$$+ m\sin(\beta+\gamma+\delta+\ldots+\mu),$$

sich sogleich ergiebt:

$$\text{tang}\,\alpha = -\frac{Q}{P},$$

wodurch α gefunden wird. ν erhält man aus der Gleich

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots+\mu+\nu = 360°,$$

und (178.)

$$n = -a\cos\alpha$$
$$- b\cos(\alpha+\beta)$$
$$- c\cos(\alpha+\beta+\gamma)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$- m\cos(\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\mu).$$

Indeß kann man n auch unmittelbar aus den gegebe Stücken finden, ohne α zu kennen. Es ist nämlich

$$o = a\sin\alpha$$
$$+ b\sin(\alpha+\beta)$$
$$+ c\sin(\alpha+\beta+\gamma)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ m\sin(\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\mu)$$
$$-n = a\cos\alpha$$
$$+ b\cos(\alpha+\beta)$$
$$+ c\cos(\alpha+\beta+\gamma)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ m\cos(\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\mu);$$

also die Summe der Quadrate der zweiten Theile di Gleichungen $= n^2$. Sind nun

$+ \beta + \ldots + \iota)$,
$+ \beta + \ldots + \iota + \varkappa + \ldots + \lambda)$,

$+ \beta + \ldots + \iota)$
$+ \beta + \ldots + \iota + \varkappa + \ldots + \lambda)$,

meine Glieder der zweiten Theile obiger
ſind offenbar

$(\alpha + \beta + \ldots + \iota)$
$(\alpha + \beta + \ldots + \iota + \varkappa + \ldots + \lambda)$

$(\alpha + \beta + \ldots + \iota)$
$(\alpha + \beta + \ldots + \iota + \varkappa + \ldots + \lambda)$,

Glieder der Quadrate, deren Summe,
erhellet,

$= 2 \mathrm{il} \cos(\varkappa + \ldots + \lambda)$

, daß l von einer höhern Ordnung iſt als
ſo ſind die allgemeinen Glieder

$\alpha + \beta + \ldots + \iota)^2$,
$\alpha + \beta + \ldots + \iota)^2$,

$= i^2$. Setzt man nun für i und l alle
is m; ſo erhält man:

Für das Dreieck giebt dieſe allgemeine Formel:

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\beta$$
$$= a^2 + b^2 - 2ab\cos(180^\circ - \beta),$$

woraus, wenn man die Winkel nach trigonometriſcher Art bezeichnet, ſogleich folgt:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma,$$

da offenbar $\gamma = 180^\circ - \beta$, indem das Dreieck nie einen einſpringenden Winkel hat. Wie in (7.).

182. Die Seiten und Winkel des gegebenen Polygons ſeyen jezt:

$$a, b, \ldots m, n, a', b', \ldots m', n';$$
$$\alpha, \beta, \ldots \mu, \nu, \alpha', \beta', \ldots \mu', \nu';$$

und geſucht werde: ν, α', n' (180. a. β.); ſo hat man bekanntlich:

$$\begin{aligned} 0 = {} & a\sin\alpha \\ & + b\sin(\alpha+\beta) \\ & \cdots\cdots\cdots \\ & + m\sin(\alpha+\beta+\ldots+\mu) \\ & + n\sin(\alpha+\beta+\ldots+\mu+\nu) \\ & + a'\sin(\alpha+\ldots+\nu+\alpha') \\ & + b'\sin(\alpha+\ldots+\nu+\alpha'+\beta') \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + m'\sin(\alpha+\ldots+\nu+\alpha'+\beta'+\ldots+\mu'). \end{aligned}$$

Aber

$$\begin{aligned} \alpha+\ldots+\nu+\alpha' &= 360^\circ - (\beta'+\gamma'+\ldots+\nu'), \\ \alpha+\ldots+\nu+\alpha'+\beta' &= 360^\circ - (\gamma'+\delta+\ldots+\nu'), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha+\ldots+\nu+\alpha'+\beta'+\ldots+\mu' &= 360^\circ - \nu'. \end{aligned}$$

Alſo

$$\begin{aligned} 0 = {} & a\sin\alpha \\ & + b\sin(\alpha+\beta) \\ & \cdots\cdots\cdots \\ & + m\sin(\alpha+\beta+\ldots+\mu) \\ & + n\sin(\alpha+\beta+\ldots+\mu+\nu) \\ & - a'\sin(\beta'+\gamma'+\ldots+\nu') \\ & - b'\sin(\gamma'+\delta'+\ldots+\nu') \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & - m'\sin\nu' \end{aligned}$$

woraus

$$\begin{aligned} & n\sin(\alpha+\beta+\ldots+\mu+\nu) \\ = {} & a'\sin(\beta'+\gamma'+\ldots+\nu') \\ & + b'\sin(\gamma'+\delta'+\ldots+\nu') \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\cdots\cdots\cdots \\
&- n\cos(\alpha + \beta + \ldots + \nu) \\
&- a'\cos(\alpha + \ldots + \nu + \alpha') \\
&- b'\cos(\alpha + \ldots + \nu + \alpha' + \beta') \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&- m'\cos(\alpha + \ldots + \nu + \alpha' + \ldots \mu')
\end{aligned}
$$

Man könnte auch n' unmittelbar aus l
Stücken finden, welches aber hier zu weit
keinen besondern Nutzen gewähren würde.

Bei dieser und der vorhergehenden Auf
derselbe Werth von $\tang \alpha$ zu einem positive
ven Winkel gehören kann) ist bei der B
Winkel immer eine besondere Bestimmung üb
gesuchten Winkels nöthig, die bei der A
specielle Fälle leicht ist, im Allgemeinen aber
fige Auseinandersetzung erfordern würde, hi
übergangen werden kann.

183. Die Seiten und Winkel des Poly

$$a, \ldots n, a', \ldots n', a'', \ldots n'';$$
$$\alpha, \ldots \nu, \alpha', \ldots \nu', \alpha'', \ldots \nu''.$$

Gesucht ν, ν', n'' (180. a γ.). Man denk

nen die Winkel bei ν und ν' an der Seite $\nu\nu'$. Aus die- Winkeln lassen sich nun auch die Winkel ν und ν' des ebenen Polygons finden, wobei nur in jedem besondern lle gehörig beurtheilt werden muß, ob diese Winkel durch dition oder Subtraction der Winkel bei ν und ν' in den den Polygonen, in welche man das gegebene zerlegt t, berechnet werden müssen. Den hier vorgezeichneten ng würde man selbst auch bei wirklichen Anwendungen vortheilhaftesten einzuschlagen haben. Die Entwicke- g allgemeiner Formeln ist weitläufig.

184. In dem Vieleck

$$\alpha\beta\ldots\mu\nu\alpha'\beta'\ldots\mu'\nu',$$

en alle Winkel gegeben, und alle Seiten, außer $= n$, $\nu'\alpha = n'$, welche gesucht werden (180. b.). ist

$$\begin{aligned}
0 = {} & a\sin\alpha \\
& + b\sin(\alpha+\beta) \\
& \cdots\cdots\cdots \\
& + m\sin(\alpha+\beta+\ldots+\mu) \\
& + n\sin(\alpha+\beta+\ldots+\mu+\nu) \\
& + a'\sin(\alpha+\ldots+\nu+\alpha') \\
& + b'\sin(\alpha+\ldots+\nu+\alpha'+\beta') \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& m'\sin(\alpha+\ldots+\nu+\alpha'+\ldots+\mu') \\
= {} & a\sin\alpha \\
& + b\sin(\alpha+\beta) \\
& \cdots\cdots\cdots \\
& + m\sin(\alpha+\beta+\ldots+\mu) \\
& + n\sin(\alpha+\beta+\ldots+\mu+\nu) \\
& - a'\sin(\beta'+\gamma'+\ldots+\nu') \\
& - b'\sin(\gamma'+\ldots+\nu') \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots \\
& - m'\sin\nu';
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n\sin(\alpha+\beta+\ldots+\mu+\nu) = {} & \\
& a'\sin(\beta'+\gamma'+\ldots+\nu') \\
& + b'\sin(\gamma'+\ldots+\nu') \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + m'\sin\nu' \\
& - a\sin\alpha \\
& - b\sin(\alpha+\beta) \\
& \cdots\cdots\cdots \\
& - m\sin(\alpha+\beta+\ldots+\mu),
\end{aligned}$$

woraus n gefunden wird.

185. In dem Polygon

$$\alpha \ldots \nu\alpha' \ldots \nu'\alpha'' \ldots \nu''$$

seyen alle Seiten und Winkel außer α, α (180. c.). Man ziehe die Diagonalen $\alpha\alpha'$, wird dadurch die gegebene Figur in vier Th ner das Dreieck $\alpha\alpha'\alpha''$ ist, getheilt. In alle Seiten und Winkel, außer $\alpha\alpha'$, und d liegenden Winkel gegeben. Man kann also rechnen (181.). In $\alpha' \ldots \nu'\alpha''$ sind alle Sti und die Winkel bei α' und α'' gegeben, di wie auch in $\alpha'' \ldots \nu''\alpha$ die Seite $\alpha\alpha''$ und di und α'' berechnen lassen (181.). Also h Dreieck $\alpha\alpha'\alpha''$ alle drei Seiten, so daß sic Winkel berechnen lassen. Folglich hat man gezogene Diagonale und die Seiten der ge gebildeten Winkel an α, α', α'', durch derer einigung durch Addition oder Subtraction, kel α, α', α'' in jedem Falle finden lassen, auf die Lage der Diagonale und Seiten beso zu nehmen ist. Dies mag hinreichen, eine

$$2s = ab\sin\beta \quad (19.)$$

Im Viereck $\alpha\beta\gamma\delta$ (Fig. 69.) ziehe man die Diagonale $\alpha\gamma$; ſo erhellet leicht, daß

$$2s = ab\sin\beta + cd\sin\delta,$$

wobei zu bemerken, daß für einſpringende Winkel das Dreieck $\alpha\gamma\delta$ ſubtractiv iſt, aber auch δ negativ, und folglich $cd\sin\delta$ negativ wird, demnach obiger Ausdruck allgemein iſt. Aber (178.)

$$\begin{aligned} o &= b\sin\gamma \\ &\quad + a\sin(\gamma+\beta) \\ &\quad + d\sin(\gamma+\beta+\alpha) \\ cd\sin\delta &= ac\sin(\beta+\gamma) \\ &\quad + bc\sin\gamma \\ 2s &= ab\sin\beta \\ &\quad + ac\sin(\beta+\gamma) \\ &\quad + bc\sin\gamma. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &= b\sin\gamma \\ &+ a\sin(\gamma+\beta) \\ &- d\sin\delta \end{aligned}$$

In dem Fünfeck $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ ziehe man $\alpha\delta$; ſo iſt

$$\begin{aligned} 2s &= ab\sin\beta \\ &\quad + ac\sin(\beta+\gamma) \\ &\quad + bc\sin\gamma \end{aligned} \qquad + de\sin\varepsilon$$

Aber

$$\begin{aligned} o &= c\sin\delta \\ &\quad + b\sin(\delta+\gamma) \\ &\quad + a\sin(\delta+\gamma+\beta) \\ &\quad + e\sin(\delta+\gamma+\beta+\alpha) \\ &= c\sin\delta \\ &\quad + b\sin(\delta+\gamma) \\ &\quad + a\sin(\delta+\gamma+\beta) \\ &\quad - e\sin\varepsilon; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} de\sin\varepsilon &= ad\sin(\beta+\gamma+\delta) \\ &\quad + bd\sin(\gamma+\delta) \\ &\quad + cd\sin\delta; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2s &= ab\sin\beta \\ &\quad + ac\sin(\beta+\gamma) \\ &\quad + ad\sin(\beta+\gamma+\delta) \\ &\quad + bc\sin\gamma \\ &\quad + bd\sin(\gamma+\delta) \\ &\quad + cd\sin\delta. \end{aligned}$$

Das Geſetz und die Art, wie man weiter gehen kann, liegt klar vor Augen. Es iſt immer für ein neck:

$$+ kl\sin\lambda$$
$$+ km\sin(\lambda+\mu)$$
$$+ lm\sin\mu.$$

Die Allgemeinheit dieſer Formel (L'H p. 8. ff.) kann durch die bekannte Sch n + 1 leicht bewieſen werden. Eine Form durch die Coordinaten der Spitzen ſ. m. im

V. Tetragonom

187. Dieſe Wiſſenſchaft iſt daſſelbe was die Polygonometrie für die Vielecke i lich nur ein beſonderer Fall der letztern, auch nur auf die Auflöſung von ein Paar ken werden. Betrachtet man bloß S ſo laſſen ſich folgende Fälle unterſcheiden:

a. Gegeben vier Seiten und ein

ββ. Keiner der gesuchten Winkel liegt an der gesuchten Seite.

γ. Die gesuchten Winkel liegen nicht beide an der gesuchten Seite und auch nicht neben einander, wo keine Unterabtheilung weiter statt finden kann, da immer einer der gesuchten Winkel an der gesuchten Seite liegen muß.

c. Gegeben zwei Seiten und drei (d. i. alle vier) ıkel.

α. Gegeben zwei an einander liegende Seiten.

β. Gegeben zwei gegenüberstehende Seiten.

e Seite und vier Winkel können nicht gegeben seyn, da n im Grunde doch nur vier Stücke gegeben wären, drei Winkel schon den vierten bestimmen. Nach dieleberſicht würde mit Hülfe der allgemeinen polygonomehen Formeln eine vollständige Ausführung der Tetraometrie keine Schwierigkeit haben. Betrachtet man auch die Diagonalen als Stücke des Vierecks, so wird Anzahl der Aufgaben sehr vervielfältigt.

188. Die polygonometrischen Grundformeln (178.) den in Bezug auf das Viereck:

$$\begin{aligned} o = {} & a\sin\alpha \\ & + b\sin(\alpha+\beta) \\ & + c\sin(\alpha+\beta+\gamma) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} o = {} & d \\ & + a\cos\alpha \\ & + b\cos(\alpha+\beta) \\ & + c\cos(\alpha+\beta+\gamma), \end{aligned}$$

aus wie in (181.)

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos\beta + 2ac\cos(\beta+\gamma) + 2bc\cos\gamma.$$

raus würde sich auch leicht eine Gleichung zwischen den Seiten und zwei Gegenwinkeln ableiten lassen, die sich ß noch leichter so ergiebt. Ist nämlich x die den Win- β, δ (immer die äußern Winkel) gegenüberstehende agonale; so ist (7.):

$$x^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\beta,$$
$$x^2 = c^2 + d^2 + 2cd\cos\delta;$$

$$a^2 + b^2 + 2ab\cos\beta = c^2 + d^2 + 2cd\cos\delta.$$

$$p = \sin(\alpha + \beta)\cos\gamma + \cos(\alpha + \beta)s$$
$$p - \cos(\alpha + \beta)\sin\gamma = \sin(\alpha + \beta)c$$

woraus man, wenn auf beiden Seiten quad erhält:

$$\sin\gamma^2 - 2p\cos(\alpha + \beta)\sin\gamma = \sin(\alpha + \beta$$

und hieraus, indem man auf beiden Seite addirt:

$$\sin\gamma = p\cos(\alpha + \beta) \pm \sin(\alpha + \beta$$

Alſo für $p = \cos\varphi$:

$$\sin\gamma = \cos(\alpha + \beta \mp \varphi).$$

Hat man γ, ſo hat man auch δ aus der G

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ,$$

und d ergiebt ſich aus der Gleichung:

$$d = -a\cos\alpha - b\cos(\alpha + \beta) - c\cos($$

in (188.), wo d einen doppelten Werth wie ſich auch leicht aus der Zeichnung einer

Um d unmittelbar aus den Datis man (188.):

$$-c\sin(\alpha + \beta + \gamma) = a\sin\alpha + b\sin$$
$$-c\cos(\alpha + \beta + \gamma) = d + a\cos\alpha +$$

wenn man auf beiden Seiten a

$$\sin(\alpha+\beta) = -\frac{a\sin\alpha - c\sin\delta}{b},$$

s der erſten Gleichung in (188.), weil $\sin\delta = \sin(\alpha+\beta+\gamma)$. Hieraus wird β, und folglich auch ht γ gefunden. Iſt $c > 1$, $a > 1$; ſo kann man en:

$$\sin\alpha = c\sin\varphi^2,\ \sin\delta = a\sin\psi^2.$$

es giebt leicht:

$$\sin(\alpha+\beta) = -\frac{ac\sin(\varphi+\psi)\sin(\varphi-\psi)}{b}.$$

ir $c < 1$, $a < 1$ ſetze man

$$\sin\alpha = \frac{\sin\varphi^2}{a},\quad \sin\delta = \frac{\sin\psi^2}{c},$$

raus

$$\sin(\alpha+\beta) = -\frac{\sin(\varphi+\psi)\sin(\varphi-\psi)}{b}.$$

ir $c > 1$ und $a < 1$ dagegen ſetze man

$$\sin\alpha = c\sin\varphi^2,\ \sin\delta^2 = \frac{\sin\psi^2}{a},$$

raus

$$\sin(\alpha+\beta) = -\frac{c}{ab}(a^2\sin\varphi^2 - \sin\psi^2).$$

ſetzt man nun ferner $a\sin\varphi = \sin\omega$, ſo wird

$$\sin(\alpha+\beta) = -\frac{c\sin(\omega+\psi)\sin(\omega-\psi)}{ab}.$$

ir $c < 1$ und $a > 1$ ſey

$$\sin\alpha = \frac{\sin\varphi^2}{c},\ \sin\delta = a\sin\psi^2,$$

$\sin\psi = \sin\omega$; ſo erhält man:

$$\sin(\alpha+\beta) = -\frac{a\sin(\varphi+\omega)(\sin\varphi-\omega)}{bc}.$$

a man nun β und γ hat; ſo wird auch d leicht gefun-
n, da

$$d = -a\cos\alpha - b\cos(\alpha+\beta) - c\cos(\alpha+\beta+\gamma).$$

a offenbar auch

$$\begin{aligned} o = {} & d\sin\alpha \\ & + c\sin(\alpha+\delta) \\ & + b\sin(\alpha+\delta+\gamma) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} o = {} & a \\ & + d\cos\alpha \\ & + c\cos(\alpha+\delta) \\ & + b\cos(\alpha+\delta+\gamma), \end{aligned}$$

ſo

$$+ b\cos\beta$$
$$+ c\cos(\beta + \gamma)$$
$$\operatorname{tang}\alpha = -\frac{Q}{P},$$

woraus α, alſo auch δ gefunden wird. Fi

$$R = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos\beta$$
$$+ 2ac\cos(\beta + \gamma) + 2bc\cos$$

erhält man unmittelbar aus den Datis:

$$d = \sqrt{R}.$$

Setzt man

$$a' = a + \frac{b\sin\gamma}{\sin(\beta + \gamma)},\quad c' = c +$$
$$\sin\varphi = \frac{2\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\sqrt{a'c'}}{a'+c'};$$

ſo erhält man leicht:

$$(a' + c')^2\cos\varphi^2 = a'^2 + c'^2 + 2a'c'\cos($$

und, wenn man in dieſer Gleichung für a
Ausdrücke ſetzt, verglichen mit der Gleichu
nach einigen leichten Reductionen:

$$d = (a' + c')\cos\varphi.$$

Auf ähnliche Art wird man die andern
können.

$$y = \lambda - x.$$

Aber
$$a : BD = \sin\alpha : \sin x,$$
$$b : BD = \sin\beta : \sin y,$$
$$BD = \frac{a \sin x}{\sin\alpha} = \frac{b \sin(\lambda - x)}{\sin\beta},$$

woraus nach einigen leichten Reductionen sich ergiebt:

$$\cot x = \cot\lambda + \frac{a \sin\beta}{b \sin\alpha \sin\lambda}.$$

Für
$$\cot\lambda = v, \frac{a \sin\beta}{b \sin\alpha \sin\lambda} = w,$$

setze man

$$\tang\varphi = \sqrt{\frac{w}{v}} = \frac{a \sin\beta}{b \sin\alpha \cos\lambda};$$

so wird

$$\sec\varphi^2 = 1 + \frac{w}{v} = \frac{v + w}{v},$$
$$\cot x = \cot\lambda \sec\varphi^2 = \frac{\cot\lambda}{\cos\varphi^2}.$$

Hieraus erhält man x, also auch $y = \lambda - x$. Die Diagonale AC, und die Winkel derselben an A und C, erhält man durch Auflösung des Dreiecks ABC, und für die übrigen Stücke hat man:

$$AD = \frac{a \sin(\alpha + x)}{\sin\alpha}, \quad CD = \frac{b \sin(\beta + y)}{\sin\beta},$$
$$BD = \frac{a \sin x}{\sin\alpha} = \frac{b \sin y}{\sin\beta}.$$

Im Sinne der Geodäsie wird nach dieser Aufgabe, wenn die Lage dreier Punkte A, B, C gegeben ist, die Lage eines vierten D bestimmt, mittelst der in D gemessenen scheinbaren Größen α, β der Entfernungen AB, BC. Sie heißt gewöhnlich die Pothenotische Aufgabe. (M. s. Problème de Géometrie pratique etc. Mém. de Paris. 1692. p. 188.), obgleich eigentlich Snellius (Erathostenes Batavus de terrae ambitus vera quantitate. Leid. 1614. Lib. II. Cap. X.) der erste Erfinder ist. Sehr ausführlich, auch in Bezug auf Geschichte und Literatur, handelt Kästner von ihr in den geom. Sammlungen. I. S. 393., so wie auch Pfleiderer (Ebene Trigonometrie. Tüb. 1802. S. 273. Hindenburgs Archiv. 11. Heft. S. 318.). Außer den in diesen Auf-

$+ m' \sin \nu'$
$- a \sin \alpha$
$- b \sin(\alpha + \beta)$
. . . . . .
$- m \sin(\alpha + \beta + \ldots + \mu)$.

ebt ſich $\alpha + \beta + \ldots + \mu + \nu$, und folglich, $\ldots + \mu$ gegeben iſt, auch ν. Den Winkel n mittelſt der Formel $\alpha + \beta + \ldots + \nu + \alpha' = 360^0$, und

$- a \cos \alpha$
$- b \cos(\alpha + \beta)$
. . . . . .
$n \cos(\alpha + \beta + \ldots + \nu)$
$a' \cos(\alpha + \ldots + \nu + \alpha')$
$b' \cos(\alpha + \ldots + \nu + \alpha' + \beta')$
. . . . . .
$m' \cos(\alpha + \ldots + \nu + \alpha' + \ldots \mu')$.

e auch n' unmittelbar aus den gegebenen en, welches aber hier zu weit führen, auch ern Nutzen gewähren würde.

r und der vorhergehenden Aufgabe (da auch

gonen die Winkel bei ν und ν' an der Seite $\nu\nu'$. Aus diesen Winkeln lassen sich nun auch die Winkel ν und ν' des gegebenen Polygons finden, wobei nur in jedem besondern Falle gehörig beurtheilt werden muß, ob diese Winkel durch Addition oder Subtraction der Winkel bei ν und ν' in den beiden Polygonen, in welche man das gegebene zerlegt hat, berechnet werden müssen. Den hier vorgezeichneten Gang würde man selbst auch bei wirklichen Anwendungen am vortheilhaftesten einzuschlagen haben. Die Entwickelung allgemeiner Formeln ist weitläufig.

184. In dem Vieleck

$$\alpha\beta\ldots\mu\nu\alpha'\beta'\ldots\mu'\nu',$$

seyen alle Winkel gegeben, und alle Seiten, außer $\nu\alpha' = n$, $\nu'\alpha = n'$, welche gesucht werden (180. b.). Es ist

$$\begin{aligned}
0 = {} & a\sin\alpha \\
& + b\sin(\alpha+\beta) \\
& \cdots\cdots\cdots \\
& + m\sin(\alpha+\beta+\ldots+\mu) \\
& + n\sin(\alpha+\beta+\ldots+\mu+\nu) \\
& + a'\sin(\alpha+\ldots+\nu+\alpha') \\
& + b'\sin(\alpha+\ldots+\nu+\alpha'+\beta') \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& m'\sin(\alpha+\ldots+\nu+\alpha'+\ldots+\mu') \\
= {} & a\sin\alpha \\
& + b\sin(\alpha+\beta) \\
& \cdots\cdots\cdots \\
& + m\sin(\alpha+\beta+\ldots+\mu) \\
& + n\sin(\alpha+\beta+\ldots+\mu+\nu) \\
& - a'\sin(\beta'+\gamma'+\ldots+\nu') \\
& - b'\sin(\gamma'+\ldots+\nu') \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots \\
& - m'\sin\nu';
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n\sin(\alpha+\beta+\ldots+\mu+\nu) = {} & a'\sin(\beta'+\gamma'+\ldots+\nu') \\
& + b'\sin(\gamma'+\ldots+\nu') \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + m'\sin\nu' \\
& - a\sin\alpha \\
& - b\sin(\alpha+\beta) \\
& \cdots\cdots\cdots \\
& - m\sin(\alpha+\beta+\ldots+\mu),
\end{aligned}$$

woraus π gefunden wird.

185. In dem Polygon

$$\alpha \ldots \nu\alpha' \ldots \nu'\alpha'' \ldots$$

seyen alle Seiten und Winkel außer
(180. c.). Man ziehe die Diagonale
wird dadurch die gegebene Figur in vi
ner das Dreieck $\alpha\alpha'\alpha''$ ist, getheilt
alle Seiten und Winkel, außer $\alpha\alpha'$,
liegenden Winkel gegeben. Man kan
rechnen (181.). In $\alpha' \ldots \nu'\alpha''$ sind a
und die Winkel bei α' und α'' gegeb
wie auch in $\alpha'' \ldots \nu''\alpha$ die Seite $\alpha\alpha''$
und α'' berechnen lassen (181.). A
Dreieck $\alpha\alpha'\alpha''$ alle drei Seiten, so
Winkel berechnen lassen. Folglich ha
gezogene Diagonale und die Seiten
gebildeten Winkel an α, α', α'', durch
einigung durch Addition oder Subtra
kel α, α', α'' in jedem Falle finden l
auf die Lage der Diagonale und Seite
zu nehmen ist. Dies mag hinreichen
Polygonometrie zu geben. Exempel fi

$$2s = ab\sin\beta \quad (19.)$$

Im Viereck $\alpha\beta\gamma\delta$ (Fig. 69.) ziehe man die Diagonale $\alpha\gamma$; so erhellet leicht, daß

$$2s = ab\sin\beta + cd\sin\delta,$$

wobei zu bemerken, daß für einſpringende Winkel das Dreieck $\alpha\gamma\delta$ ſubtractiv iſt, aber auch δ negativ, und folglich $cd\sin\delta$ negativ wird, demnach obiger Ausdruck allgemein iſt. Aber (178.)

$$\begin{aligned} o = {} & b\sin\gamma && = b\sin\gamma \\ & + a\sin(\gamma+\beta) && + a\sin(\gamma+\beta) \\ & + d\sin(\gamma+\beta+\alpha) && - d\sin\delta \\ cd\sin\delta = {} & ac\sin(\beta+\gamma) \\ & + bc\sin\gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2s = {} & ab\sin\beta \\ & + ac\sin(\beta+\gamma) \\ & + bc\sin\gamma. \end{aligned}$$

In dem Fünfeck $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ ziehe man $\alpha\delta$; ſo iſt

$$\begin{aligned} 2s = {} & ab\sin\beta && + de\sin\varepsilon \\ & + ac\sin(\beta+\gamma) \\ & + bc\sin\gamma \end{aligned}$$

Aber

$$\begin{aligned} o = {} & c\sin\delta \\ & + b\sin(\delta+\gamma) \\ & + a\sin(\delta+\gamma+\beta) \\ & + e\sin(\delta+\gamma+\beta+\alpha) \\ = {} & c\sin\delta \\ & + b\sin(\delta+\gamma) \\ & + a\sin(\delta+\gamma+\beta) \\ & - e\sin\varepsilon; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} de\sin\varepsilon = {} & ad\sin(\beta+\gamma+\delta) \\ & + bd\sin(\gamma+\delta) \\ & + cd\sin\delta; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2s = {} & ab\sin\beta \\ & + ac\sin(\beta+\gamma) \\ & + ad\sin(\beta+\gamma+\delta) \\ & + bc\sin\gamma \\ & + bd\sin(\gamma+\delta) \\ & + cd\sin\delta. \end{aligned}$$

Das Geſetz und die Art, wie man weiter gehen kann, liegt klar vor Augen. Es iſt immer für ein neck:

$$+ \text{cm}\sin(\delta + \ldots + \mu)$$
$$\vdots$$
$$+ \text{kl}\sin\lambda$$
$$+ \text{km}\sin(\lambda + \mu)$$
$$+ \text{lm}\sin\mu.$$

Die Allgemeinheit dieſer Formel (L'H
p. 8. ff.) kann durch die bekannte Schl
n + 1 leicht bewieſen werden. Eine Forme
durch die Coordinaten der Spitzen ſ. m. im A

V. Tetragonome

187. Dieſe Wiſſenſchaft iſt daſſelbe
was die Polygonometrie für die Vielecke iſt,
lich nur ein beſonderer Fall der letztern,
auch nur auf die Auflöſung von ein Paar Au
ken werden. Betrachtet man bloß Sei
ſo laſſen ſich folgende Fälle unterſcheiden:

a. Gegeben vier Seiten und ein Wi

ββ. Keiner der gesuchten Winkel liegt an der gesuchten Seite.

γ. Die gesuchten Winkel liegen nicht beide an der gesuchten Seite und auch nicht neben einander, wo keine Unterabtheilung weiter statt finden kann, da immer einer der gesuchten Winkel an der gesuchten Seite liegen muß.

c. Gegeben zwei Seiten und drei (d. i. alle vier) Winkel.

α. Gegeben zwei an einander liegende Seiten.

β. Gegeben zwei gegenüberstehende Seiten.

Eine Seite und vier Winkel können nicht gegeben seyn, da dann im Grunde doch nur vier Stücke gegeben wären, weil drei Winkel schon den vierten bestimmen. Nach dieser Uebersicht würde mit Hülfe der allgemeinen polygonometrischen Formeln eine vollständige Ausführung der Tetragonometrie keine Schwierigkeit haben. Betrachtet man aber auch die Diagonalen als Stücke des Vierecks, so wird die Anzahl der Aufgaben sehr vervielfältigt.

188. Die polygonometrischen Grundformeln (178.) werden in Bezug auf das Viereck:

$$\begin{aligned} o = {} & a\sin\alpha \\ & + b\sin(\alpha+\beta) \\ & + c\sin(\alpha+\beta+\gamma) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} o = {} & d \\ & + a\cos\alpha \\ & + b\cos(\alpha+\beta) \\ & + c\cos(\alpha+\beta+\gamma), \end{aligned}$$

woraus wie in (181.)

$$\begin{aligned} d^2 = {} & a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos\beta \\ & + 2ac\cos(\beta+\gamma) + 2bc\cos\gamma. \end{aligned}$$

Hieraus würde sich auch leicht eine Gleichung zwischen den vier Seiten und zwei Gegenwinkeln ableiten lassen, die sich indeß noch leichter so ergiebt. Ist nämlich x die den Winkeln β, δ (immer die äußern Winkel) gegenüberstehende Diagonale; so ist (7.):

$$x^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\beta,$$
$$x^2 = c^2 + d^2 + 2cd\cos\delta;$$

also

$$a^2 + b^2 + 2ab\cos\beta = c^2 + d^2 + 2cd\cos\delta.$$

$$p = \sin(\alpha + \beta)\cos\gamma + \cos(\alpha + \beta$$
$$p - \cos(\alpha + \beta)\sin\gamma = \sin(\alpha + \beta$$

woraus man, wenn auf beiden Seiten qu
erhält:

$$\sin\gamma^2 - 2p\cos(\alpha + \beta)\sin\gamma = \sin(\alpha +$$

und hieraus, indem man auf beiden Seit
addirt:

$$\sin\gamma = p\cos(\alpha + \beta) \pm \sin(\alpha +$$

Alſo für $p = \cos\varphi$:

$$\sin\gamma = \cos(\alpha + \beta \mp \varphi).$$

Hat man γ, ſo hat man auch δ aus der

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°,$$

und d ergiebt ſich aus der Gleichung:

$$d = -a\cos\alpha - b\cos(\alpha + \beta) - c\cos$$

in (188.), wo d einen doppelten Wert
wie ſich auch leicht aus der Zeichnung eine

Um d unmittelbar aus den Dati
man (188.):

$$-c\sin(\alpha + \beta + \gamma) = a\sin\alpha + b\si$$
$$-c\cos(\alpha + \beta + \gamma) = d + a\cos\alpha +$$

$$\sin(\alpha+\beta) = -\frac{a\sin\alpha - c\sin\delta}{b},$$

aus der ersten Gleichung in (188.), weil $\sin\delta = -\sin(\alpha+\beta+\gamma)$. Hieraus wird β, und folglich auch leicht γ gefunden. Ist $c > 1$, $a > 1$; so kann man setzen:

$$\sin\alpha = c\sin\varphi^2,\ \sin\delta = a\sin\psi^2.$$

Dies giebt leicht:

$$\sin(\alpha+\beta) = -\frac{ac\sin(\varphi+\psi)\sin(\varphi-\psi)}{b}.$$

Für $c < 1$, $a < 1$ setze man

$$\sin\alpha = \frac{\sin\varphi^2}{a},\quad \sin\delta = \frac{\sin\psi^2}{c},$$

woraus

$$\sin(\alpha+\beta) = -\frac{\sin(\varphi+\psi)\sin(\varphi-\psi)}{b}.$$

Für $c > 1$ und $a < 1$ dagegen setze man

$$\sin\alpha = c\sin\varphi^2,\ \sin\delta^2 = \frac{\sin\psi^2}{a},$$

woraus

$$\sin(\alpha+\beta) = -\frac{c}{ab}(a^2\sin\varphi^2 - \sin\psi^2).$$

Setzt man nun ferner $a\sin\varphi = \sin\omega$, so wird

$$\sin(\alpha+\beta) = -\frac{c\sin(\omega+\psi)\sin(\omega-\psi)}{ab}.$$

Für $c < 1$ und $a > 1$ sey

$$\sin\alpha = \frac{\sin\varphi^2}{c},\ \sin\delta = a\sin\psi^2,$$

$c\sin\psi = \sin\omega$; so erhält man:

$$\sin(\alpha+\beta) = -\frac{a\sin(\varphi+\omega)(\sin\varphi-\omega)}{bc}.$$

Da man nun β und γ hat; so wird auch d leicht gefunden, da

$$d = -a\cos\alpha - b\cos(\alpha+\beta) - c\cos(\alpha+\beta+\gamma).$$

Da offenbar auch

$$\begin{aligned} o = {} & d\sin\alpha \\ & + c\sin(\alpha+\delta) \\ & + b\sin(\alpha+\delta+\gamma) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} o = {} & a \\ & + d\cos\alpha \\ & + c\cos(\alpha+\delta) \\ & + b\cos(\alpha+\delta+\gamma), \end{aligned}$$

also

$$+ b\cos\beta \qquad + c$$
$$+ c\cos(\beta + \gamma)$$

$$\operatorname{tang}\alpha = -\frac{Q}{P},$$

woraus α, alſo auch δ gefunden wir

$$R = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab$$
$$+ 2ac\cos(\beta + \gamma) +$$

erhält man unmittelbar aus den Dat

$$d = \sqrt{R}.$$

Setzt man

$$a' = a + \frac{b\sin\gamma}{\sin(\beta + \gamma)}, \quad c' =$$

$$\sin\varphi = \frac{2\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\sqrt{a'c'}}{a'+c'}$$

ſo erhält man leicht:

$$(a' + c')^2\cos\varphi^2 = a'^2 + c'^2 + 2$$

und, wenn man in dieſer Gleichung Ausdrücke ſetzt, verglichen mit der nach einigen leichten Reductionen:

$$d = (a' + c')\cos\varphi.$$

Auf ähnliche Art wird man die a können.

$$y = \lambda - x.$$

Aber

$$a : BD = \sin\alpha : \sin x,$$
$$b : BD = \sin\beta : \sin y,$$
$$BD = \frac{a\sin x}{\sin\alpha} = \frac{b\sin(\lambda - x)}{\sin\beta},$$

woraus nach einigen leichten Reductionen sich ergiebt:

$$\cot x = \cot\lambda + \frac{a\sin\beta}{b\sin\alpha\sin\lambda}.$$

Für

$$\cot\lambda = v,\ \frac{a\sin\beta}{b\sin\alpha\sin\lambda} = w,$$

setze man

$$\tang\varphi = \sqrt{\frac{w}{v}} = \frac{a\sin\beta}{b\sin\alpha\cos\lambda};$$

so wird

$$\sec\varphi^2 = 1 + \frac{w}{v} = \frac{v + w}{v},$$
$$\cot x = \cot\lambda\sec\varphi^2 = \frac{\cot\lambda}{\cos\varphi^2}.$$

Hieraus erhält man x, also auch $y = \lambda - x$. Die Diagonale AC, und die Winkel derselben an A und C, erhält man durch Auflösung des Dreiecks ABC, und für die übrigen Stücke hat man:

$$AD = \frac{a\sin(\alpha + x)}{\sin\alpha},\ CD = \frac{b\sin(\beta + y)}{\sin\beta},$$
$$BD = \frac{a\sin x}{\sin\alpha} = \frac{b\sin y}{\sin\beta}.$$

Im Sinne der Geodäsie wird nach dieser Aufgabe, wenn die Lage dreier Punkte A, B, C gegeben ist, die Lage eines vierten D bestimmt, mittelst der in D gemessenen scheinbaren Größen α, β der Entfernungen AB, BC. Sie heißt gewöhnlich die Pothenotische Aufgabe. (M. s. Problème de Géometrie pratique etc. Mém. de Paris. 1692. p. 188.), obgleich eigentlich Snellius (Erathostenes Batavus de terrae ambitus vera quantitate. Leid. 1614. Lib. II. Cap. X.) der erste Erfinder ist. Sehr ausführlich, auch in Bezug auf Geschichte und Literatur, handelt Kästner von ihr in den geom. Sammlungen. I. S. 393., so wie auch Pfleiderer (Ebene Trigonometrie. Tüb. 1802. S. 273. Hindenburgs Archiv. 11. Heft. S. 318.). Außer den in diesen Auf-

193. So wie die Geodäſie die findung der Geometrie wurde, war Tochter der Aſtronomie. Die Feldı alter Zeit mit der Zeichnung ähnlich mögen vielleicht die erſten Aſtronom Math. I. S. 512.) ſich zur Auflöſu gaben einer Kugel bedient haben, verzeichneten, oder auch wohl beweg dene Lagen bringen konnten. Aber nauigkeit dieſer conſtruirenden Met und die Vorzüge rechnender Method Die ſphäriſche Trigonometrie entſta chos aus Nikäa (160 — 125. v. genannt, weil er zu Rhodus ſeine (Weidler Hist. Astr. p. 140.), Trigonometrie beſchäftigt zu haben Theon, der Alexandriner, in Co 9., daß Hipparch in zwölf, Me Ch.) in ſechs Büchern die Behandlu Sehnen im Kreiſe vor Ptolemäu die Berechnung mit bewundernswü

ὁρεως εἰς τα αυτα Υπομνηματων Βιβλ. ια. Basil. 1538. Fol., gewöhnlich Almageſt genannt. Es iſt eine Chordentafel von 30 zu 30′, den Halbmeſſer = 60 geſetzt, nebſt ihrer Berechnung, worüber, ſo wie über trigonometriſche Tafeln überhaupt, der Art. Cyclotechnie nachzuſehen iſt, und die Berechnung ebener und ſphäriſcher Dreiecke, aber nur auf aſtronomiſche Aufgaben angewandt. Die Theorie dieſer Rechnungen mag Ptolemäus aus der obigen Schrift des Menelaus (Käſtner G. d. M. I. S. 518.), und auch aus des Theodoſius von Tripolis (etwa 50 v. Ch. G.) Σφαιρικων βιβλ. γ. (Oxoniae 1707. 8. Lat. von Barrow. Lond. 1675. 4. Deutſch von Nizze. Stralſund. 1826. 8.), (S. Heilbronner Hist. Math. p. 291.), geſchöpft haben. Die Reihe der Beobachtungen des Ptolemäus im Almageſt geht von 125 — 141 n. Ch. G., um welche Zeit er alſo gelebt hat. Die Berechnung ebener Dreiecke kommt nur bei aſtronomiſchen Unterſuchungen in beſtimmten Beiſpielen vor. Wir geben die Behandlung zweier Fälle nach Pfleiderer a. a. O. S. 332. ff. Die Arithmetik des Ptolemäus kennen zu lernen, dient auch: Ueber die Arithmetik der Griechen. A. d. Franz. nach Delambre von J. J. Hoffmann. Mainz. 1817. 4. Um die rechtwinkligen Dreiecke wird immer ein Kreis beſchrieben, die ſchiefwinkligen werden immer in rechtwinklige zerlegt.

In dem bei α rechtwinkligen Dreieck $\alpha\beta\gamma$ (Fig. 71.) ſey $\beta = 7^{0}40'$, $b = 5\frac{1}{4}$ gegeben; man ſoll die Hypotenuſe a finden. Der Winkel β enthält $7\frac{40}{60}$ ſolcher Theile, als vier rechte 360, oder $15\frac{20}{60}$ ſolcher Theile, als zwei rechte 360 enthalten. Alſo enthält nach einfachen geometriſchen Gründen der Bogen $\alpha\gamma$ $15\frac{20}{60}$ ſolcher Theile, als der um das Dreieck beſchriebene Kreis 360 enthält. In der ptolemäiſchen Tafel kommt dem Bogen $15\frac{20}{60}$ am nächſten $15\frac{30}{60}$. Dieſem entſpricht die Chorde 16 Th. 10 M. 56 S. in Sexageſimaltheilen des Halbmeſſers. Alſo enthält die Chorde von $\alpha\gamma$ zunächſt 16 ſolcher Theile wie $\beta\gamma$ 120. Dies giebt das Verhältniß $\alpha\gamma : \beta\gamma = 16 : 120 = b : a$. Alſo $a = \frac{1}{2}^{5}\, b = 39\frac{3}{5} = 39\frac{36}{60}$ nahe.

nun aus $\beta\delta$ und $\gamma\delta$ die Hypotenuſe β
der Proportion $62\frac{1}{60} : 1\frac{5}{60} = 120$
daß $\gamma\delta = 2\frac{5}{60}$ nahe (genau $= 2\frac{5}{3}\frac{3}{7}\frac{8}{3}\frac{1}{1}$
wie $\beta\gamma$ 120 enthält. Nach der Tafel ſi
$2^0 30'$ und $2^0 0'$ reſpective $2\frac{3}{60}\frac{7}{0}$, $2\frac{6}{60}$; d
lemäus, daß $\beta = 2\frac{1}{60}\frac{8}{0}$ ſolcher Theile
rechte Winkel 360 enthalten, oder daß
$\gamma\alpha\delta = 30^0$, alſo $\beta\alpha\gamma = 150^0$, $\beta\alpha$
$\alpha\gamma\beta = 180^0 - 151^0 9' = 28^0 51'$.
pel ſ. m. a. a. O. Bei der Auflöſung d
ecke bedient ſich Ptolemäus gewiſſer
von Verhältniſſen, woraus, da immer
einander in Verbindung kommen, die n
regula de sex quantitatibus entſtand
aber hier in der Kürze Nichts beibringen
ſpiel giebt Käſtner in den geom. Sa
Aus der Schiefe der Ekliptik und der Läng
weichung zu finden, d. i. in einem rechtwi
der Hypotenuſe und einem anliegenden
überſtehende Cathete zu finden. Käſt
Ptolemäus Vorſchrift in folgenden

76. M. s. auch F. T. Schubert Trigonom. sph. e Ptolemaeo. Nov. Act. Petrop. XII. — Trigonom. des anciens. Soc. Philomath. An 7. p. 191.

Eine neue Gestalt gewann die Trigonometrie durch die Araber, welche statt der Sehnen die Sinus einführten (Cyclotechnie. S. 667.). Der Erste, welcher sie gebrauchte ist Albategnius oder Mohammed Al Batani um 880. (Kästner G. d. M. I. S. 520.). Rudimenta astron. Alfragani, item Albategnius de motu stellar. Norimb. 1537. 4. Mahometis Albatenii de scientia stellar. liber cum aliquot add. J. Regiomontani. Bonon. 1645. Auch hat Jahia ben Mesva über die Sinus geschrieben (Montucla I. p. 374.) Mohammed ben Musa schrieb über die ebenen und sphär. Dreiecke (Montucla I. p. 373.), und Alchindi, mit seinem vollständigen Nahmen Jacob Ben Isaac Ben Al-Szabah Abu-Joseph Al-Chindi, bei den Arabern wegen seiner großen Gelehrsamkeit κατ' ἐξοχὴν Philosophus genannt; um 864. n. Ch. (Gartz de interpret. et explanator. Euclidis arab. Halae. 1823. 4. p. 20. 27.), erläuterte die regula de sex quantitatibus in einer Schrift, welche sich nach Cardan in der Bibliothek zu Mailand befindet (Montucla I. p. 374.). Die meisten Verdienste um die Trigonometrie unter den Arabern hat aber Geber ben Aphla (nach Riccioli um 1090.), welcher seine Astronomie um das Ende des 11ten oder den Anfang des 12ten Jahrhunderts geschrieben haben soll. Instrumentum primi mobilis a P. Appiano nunc primum inventum et editum. Acc. Gebri filii Affla Hispalensis libri IX. de Astron. per Girardum Cremonensem latinitate donati. Norimb. 1534. fol. Weidler (Bibliograph. astron. p. 15.) führt noch an: Geberi, Hispalensis libri IX. commentar. in Ptol. Alm. edd. Petreius cum instr. pr. mob. P. Appiani. Norimb. 1533. 4. Geber unterscheidet in der ebenen Trigonometrie schon die vier Hauptfälle, löset die Aufgaben aber auch noch durch Umschreibung eines

Zerfällung in rechtwinklige Dreiecke mit Hülf
chen Chordentafel auf. Pfleiderer a.
ff. theilt Mehreres aus Astron. lib. I. mi
ontucla (I. p. 373.) über die Araber, un
über Geber gefällte Urtheil ſcheint zu günſtig
enn von den trigonometriſchen Hauptheore-
ber doch nur das erſte gekannt haben, wenn
ht auf den jetzt gewöhnlichen kurzen Ausdruck:
rhalten ſich wie die Sinus der gegenüberſte-
el, bringt. (M. ſ. Pfleiderer a. a. O. S.

örderт ward die Trigonometrie durch die Ma-
s 16ten Jahrhunderts, und erhielt nun erſt
ſtematiſche Form, freilich noch immer mit Bei-
res geometriſchen Charakters. Zuerſt iſt zu
. Regiomontani de triangulis omni-
V. Norimb. 1533. fol., eine vollſtändige ebe-
Trig., von welcher Montucla (I. p. 544.)
ſie ſich mit Ausnahme der Logarithmen und
Theoreme von der ſeiner Zeit nicht weſentlich
Im 5ten Buche werden auch ſchwerere Auf-
z. B. Summen und Differenzen der Seiten
aufgelöſt. Indeß werden die ſchiefwinkligen
auch nur durch Zerlegung in zwei rechtwink-

zweiten Fall, wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind, löset R. ebenfalls durch die mehr erwähnte Zerlegung auf, und, obgleich R. die Tangenten in die Trig. einführte, deren Tafel er tab. foecundam nannte: so scheint die zur Auflösung dieses Falls dienende Proportion

$$a + b : a - b = \tan\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) : \tan\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta),$$

doch erst in T. Finkii Geometriae rotundi lib. XIV. Basil. 1583, deren 10tes Buch die Trig. enthält, deutlich ausgesprochen vorzukommen, wenn auch R. die Anwendung seines canon. foec. auf diesen Fall kennen mochte, und auch Fink auf R. hinzuweisen scheint, worüber mit Mehrerem Pfleiderer a. a. O. S. 353 — 357 nachzusehen ist. So wie ich Finks Worte (S. 357.) verstehe, drückt er die Proportion so aus:

$$\frac{a+b}{2} : \frac{a+b}{2} - b = \tan\frac{180^0 - \gamma}{2} : \begin{cases} \tan\left(\frac{180^0 - \gamma}{2} - \beta\right) \\ \tan\left(\alpha - \frac{180^0 - \gamma}{2}\right) \end{cases}$$

welches offenbar unsere obige Proportion ist. Eben so findet sie sich in Clavii Geom. pract. Lugd. 1607. 4. p. 47. In Clavii Theodosii Trip. Sphaer. lib. V. Item Clavii sinus, tangentes et secantes, triangula rectilinea et sphaerica. Rom. 1586. 4. p. 312. wird sie so ausgedrückt:

$$a - b : a + b = \tan\tfrac{1}{2}\gamma : \tan(\tfrac{1}{2}\gamma + \beta),$$

welche ebenfalls auf die obige zurückkommt, da $\frac{1}{2}\gamma = 90^0 - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, $\tan\frac{1}{2}\gamma = \cot\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, $\frac{1}{2}\gamma + \beta = 90^0 - \frac{1}{2}(\alpha + \beta) + \beta = 90^0 - \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, $\tan(\frac{1}{2}\gamma + \beta) = \cot\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, also $a - b : a + b = \cot\frac{1}{2}(\alpha + \beta) : \cot\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \tan\frac{1}{2}(\alpha - \beta) : \tan\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$.

Ferner gehören hierher noch folgende merkwürdige Schriften aus dem 16ten Jahrhundert:

N. Copernicus de laterib. triangulor. tum planor. tum sphaer. Viteb. 1542. 4., noch vor Bekanntmachung von Regiomontans Trigonometrie ausgearbeitet (Pfleiderer a. a. O. S. 349.).

Bressii, Lutet. Prof., Metrices astronomicae

. 1581. fol., enthält im III. und IV. Buche
Trig.
Raymari Ursi Dithmari fundamen-
e. nova doctr. sin. et triangulor. Argent.

erg triang. Geom. Lugd. 1591. 4. Auch
631. 4.
latinum de triang. a G. J. Rhetico coe-
V. Otho consummavit. Neostadii in Pa-
596. fol. Eine sehr vollständige rein geom.
der sph. Trig., von Rhäticus für rechtwink-
tho für schiefwinklige Dreiecke.
s coelometricae, seu valvae astrono-
versales. Auth. Nath. Torporlaeo.
2. Enthält auch Trig., mit vielen neuen
n. Torporley war eine Zeitlang Sekretair
(Montucla II. p. 120.).
s ausgezeichnetste trigonometrische Werk dieses
ist unstreitig:
Pitisci Trigonometriae seu de dimen-

Neper im Jahre 1614. die Erfindung der Logarithmen bekannt machte. Der trigonometriſche Calcul nahm hierdurch eine ganz andere Geſtalt an, und zugleich machte ſich Neper um die Auflöſung der ſphäriſchen Dreiecke durch ſeine allgemeine Regel für rechtwinklige, und die nach ihm benannten Analogieen für ſchiefwinklige Dreiecke (79. 61.) verdient. Nach Erfindung der Logarithmen ſind als Verfaſſer trigonometriſcher Lehrbücher zu merken: Benj. Urſinus (Coloniae — an der Spree — 1625. 4.), A. Girard (Tables des sinus etc. A la Haye 1626., worin ſchon Bezeichnungen, wie sin, tang, sec gebraucht werden), H. Gellibrand (Trigon. britannica. Goudae. 1633. An Institution trigonometrical. London 1652. 8.), P. Krüger (Praxis Trig. log. Dantisci. 1634. 8. Synopsis Trig. Ibid. 1612. 8.), G. L. Frobenius (Clavis univ. trig. Hamb. 1634. 4. Jede Aufgabe wird auf die gemeine Art, proſtaphäretiſch und logarithmiſch aufgelöſet), Bonaventura Cavaleri (Bonon. 1643. 4.), Vieta (Opp. math. Lugd. 1646. fol. Variorum de rebus mathem. reponsorum lib. VIII. Gehört aber eigentlich nicht hierher, da Vieta ſchon 1603, vor Erfindung der Logarithmen, ſtarb.), Oughred (London. 1657. 4.), F. Schooten (Trigonometria a J. Magiro. Brux. 1683. Holländiſch zu Leyden. 1627. Doctrina triangulorum edd. M. Hortensius. Lugd. 1627.), A. Vlacq Trig. artificialis enthält nur trig. Tafeln, alle obigen aber Abhandlungen der Trigonometrie. Ferner ſind zu merken: J. Gordon (Leodii. 1704. 4.), J. B. Wideburg (Helmst. 1717. 4.), J. Wilſon (Lugd. 1718. 8. Kurz aber deutlich). J. Wards Postumous works. Lond. 1730, deren zweiter Theil die ſphäriſche Trigonometrie enthält, und Beyers Beſchreibung eines neu erfundenen Modells der ſphär. Trig. Hamb. 1732. 4. enthalten ſchon Hülfsmittel zur ſinnlichen Darſtellung der Sätze der ſphäriſchen Trigonometrie, in welcher Beziehung auch die neue Knie'ſche, in Breslau bei dem Verfertiger für 7½ Rthlr. zu beziehende, Sammlung zu empfehlen iſt.

war die Darſtellung der Trigonometrie immer
metriſch geweſen. Ungefähr mit dem zweiten
s 18ten Jahrhunderts beginnt aber ein neuer
er Geſchichte, indem man um dieſe Zeit die al-
nalyſis mit ihr zu verbinden anfing. Gewöhn-
dem Akademiker F. C. Mayer zu Peters-
n. Petrop. T. II. 1727.) die erſten Verdienſte
iehung bei (Goniometrie. S. 617); aber noch
rüche ſcheint der Jeſuit J. Kreſa durch ſeine
eciosa, Trig. sph., primo mobili, trian-
. applicata. Pragae. 1720. 4. zu haben, und
n den Act. Erud. 1711. p. 324. findet ſich ein
hen Trigonometrie gehörender kurzer Aufſatz
Herberſtein (Bemerkungen über denſelben
Pelican ebendaſ. p. 502.), worin auch der
reſa's mit vielem Lobe gedacht wird. Das er-
ge Werk über analytiſche Trignnometrie war
Oppels Analysis triangulorum. Dresd.
46. 4., welches ſich mit vieler Ausführlichkeit
igonometrieen verbreitet. Die Methoden aller

piis breviter et dilucide derivata. Acta Petrop. 1779. P. I. p. 72., die man auch fast ganz eben so in Lacroix Trig. A. d. F. v. Idelér. Berlin. 1822. S. 64. M. Hirsch geom. Aufg. II. Berlin. 1807. S. 21. Bertrand Développ. nouv. de la partie élém. d. Math. Genève. 1778. T. II. p. 576. findet. Die Ableitung aus einer Grundformel versuchte auch de Gua (Mém. de Paris. 1785.), aber nach einer höchst weitschweifigen Methode. Den ersten zwar kurzen, aber sehr guten, Lehrbegriff der analyt. Trig. lieferte Klügel (Analyt. Trig. Braunschwg. 1770.), woran nur zu tadeln seyn möchte, daß noch zu oft Proportionen statt der Gleichungen gebraucht werden. Auch schon Lambert hatte (Beiträge z. M. I. S. 369.) mehrere analytische Formeln zur sphärischen Trig. geliefert. Das vollständigste neuere Werk ist: A. M. Cagnoli Trig. rect. et sphér., trad. de l'Ital. par Chompré. 2. ed. Paris. 1808. 4., nach gemischter Methode, etwas weitschweifig, leider ohne Anwendung der Eulerschen Bezeichnung der Seiten und Winkel, mit vielen Anwendungen. Eine sehr vollendete analytische Arbeit ist Lagrange Mém. sur la Trig. sphér. Journal de l'éc. polyt. Cahier VI. p. 270. worin die ganze sphärische Trigonometrie bloß aus den Formeln [24.] abgeleitet ist. Von neuen Lehrbüchern erwähne ich nur die von Scherffer (Eb. Trig. Halle. 1782. Mit vielen prakt. Bem.), J. K. Schulze (Eb. Trig. Berlin. 1784. Neuerlich hersg. von Grüson. Ganz elementar, aber sehr deutlich.), Pfleiderer (Eb. Trig. Tüb. 1802. Mit vielen höchst schätzbaren Bem. zur Gesch. u. Lit.), Zimmermann (bloß sph. Trig. Berlin. 1810.), Gerling (Gött. 1815. Sehr brauchbares Compendium.), Emmel (Frnkf. a. M. 1817. Recht vollständig, etwas weitschweifig, mit wenig Eleganz.), Hestermann Trig. sph. leges et formulae. Vindob. 1820. 4. (Ganz analytisch, mit Hülfe der allgemeinen Formeln der analyt. Geom.), Wilde (Berlin. 1825. Sehr vollständig, und in jeder Beziehung sehr zu empfehlen), v. Münchow (Bonn. 1826. Hat vorzüglich den Zweck, den Gebrauch

ſtrenge Principien mittelſt der Coordinaten=
ückzuführen, rein analytiſch, ſehr zu empfeh=
adecki (A. d. Poln. v. Feldt. Lpzg. 1828.
ig. mit Anwendungen auf Aſtronomie.). Un=
nzöſiſchen Werken zeichnen ſich aus Trem=
de Trig. sphér. Neuchat. 1783., Mém.
sphér. et son appl. Paris. 1801. 8., Le=
Clémens de Géom. et Trig. 11 ed. Paris.
roiſ eb. u. ſphär. Trig. u. ſ. w. A. d. F. v.
erlin. 1822. Das neueſte ſehr vollſtändige
k mit vielen Anwendungen iſt: M. D. Lard=
lytical Treatise of plane and spher. Trig.
826. 8., außerdem T. Simpson Trig.
spherical. London. 1748., Playfair
eom. and Trig. Edinb. 1810., Leslie
Geom. and pl. Trig. Edinb. 1820. 4ed.
sführliche Abhandlung der ſph. Trig. enthal=
Delambre Traité d'Astr. T. I. Chap.
régé d'Astr., ſo wie beider Trigonometrieen
Traité de Géodésie. T. I. Liv. 2.; viele For=

Oberfläche der eingeschriebenen Kugel zu vereinfachen (Mém. de Paris. 1778. Traité anal. des mouv. appar. des corps cél. T. II.); eine ziemlich vollständige Analyse lieferte Legendre in den Mém. de l'Institut. 1806., und das erste vollständige Werk Barnaba Oriani (Elementi di Trigonometria sferoidica. Bologna. 1806. 4.), bei welchem jedoch einige Weitschweifigkeit und Ungelenkigkeit nicht zu verkennen ist. Dann erschien Tentamen circa Trig. sphaeroid. Auct. E. G. Fog Thune, Hauniae. 1815. 4., worin die Formeln auch noch sehr complicirt sind, und der Darstellung alle Eleganz mangelt. Vorzüglich wichtig ist Bessels Aufsatz: Ueb. d. Berechnung d. geogr. Längen u. Breiten aus geodät. Vermessungen. Schumachers astron. Nachr. IV. 1826. No. 86., welcher auch unserer hier gegebenen Behandlung vorzüglich zum Grunde liegt. Puissant (Traité de Géod. II. p. 212.) und Stein (Geograph. Trigonometrie. Mainz. 1825. 4. S. 107. Enthält alle drei Theile der Trig. mit Anwendungen auf höhere Geodäsie.), folgen ganz Legendre. Noch ist zu erwähnen eine Abhandlung von Caluso (Mém. de Turin. IV. V.), und Delambre Méthodes analyt. etc. Mehreres hierher Gehörende findet man auch in der monatl. Corresp. an verschiedenen Orten.

Die ersten Ideen zur Polygonometrie finden sich schon in Girards Tables des sinus etc. (Kästner G. d. M. III. S. 108.) Die Veranlassung zu ihrer Bearbeitung gab aber vorzüglich Lambert durch seine Anlage zur Tetragonometrie (Beiträge. II. S. 175.), einer Aufzählung aller möglichen Fälle, wonach J. J. Mayer (Tetragon. specimen I. Gott. 1773. 4.), und Biörnsen in einem sehr ausführlichen Werke (Introd. in Tetr. Hauniae. 1780. 8.) die Ausführung versuchten. Den Grund zur Polygonometrie legte Lexell durch die beiden allgemeinen Formeln in (178.) (Comm. Petrop. XIXXX. Uebers. unter dem Titel: Polygonometrie oder Anweisung zur Berechnung jeder geradl. Figur. Lpzg. 1783.). Das erste ausführliche Lehrbuch mit einer allgemeinen Formel für den Inhalt der Polygone (186.) lieferte L'Huilier (Polygonometrie

Ueber die Geſchichte ... in der Einleitung zu ſeinen Mathe Lond. 1801.

Trigonometrie, rationale, (34.)

Trigonoſcopie, ſ. Trigonometr

Trigonum, ſ. Dreieck.

Trilaterum, Dreiſeit, gleichbet

Trillion iſt eine Million von Bil nung der achtzehnten Ordnung im decad S. Zahl.

Trinomiſch heißt jede aus drei mit einander verbundenen, Theilen beſt wie $A + B + C$, $A - B + C$, u. der Form $x^2 - 2px + q^2$ nennt Eu inf. I. Cap. 9.) trinomiſche Factoren. ... Größen iſt gezeigt, daß jede

trinaire einer Zahl jede Art, dieſelbe als eine Summe dreier Quadrate darzuſtellen, wie z. B. $59 = 25 + 25 + 9 = 49 + 9 + 1$. Er unterſcheidet formes trinaires propres und formes trinaires impropres, jenachdem die drei Quadrate keine, oder eine Quadratzahl (1 ausgenommen) zum gemeinſchaftlichen Theiler haben, wie z. B. $189 = 13^2 + 4^2 + 2^2 = 10^2 + 8^2 + 5^2 = 11^2 + 8^2 + 2^2$ für die erſte, $189 = 12^2 + 6^2 + 3^2$ für die zweite Art. Diviſeurs trinaires ſind ſolche trinomiſche Factoren von der allgemeinen Form $px^2 + qxy + ry^2$, welche ſich in drei Quadrate zerlegen laſſen.

Trinomium, eine aus drei durch + oder — mit einander verbundenen Theilen beſtehende Größe, wie $a + b + c$, $a - b + c$, $a + \sqrt{b} - \sqrt[3]{c}$, ꝛc.

Tripartition. Eintheilung einer Größe in drei gleiche Theile.

Triplicata ratio, ſ. Verhältniß. (14.)

Triquetrum, eine veraltete, nur ſelten vorkommende Benennung des Dreiecks. In der angewandten Mathematik ein aſtronomiſches Inſtrument, deſſen Erfindung dem Ptolemäus zugeſchrieben wird. Die Beſchreibung findet man z. B. in Stevini Geometria practica. Lib. II. p. 363.

Triſection des Winkels, oder vielmehr Aufgabe von der Triſection des Winkels, iſt die im Alterthume ſehr berühmte Aufgabe von der Theilung eines Winkels oder Bogens in drei gleiche Theile. Es wird zweckmäßig ſeyn, zuerſt die allgemeine analytiſche Auflöſung dieſer, die Kräfte der euclidiſchen Geometrie überſteigenden Aufgabe zu geben, und dann der Bemühungen der griechiſchen Geometer zu gedenken.

1. Sey α ein gegebener Kreisbogen, deſſen Halbmeſſer $= r$. Durch den einen Endpunkt deſſelben ziehe man einen Durchmeſſer und bezeichne in Beziehung auf den-

e, den Mittelpunkt des Kreiſes als Anfang
, die Coordinaten des andern Endpunktes der
$\frac{1}{3}\alpha$ durch x', y'; x, y; ſo iſt

$$x' = r\cos\alpha,\quad y' = r\sin\alpha;$$
$$x = r\cos\tfrac{1}{3}\alpha,\quad y = r\sin\tfrac{1}{3}\alpha.$$

$$^2\sin\tfrac{2}{3}\alpha = 2r\sin\tfrac{1}{3}\alpha . r\cos\tfrac{1}{3}\alpha$$
$$= r\sin\alpha . r\cos\tfrac{1}{3}\alpha - r\cos\alpha . r\sin\tfrac{1}{3}\alpha,$$
$$xy = xy' - x'y,\quad y = \frac{xy'}{2x + x'}.$$

ung enthält beide Coordinaten x und y. Be-
alſo eine ihr entſprechende Curve; ſo wird der
es gegebenen Bogens durch den Durchſchnitts-
Curve mit dem gegebenen Kreiſe beſtimmt

mt man einen Punkt, deſſen Coordinaten
ſind, als Anfang der Coordinaten an, und
neuen Ordinaten auf der Seite der negati-
n Ordinaten; ſo iſt, wenn die neuen Ordina-
y'' bezeichnet werden:

erhalten wird. Dieſe Gleichung des vierten Grades zeigt an, daß es im Allgemeinen vier Durchſchnittspunkte der beiden Curven giebt, wenn nicht etwa einige Wurzeln derſelben Gleichung imaginär ſind.

4. Um die Gleichung aufzulöſen gebe man ihr folgende Form:

$$(x^3 - \tfrac{3}{4}r^2x - \tfrac{1}{4}r^2x')(x + x') = 0,$$

woraus $x = -x'$ eine Wurzel der Gleichung. Ferner ſetze man

$$x^3 - \tfrac{3}{4}r^2x - \tfrac{1}{4}r^2x' = 0.$$

Aber (Goniometrie. 141.)

$$(\cos\tfrac{1}{3}\alpha)^3 - \tfrac{3}{4}\cos\tfrac{1}{3}\alpha - \tfrac{1}{4}\cos\alpha = 0,$$
$$(r\cos\tfrac{1}{3}\alpha)^3 - \tfrac{3}{4}r^2.(r\cos\tfrac{1}{3}\alpha) - \tfrac{1}{4}r^2.(r\cos\alpha) = 0,$$
$$(r\cos\tfrac{1}{3}\alpha)^3 - \tfrac{3}{4}r^2.(r\cos\tfrac{1}{3}\alpha) - \tfrac{1}{4}r^2x' = 0.$$

Dies giebt die neue Wurzel $x = r\cos\frac{1}{3}\alpha$. Durch Subtraction erhält man leicht:

$$x^3 - \tfrac{3}{4}r^2x - \tfrac{1}{4}r^2x' =$$
$$x^3 - (r\cos\tfrac{1}{3}\alpha)^3 - \tfrac{3}{4}r^2(x - r\cos\tfrac{1}{3}\alpha)$$
$$= (x^2 + xr\cos\tfrac{1}{3}\alpha + r^2\cos\tfrac{1}{3}\alpha^2 - \tfrac{3}{4}r^2)(x - r\cos\tfrac{1}{3}\alpha)$$
$$x^2 + xr\cos\tfrac{1}{3}\alpha + r^2\cos\tfrac{1}{3}\alpha^2 - \tfrac{3}{4}r^2 = 0,$$
$$x = -\tfrac{1}{2}r\cos\tfrac{1}{3}\alpha \pm r\sin\tfrac{1}{3}\alpha.\tfrac{1}{2}\sqrt{3},$$

woraus, da

$$\cos 60^\circ = \tfrac{1}{2},\ \sin 60^\circ = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

iſt, leicht erhalten wird:

$$x = -r\cos(60^\circ \pm \tfrac{1}{3}\alpha).$$

Die vier Wurzeln ſind alſo:

$$x = -x' = -r\cos\alpha,$$
$$= r\cos\tfrac{1}{3}\alpha,$$
$$= -r\cos(60^\circ + \tfrac{1}{3}\alpha),$$
$$= -r\cos(60^\circ - \tfrac{1}{3}\alpha).$$

5. Dieſe Wurzeln ſind alle reell. Alſo giebt es im Allgemeinen vier Durchſchnittspunkte. Indeß kann es in beſondern Fällen auch nur drei geben, wie z. B. für $\alpha = 0$, wo die beiden letzten Wurzeln einander gleich ſind. Auch für $\alpha = 45^\circ$ iſt $60^\circ - \frac{1}{3}\alpha = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ = \alpha$. Alſo ſind in dieſem Falle die erſte und vierte Wurzel einander gleich. Der Punkt F iſt, wenn wir annehmen, daß

$> 90^0$, der einzige Durchſchnittspunkt, de
itiv iſt. Alſo iſt für dieſen Punkt nach (4
, und der Bogen AB $= \alpha$ wird folglich
kte triſecirt, wie wir ſchon oben bemerkte
ibrigen drei Durchſchnittspunkten iſt, ohn
das Zeichen, die Abſciſſe von F″ am größ
am kleinſten. Da nun α nicht $> 90^0$ iſt
$\frac{1}{3}\alpha > 60^0 - \frac{1}{3}\alpha$, $60^0 + \frac{1}{3}\alpha$ nicht $< \alpha$
$+ \frac{1}{3}\alpha$ der größte Winkel, $\cos(60^0 +$
Coſinus. Demnach $-r\cos(60^0 + \frac{1}{3}\alpha)$
n F‴, und F‴ beſtimmt alſo, wenn man
poſitiv genommen denkt, den dritten T
$+ \frac{1}{3}\alpha) = 180^0 + \alpha$, d. i. den dritte
ens $aF'''AB$, ſo daß $aF''' = \frac{1}{3}aF'''AB$.
$-\frac{1}{3}\alpha \gtreqless \alpha$, wenn $60^0 \gtreqless \frac{4}{3}\alpha$, $15^0 \gtreqless \frac{1}{3}\alpha$, 4
r $\alpha < 45^0$ iſt alſo $60^0 - \frac{1}{3}\alpha > \alpha$, $\cos(60^0$
α, alſo $-r\cos(60^0 - \frac{1}{3}\alpha)$ die Abſc
$r\cos\alpha$ die von F″, ſo daß alſo, wenn
on a an rechnet, $aF' = 60^0 - \frac{1}{3}\alpha = \frac{1}{3}(18$
, $aF'' = \alpha = AB$ iſt. Iſt $\alpha > 45^0$
$\frac{1}{3}\alpha < \alpha$, $\cos(60^0 - \frac{1}{3}\alpha) > \cos\alpha$

fragt, fragt eigentlich, die Aufgabe ganz allgemein aufgefaßt, nach dem dritten Theile des zwischen den beiden Punkten A und B liegenden Bogens. Bezeichnen wir nun die Peripherie durch p, und setzen $p - \alpha = \alpha'$; so liegen zwischen diesen beiden Punkten, nach beiden Seiten hin von A ausgehend, folgende Bogen:

α, $p + \alpha$, $2p + \alpha$, $3p + \alpha$, u. s. f.;
α', $p + \alpha'$, $2p + \alpha'$, $3p + \alpha'$, u. s. f.

Wer also nach $\frac{1}{3}\alpha$ fragt, fragt eigentlich nach dem dritten Theile aller dieser Bogen. Zu einer Auflösung in diesem allgemeinen Sinne sind aber drei Punkte erforderlich: einer, welcher $\frac{1}{3}\alpha$; einer, welcher $\frac{1}{3}\alpha'$, und einer, welcher $\frac{1}{3}(p + \alpha)$ bestimmt. Diese drei Punkte seyen f, f', f'' (Fig. 75.), so daß $Af = \frac{1}{3}\alpha$, $Af' = \frac{1}{3}(p + \alpha)$, $Af'' = \frac{1}{3}\alpha'$. Dann ist $\frac{1}{3}(2p + \alpha) = \frac{1}{3}(3p - p + \alpha) = p - \frac{1}{3}\alpha' = p - Af'' = Aff'f''$. Ferner ist $\frac{1}{3}(p + \alpha') = \frac{1}{3}(2p - \alpha) = \frac{1}{3}(3p - p - \alpha) = p - \frac{1}{3}(p + \alpha) = p - Af' = Af''f'$. Endlich ist $\frac{1}{3}(2p + \alpha') = \frac{1}{3}(3p - p + \alpha') = p - \frac{1}{3}(p - \alpha') = p - \frac{1}{3}\alpha = p - Af = Af''f'f$. Hat man nun allgemein den Bogen $np + \alpha$ oder $np + \alpha'$; so sey $n = 3n' + n''$, wo $n'' < 3$. Dann ist $\frac{1}{3}(np + \alpha) = \frac{1}{3}(3n'p + n''p + \alpha) = n'p + \frac{1}{3}(n''p + \alpha)$, $\frac{1}{3}(np + \alpha') = \frac{1}{3}(3n'p + n''p + \alpha') = n'p + \frac{1}{3}(n''p + \alpha')$, so daß also $\frac{1}{3}(np + \alpha)$, $\frac{1}{3}(np + \alpha')$ erhalten werden, wenn man zu dem aus dem Obigen bekannten Bogen $\frac{1}{3}(n''p + \alpha)$ oder $\frac{1}{3}(n''p + \alpha')$ das bekannte Vielfache der Peripherie addirt. Da also zu der Auflösung unserer allgemeinen Aufgabe drei Punkte nothwendig sind, der Kreis aber von der geraden Linie oder dem Kreise nur in zwei Punkten geschnitten werden kann; so muß die Aufgabe die Kräfte der Elementargeometrie übersteigen. Auf ganz ähnliche Art würde sich zeigen lassen, daß zur Theilung eines Bogens in zwei, vier, fünf, u. s. f. gleiche Theile im allgemeinen Sinne, auch zwei, vier, fünf, u. s. f. Punkte erforderlich sind. M. s. über diesen Gegenstand Kästners Programm: Unde plures insint radices aequationibus sectiones angulorum definientibus, welches sich auch in der Sammlung: Dis-

math. et phys. quas Soc. reg. Gott. ann.
exhibuit A. G. Kaestner. Altenb. 1771.
- 175. befindet. Gilberts Geom. nach
: etc. Halle. 1798. 8. S. 181. ff.

unſere Hyperbel die Aufgabe von der Triſec-
n auflöſet, iſt leicht zu zeigen. Es iſt nämlich
ch (5.) $AF = \frac{1}{3}AB = \frac{1}{3}\alpha$, aF' (oder aF'') $=$
$\frac{1}{2}p - \alpha$), $aF''' = \frac{1}{3}aF'''AB = \frac{1}{3}(\frac{1}{2}p + \alpha)$.
aF' (oder aF'') $= AF'$ (oder AF'') $=$
$p - \alpha) = \frac{1}{3}(p + \alpha)$, $\frac{1}{2}p - aF''' = AF'''$
$(\frac{1}{2}p + \alpha) = \frac{1}{3}(p - \alpha) = \frac{1}{3}\alpha'$, ſo daß al-
F' (oder F''), F''' die dritten Theile der Bo-
α, α' beſtimmt werden, wie nach (6.) zur
Auflöſung erforderlich iſt.

gleich man den eigentlichen Urheber unſers
cht kennt; ſo iſt doch keinem Zweifel unter-
es der platoniſchen Schule angehört (Mon-
p. 178.). Auch ſchreibt Montucla (p. 177.)
Auflöſungen dieſer Schule zu.

(Fig. 76.) der gegebene Winkel, ſo werde

nien DB, BC, CA, AE, EF, u. ſ. f. einander gleich; ſo iſt $\angle CBA = 2D$, $\angle ACE = \angle D + \angle BAC = 3D$, $\angle EAF = \angle D + \angle AEC = 4D$, u. ſ. f., welches als eine Erweiterung des Satzes anzuſehen iſt.

10. Ein mechaniſches Verfahren, die Linie BE (Fig. 76.) nach der Vorſchrift (8.) zu ziehen, läßt ſich leicht ausdenken. Wie man ſich eines bloßen Lineals bedient, zeigt Montucla T. I. p. 177. Ein eignes Inſtrument hat der Jeſuit Thomas Ceva erdacht. T. Cevae e. S. J. Instrumentum pro sectione cujuscunque anguli rectilinei in partes quotcunque aequales. Mediol. 1695; abgedruckt Act. Erud. 165. p. 290 — 294. T. Cevae S. J. Opuscula mathematica. Mediol. 1699. Act Erud. Suppl. T. III. 1749. p. 368., wo Mehreres über unſere Aufgabe vorkommt. Das Inſtrument zur Triſection beſteht aus vier Linealen, die einen Rhombus abcd (Fig. 79.) bilden, und um a, b, c, d beweglich ſind. Soll $\angle gdh$ triſecirt werden, ſo nehme man $gd = dh = ab = ac = bd = cd$, befeſtige des Inſtruments Mittelpunkt mit einer Spitze in d, und bewege die Lineale ſo lange, bis ſie durch g und h gehen, ſo iſt nach (8.) $x = \frac{1}{3}z$; $y = \frac{1}{3}v$, $\angle bac = \frac{1}{3}\angle gdh$. Das Inſtrument zur Multiſection ſ. m. l. c.; ein anderes Inſtrument in De l'Hospital Tractatus de sect. con. l. 10. Prop. 6. Dergleichen Inſtrumente ſind von keinem praktiſchen Nutzen.

11. Von zwei andern elementaren Auflöſungen ertheilt Käſtner Nachricht in den geom. Samml. I. St. 33. 34. Die eine findet ſich in Albrecht Dürers Underweyſung der meſſung mit dem zirkel unn richtſcheyt. 1525. fol., iſt aber nach Käſtners Urtheile unrichtig. Die andere rührt von Campanus (Transalpinus Gallus. M. ſ. auch Käſtners G. d. M. I. S. 297. 305.) her, findet ſich am Ende des vierten Buchs von Ratdolts Ausgabe des Euclid (Venetiis. 1482.), und führt die Triſection auf folgende ebenfalls nicht rein geometriſch auflösbare Aufgabe zurück. (Gilbert a. a. O. S. 180. 181.). Wenn ACB (Fig. 80.) der gegebene Winkel, und CD auf dem

BE ſenkrecht iſt, die Sehne AF ſo zu ziehen,
Halbmeſſer gleich iſt. Dann iſt Bog. EF =
Zieht man nämlich CF, ſo iſt, wegen CF
= y, z = 2(R − x), d. i. z = 2q. Aber
v = x, x − w = v, p + w = R =
= x + q − w = v + q = z + q = 3q,

ochatius elementar.-geom. Aufl. des deli-
ms, der Aufgabe vom Dreiſchnitt des Win-
Königsberg. 1804. iſt ein merkwürdiges Bei-
riſchen Unſinns. Der ganzen Unterſuchung
er Satz zum Grunde: Wenn man (Fig. 81.)
D eine Linie nach M zieht, ſo wird der Halb-
von MQ in E ſo geſchnitten, daß BE der drit-
es Halbkreiſes iſt. Falſch! Denn wäre BE
60°, alſo DE = 30°; ſo wäre x = 15°,
= x + y, y = 30°. Aber

$$\sin x : \sin y = DM : DQ,$$

$$5° : \sin 30° = \sin 15° : 2\sin 15° \cdot \cos 15°$$

$$= 1 : 2\cos 15° = DM : DQ = 1 : 2.$$

5° = 2 cos 15° = 1, welches unmöglich

$$= \frac{1}{4^{n+1}}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots\right)\alpha$$

$$= \frac{1}{4^{n+1}} \cdot \frac{4}{3}\alpha = \frac{1}{3.4^n}\alpha,$$

welches für $n = 4$ nur $\frac{1}{768}$ beträgt. Geometrie von Paucker. Königsberg. 1823. S. 293.

Der rechte Winkel ABC (Fig. 82ª.) wird leicht in drei gleiche Theile getheilt, wenn man über BC ein gleichseitiges Dreieck beschreibt, so wie auch über CD, und BE zieht, weil offenbar $y + z = \frac{2}{3}R$, $y = z = \frac{1}{3}R$; also auch $x = \frac{1}{3}R$.

14. Wir geben nun noch von einigen nicht elementargeometrischen Auflösungen Nachricht.

Die Hyperbel hat zuerst Pappus zur Auflösung anzuwenden gelehrt. Andere haben sich der Parabel bedient. De la Chapelle Abh. v. d. Kegelschnitten. A. d. F. v. Böckmann. Carlsruhe. 1771. S. 243.

Nicomedes erdachte, wie zur Auflösung des delischen Problems, auch zur Trisection des Winkels die Conchoide. Seine Schrift ist verloren gegangen. Thl. I. S. 531. Clavius (Geometria practica. Lugd. 1607. 4. p. 356.) lehrt folgendes Verfahren. Wenn ABC (Fig. 83.) der gegebene Winkel ist, so fälle man von dem willkührlichen Punkte A in AB auf BC das Perpendikel AD, nehme $DC = 2AB$, und beschreibe aus B als Pol mit AD als Basis und dem Intervall DC die obere Conchoide CE (S. diesen Artikel), ziehe AE mit BC parallel; so ist, wenn man noch BE zieht, der Winkel $CBE = \frac{1}{3}ABC$. Denn nach der Natur der Conchoide ist $CD = FE = 2AB$. Halbirt man nun FE in G, und zieht AG; so ist, weil $FAE = 90°$, $FG = GE = AG = AB$. Also $x = y$, $p = q$, $y = 2q = x$, $q = z$, $x = 2z$, $z = \frac{1}{3}ABC$. Ist der gegebene Winkel stumpf, so theile man die Hälfte in drei gleiche Theile, und nehme dieser Theile zwei. Uebrigens wird, welches Clavius nicht erwähnt, der stumpfe Nebenwinkel ABC′ (Fig. 84.) durch die untere Conchoide trisecirt. Ist nämlich C′ E′ die untere Conchoide, so ist $E'F' = C'D = 2AB$. Also, wenn man

den, und Dinoſtratus ſie nur zur
ſes gebraucht habe, welches aber nach D
Geſch. d. Math. A. d. F. von Reim
S. 76.) ganz ohne Grund iſt. Zu bed
mer ſeinen Vorſatz (Hist. problema
catione. Gott. 1798. p. XI.), auc
Problems von der Triſection des A
nicht zur Ausführung gebracht hat.
einen ſehr guten Beitrag mehr zur G
matik beſitzen. Ueber die Entſtehung
dieſen Art. Sehr ausführlich iſt ſie
Clavii Geom. pract. p. 320., un
(Coloniae. 1591. fol. T. I. p. 349
gen AD (Fig. 85.), welcher $< 90^0$,
niſſe a : b getheilt werden, ſo beſch
Radius BC die Quadratrix BE, unt
die Quadratrix in F ſchneidet. Dann
AC parallel, und theile CG in H ſo,
a : b. Zieht man nun HL mit AC
Quadratrix in L ſchneidet, und hier
MD : AM = a : b. Denn nach der
trix (S. dieſen Art. 1.) iſt

Also nach dem Obigen

$$MD : AM = a : b.$$

Soll der ganze Quadrant nach demselben Verhältnisse getheilt werden; so mache man (Fig. 86.) $BD:CD = a:b$, ziehe GD mit AC parallel, und ziehe CFH; so ist $BH:AH = a:b$, welches wie vorher bewiesen wird.

Soll ein Bogen, welcher $> 90^0$ ist, nach diesem Verhältnisse getheilt werden; so nenne man diesen Bogen A und Q den Quadranten. Nun theile man $A - Q$ in die Theile A', A'', so daß $A':A'' = a:b$. Eben so theile man Q in Q' und Q'', so daß $Q':Q'' = a:b$. Dann ist $A':A'' = Q':Q''$, $A' + Q':A'' + Q'' = A':A'' = a:b$. Aber $(A' + Q') + (A'' + Q'') = (A' + A'') + (Q' + Q'') = A - Q + Q = A$. Also ist A in die Theile $A' + Q'$ und $A'' + Q''$ nach dem Verhältnisse $a:b$ getheilt.

Der von ihm so genannten Ophiuride oder Schlangenlinie bedient sich Uhlhorn in seinen Entdeckungen in der höhern Geometrie, theoretisch und prakt. abgehandelt ꝛc. Oldenburg. 1809. 4. Mehrere geometrische Auflösungen s. m. auch in Pappi Coll. math. L. IV. Prop. 31 sqq.

Dergleichen Theilungen sind indeß nie von praktischem Nutzen, sondern nur als Anwendungen der Theorie der Curven zu betrachten.

Trochoidalis Leibnitii ist eine Curve, welche von einem festen Punkte auf der Ebene eines Kreises oder einer andern Linie beschrieben wird, indem diese Linie sich auf einer geraden Linie oder einem Kreise fortwälzt, und also der Bogen der bewegten Linie von dem ersten Berührungspunkte bis zu irgend einem dem Wege auf der festen Linie gleich ist. Demnach nur eine Verallgemeinerung des Begriffs der Cycloide und Epicycloide.

Trochoides, s. Cycloide.

Trochois, eine andere Benennung der Cycloide.

Ueberkörperliche Aufgabe, lidum), ſ. Aufgabe. Thl. I. S. 227

Ueberreſt, gleichbedeutend mit

Ueberſchießende Zahl, ſ. Ab

Ueberſchuß, (excessus) iſt die eine Größe größer iſt als eine andere, gemeinen gleichbedeutend mit Differen Iſt A = B + U; ſo iſt U der Ueberſ

Umbildung, ſ. Umformung.

Umbilicus, iſt daſſelbe, was oder Focus einer krummen Linie gen Artikel.

Umdrehung in der Geometrie, Artikel Bewegung, und vorzüglich Thl.

die Figur eingeschlossen wird. S. auch Perimeter und Peripherie.

Umfangswinkel ist bei ebenen geradlinigen Figuren jeder von zwei zusammenstoßende Seiten am Umfange gebildeter Winkel; beim Kreise ist es ein Winkel im Kreise, dessen Spitze in der Peripherie des Kreises liegt, und dessen Schenkel Sehnen des Kreises sind. Gewöhnlicher ist im letztern Falle der Ausdruck Peripheriewinkel.

Umformung, Transformation, Umwandlung, Umbildung einer Function oder Gleichung ist dasselbe, was in den Artikeln Function (16.) und Gleichung (203.) Verwandlung der Functionen und Gleichungen genannt worden ist. S. diese Artikel.

Umformung, Transformation, Umwandlung, Umbildung einer Reihe heißt jede Veränderung ihres Fortschreitungs-Gesetzes, d. h. ihrer Form oder Gestalt, wodurch ihre Summe nicht geändert wird. Zweck und Methode der Transformation sind so verschieden, daß sie sich nicht unter allgemeine Gesichtspunkte fassen lassen. Indeß muß man zwischen Reihen, die nach Potenzen einer Hauptgröße fortschreiten, und Reihen, bei denen dies nicht der Fall ist, unterscheiden. Letztere lassen sich nur durch gewisse unmittelbare Verwandlungen ihrer Glieder, vorzüglich Zerlegungen in Theile, transformiren, bei erstern dagegen ist die Einführung einer neuen Hauptgröße, Transformation durch Substitution, oft von großem Nutzen. Wir werden von beiden einige Beispiele geben. Gewöhnlich sucht man Reihen durch Umformung convergenter zu machen, wodurch sie zu numerischen Berechnungen geschickter werden, oft aber führt auch eine schickliche Umformung zur Summirung der Reihe. Die gegebene Reihe soll im Folgenden immer durch S bezeichnet werden.

$$1.\ S = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} - \frac{1}{a+3b} + \cdots$$

Setzt man successive

$\div \overline{a(a+b)(a+2b)..(a+nb)}$

Hieraus erhält man für die einzelnen Glieder folgende Ausdrücke:

$$\frac{1}{a}$$

$$-\frac{1}{a}+\frac{b}{a(a+b)},$$

$$\frac{1}{a}-\frac{2b}{a(a+b)}+\frac{b.2b}{a(a+b)(a+2b)}$$

$$-\frac{1}{a}+\frac{3b}{a(a+b)}-\frac{2b.3b}{a(a+b)(a+2b)}+\frac{}{a(a+b)}$$

&c. &c.

Folglich durch Addition der einzelnen Vertika

$$S=\frac{1}{a}(1-1+1-1+1-..$$

$$+\frac{b}{a(a+b)}(1-2+3-4+$$

$$+\frac{b.2b}{a(a+b)(a+2b)}(1-3+6$$

$$+\frac{b.2b.3b}{a(a+b)(a+2b)(a+3b)}(1-4$$

$$=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{a}+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{b}{a(a+b)}+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{b.2}{a(a+b)(}$$

$b.2b.3b$

$$s = \frac{1}{a}\left\{1 + \frac{b}{a+b} + \frac{b.2b}{(a+b)(a+2b)} + \ldots\right\}$$
$$- \frac{1}{a}\left\{1 + \frac{2b}{a+b} + \frac{2b.3b}{(a+b)(a+2b)} + \ldots\right\}$$
$$+ \frac{1}{a}\left\{1 + \frac{3b}{a+b} + \frac{3b.4b}{(a+b)(a+2b)} + \ldots\right\} - \ldots$$
$$= \frac{1}{a-b} - \frac{1}{a-2b} + \frac{1}{a-3b} - \frac{1}{a-4b} + \ldots,$$

wie aus Summirung der Reihen (97.) folgt, wenn man $p = \frac{a}{b} + 1$, $h = 1, 2, 3,$ ꝛc. ſetzt. M. ſ. auch nachher (10.)

3. Es iſt folglich die ganze Summe

$$\frac{1}{a-b} + \frac{1}{a} - \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a-2b} - \frac{1}{a-3b}$$
$$+ \frac{1}{a+2b} - \frac{1}{a+3b} + \ldots = 0.$$

4. Zerlegt man jedes Glied der Reihe

$$s = \frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{(a+2b)(a+3b)}$$
$$+ \frac{1}{(a+4b)(a+5b)} + \ldots$$

in zwei Theile, von denen der zweite negativ iſt; ſo erhält man leicht:

$$s = \frac{1}{b}\left\{\frac{1}{a} - \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} - \frac{1}{a+3b}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{a+4b} - \frac{1}{a+5b} + \ldots\right\}$$
$$= \frac{1}{2b}\left\{\frac{1}{a} + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{b}{a(a+b)} + \tfrac{1}{3}\cdot\frac{b.2b}{a(a+b)(a+2b)}\right.$$
$$\left. + \tfrac{1}{4}\cdot\frac{b.2b.3b}{a(a+b)(a+2b)(a+3b)} + \ldots\right\}$$

5. Für $\frac{a}{b} = n$ erhält man:

$$s = \frac{1}{2ab}\left\{1 + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+1} + \tfrac{1}{3}\cdot\frac{1.2}{(n+1)(n+2)}\right.$$
$$\left. + \tfrac{1}{4}\cdot\frac{1.2.3}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \ldots\right\}$$

woraus, weil

$$\tfrac{1}{2} = 1 - \tfrac{1}{2},$$
$$\tfrac{1}{3} = 1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3},$$
$$\tfrac{1}{4} = 1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4},$$
ꝛc. ꝛc.

eklammerte Reihe =

$$+\frac{1.2}{(n+1)(n+2)}+\frac{1.2.3}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\ldots$$

$$+\frac{1.2}{(n+1)(n+2)}+\frac{1.2.3}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\ldots\Big\}$$

$$\frac{1.2}{1)(n+2)}+\frac{1.2.3}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\ldots\Big\}$$

$$\frac{1.2.3}{1)(n+2)(n+3)}+\ldots\Big\}-\ldots.$$

$$\frac{n}{-1}-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{n-1}-\tfrac{1}{4}\cdot\frac{1.2}{(n-1)(n+1)}$$

$$-\tfrac{1}{8}\cdot\frac{1.2.3}{(n-1)(n+1)(n+2)}-\ldots$$

ng der Reihen. 97.)

=

$$-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{b}{a}-\tfrac{1}{4}\cdot\frac{b.2b}{a(a+b)}-\tfrac{1}{8}\cdot\frac{b.2b.3b}{a(a+b)(a+2b)}-\ldots\Big\}$$

mt man zwiſchen den beiden durch die Transfor-
tenen Reihen (4. 5.) das arithmetiſche Mittel;
h die neue Transformation:

$$-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{b.2b}{(a-b)a(a+b)}-\tfrac{1}{4}\cdot\frac{b.2b.3b}{(a-b)a(a+b)(a+2b)}-\ldots\Big\}$$

so erhält man leicht:

$$\begin{aligned} x^{n+1} = {} & \overset{1}{A}_n x^2 \\ & + \overset{2}{A}_n x^2 (x-1) \\ & + \overset{3}{A}_n x^2 (x-1)(x-2) \\ & \cdots\cdots\cdots \\ & + \overset{n}{A}_n x^2 (x-1)(x-2)\ldots(x-n+1). \end{aligned}$$

Aber

$$\begin{aligned} x^2 &= x + x(x-1), \\ x^2(x-1) &= x(x-1) + x(x-1)^2 \\ &= x(x-1) + x(x-1) + x(x-1)(x-2) \\ &= 2x(x-1) + x(x-1)(x-2), \\ x^2(x-1)(x-2) &= 2x(x-1)(x-2) + x(x-1)(x-2)^2 \\ &= 2x(x-1)(x-2) + x(x-1)(x-2) + x(x-1)(x-2)(x-3) \\ &= 3x(x-1)(x-2) + x(x-1)(x-2)(x-3), \end{aligned}$$

wo das Gesetz, und die Art weiter zu gehen, schon deutlich erhellet. Also

$$\begin{aligned} x^{n+1} = {} & \overset{1}{A}_n \{x + x(x-1)\} \\ & + \overset{2}{A}_n \{2x(x-1) + x(x-1)(x-2)\} \\ & + \overset{3}{A}_n \{3x(x-1)(x-2) + x(x-1)(x-2)(x-3)\} \\ & \cdots\cdots\cdots \\ & + \overset{n}{A}_n \{nx(x-1)..(x-n+1) + x(x-1)..(x-n)\} \\ = {} & \overset{1}{A}_n x + \{\overset{1}{A}_n + 2\overset{2}{A}_n\} x(x-1) \\ & + \{\overset{2}{A}_n + 3\overset{3}{A}_n\} x(x-1)(x-2)\ldots \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + \{\overset{n-1}{A}_n + n\overset{n}{A}_n\} x(x-1)..(x-n+1) \\ & + \overset{n}{A}_n x(x-1)..(x-n) \\ = {} & \overset{1}{A}_{n+1} x + \overset{2}{A}_{n+1} x(x-1) \\ & + \overset{3}{A}_{n+1} x(x-1)(x-2) \\ & \cdots\cdots\cdots \\ & + \overset{n+1}{A}_{n+1} x(x-1)(x-2)..(x-n); \end{aligned}$$

so daß also unser obiges Gesetz auch für x^{n+1} gilt, und folglich allgemein ist, da es offenbar für x gilt. Zugleich erhält man folgende Gleichungen für die Coefficienten:

$$\begin{aligned} \overset{1}{A}_{n+1} &= \overset{1}{A}_n, \\ \overset{2}{A}_{n+1} &= \overset{1}{A}_n + 2\overset{2}{A}_n, \end{aligned}$$

Die Conſtruction der Tafel iſt leicht. So
$= 350 + 5.140$, $266 = 140 + 6.21$
7.1, $1 = 1$.

8. Eben ſo leicht erhellet auch der Gebr
Man verwandelt mittelſt derſelben nämli
Potenz von x in die vorgeſchriebene Form,
tenen Ausdrücke in die gegebene Reihe, u
ähnlichen Glieder. Für den endlichen A
$11x^2 - 12x$ iſt z. B.

$$-12x = -12x; \quad -11x^2 = -11x -$$
$$2x^3 = \quad 2x + 6x(x-1) + 2x(x$$

Alſo der gegebene Ausdruck $=$

$$-21x - 5x(x-1) + 2x(x-1)(x$$

Bei unendlichen Reihen werden hier freilich
[illegible] die ſich aber

$$= (z-n-1).\frac{1}{(z-1)(z-2)..(z-n-1)}$$

$$= (z-n-1)\left\{ {}^{n+1}B_1 . \frac{1}{z^{n+1}} + {}^{n+1}B_2 . \frac{1}{z^{n+2}} + {}^{n+1}B_3 . \frac{1}{z^{n+3}} + \ldots \right\}$$

so erhält man, wenn dieses Product nach den negativen Potenzen von z entwickelt wird, leicht:

$$\begin{aligned}
{}^{n+1}B_1 &= {}^{n}B_1 \\
{}^{n+1}B_2 &= {}^{n}B_2 + (n+1)\,{}^{n+1}B_1, \\
{}^{n+1}B_3 &= {}^{n}B_3 + (n+1)\,{}^{n+1}B_2, \\
{}^{n+1}B_4 &= {}^{n}B_4 + (n+1)\,{}^{n+1}B_3; \\
&\text{ꝛc.} \qquad\qquad \text{ꝛc.}
\end{aligned}$$

d. i. allgemein

$${}^{n+1}B_k = {}^{n}B_k + (n+1)\,{}^{n+1}B_{k-1}$$

Folglich, da, wegen

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \ldots,$$

${}^{1}B_k = 1$ ist:

$$\begin{aligned}
{}^{1}B_{n+1} &= {}^{1}B_n, \\
{}^{2}B_n &= {}^{1}B_n + 2{}^{2}B_{n-1}, \\
{}^{3}B_{n-1} &= {}^{2}B_{n-1} + 3{}^{3}B_{n-2}, \\
{}^{4}B_{n-2} &= {}^{3}B_{n-2} + 4{}^{4}B_{n-3}, \\
&\text{ꝛc.} \qquad\qquad \text{ꝛc.}
\end{aligned}$$

Wäre es nun richtig, daß die Reihen

$${}^{1}B_n, {}^{2}B_{n-1}, {}^{3}B_{n-2}, {}^{4}B_{n-3}, \ldots$$
$${}^{1}A_n, {}^{2}A_n, {}^{3}A_n, {}^{4}A_n, \ldots$$

identisch wären; so würde dies offenbar auch von den Reihen

$${}^{1}B_{n+1}, {}^{2}B_n, {}^{3}B_{n-1}, {}^{4}B_{n-2}, \ldots$$
$${}^{1}A_{n+1}, {}^{2}A_{n+1}, {}^{3}A_{n+1}, {}^{4}A_{n+1}, \ldots$$

gelten, welches augenblicklich erhellet, wenn man die vorhergehenden Gleichungen für die durch B bezeichneten Größen mit den Gleichungen für die durch A bezeichneten Größen in (7.) vergleicht. Es ist aber ${}^{1}B_1 = 1$, ${}^{1}A_1 = 1$,

$$+ \left\{ \overset{1}{A}_3 x + \overset{2}{A}_3 x(x-1) + A \right.$$

und folglich nach (9.)

$$S = 1 + x.\frac{1}{z} + \left\{ \overset{1}{B}_2 x + \overset{2}{B}_1 x(x- \right.$$

$$+ \left\{ \overset{1}{B}_3 x + \overset{2}{B}_2 x(x-1) + \overset{3}{B} \right.$$

$$= 1 + x \left\{ \overset{1}{B}_1 \frac{1}{z} + \overset{1}{B}_2 \frac{1}{z^2} + \overset{1}{B}_3 \right.$$

$$+ x(x-1) \left\{ \overset{2}{B}_1 \frac{1}{z^2} + \overset{2}{B}_2 \frac{1}{z^3} + \overset{2}{B}_3 \right.$$

$$+ x(x-1)(x-2) \left\{ \overset{3}{B}_1 \frac{1}{z^3} + \overset{3}{B}_2 \frac{1}{z^4} \right.$$

$$= 1 + \frac{x}{z-1} + \frac{x(x-1)}{(z-1)(z-2)} + \frac{}{(}$$

Nach dem Binomialtheorem iſt aber d

$$= \left(1 - \frac{x}{z}\right)^{-1} = \frac{z}{z-}$$

Alſo hat man, wenn zugleich z ſtatt z

$$\frac{z+1}{z-x+1} = 1 + \frac{x}{z} + \frac{x(x-1)}{z(z-1)} + \frac{x(}{z(}$$

$$A_1 + \frac{B_1}{x} + \frac{C_1}{x(x+1)} + \frac{D_1}{x(x+1)(x+2)} + \ldots$$

Hierzu gelangt man auf folgende Art. Nimmt man in der in (10.) summirten Reihe x und z negativ, setzt sodann $x = n$, $z = x + n + 1$, und dividirt auf beiden Seiten durch $x(x+1)\ldots(x+n)$; so erhält man:

$$\frac{1}{x^2(x+1)\ldots(x+n-1)} = \frac{1}{x(x+1)\ldots(x+n)} + \frac{n}{x(x+1)\ldots(x+n+1)} + \frac{n(n+1)}{x(x+1)\ldots(x+n+2)} + \ldots$$

Setzt man nun

$$\frac{1}{x^n} = \frac{\overset{1}{A}_{-n}}{x(x+1)\ldots(x+n-1)} + \frac{\overset{2}{A}_{-n}}{x(x+1)\ldots(x+n)} + \frac{\overset{3}{A}_{-n}}{x(x+1)\ldots(x+n+1)} + \ldots,$$

dividirt auf beiden Seiten durch x, zerlegt die Glieder auf der rechten Seite auf die obige Art, und ordnet gehörig; so erhält man für die Zähler von $\frac{1}{x^{n+1}}$ leicht folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\overset{1}{A}_{-(n+1)} &= \overset{1}{A}_{-n} \\
\overset{2}{A}_{-(n+1)} &= n\overset{1}{A}_{-n} + \overset{2}{A}_{-n} \\
\overset{3}{A}_{-(n+1)} &= n(n+1)\overset{1}{A}_{-n} + (n+1)\overset{2}{A}_{-n} + \overset{3}{A}_{-n} \\
\overset{4}{A}_{-(n+1)} &= n(n+1)(n+2)\overset{1}{A}_{-n} + (n+1)(n+2)\overset{2}{A}_{-n} + (n+2)\overset{3}{A}_{-n} + \overset{4}{A}_{-n} \\
&\text{\&c.} \qquad\qquad \text{\&c.}
\end{aligned}$$

oder auch:

$$\begin{aligned}
\overset{1}{A}_{-(n+1)} &= \overset{1}{A}_{-n} \\
\overset{2}{A}_{-(n+1)} &= n\overset{1}{A}_{-(n+1)} + \overset{2}{A}_{-n} \\
\overset{3}{A}_{-(n+1)} &= (n+1)\overset{2}{A}_{-(n+1)} + \overset{3}{A}_{-n} \\
\overset{4}{A}_{-(n+1)} &= (n+2)\overset{3}{A}_{-(n+1)} + \overset{4}{A}_{-n} \\
&\text{\&c.} \qquad\qquad \text{\&c.}
\end{aligned}$$

Mittelst dieser Formeln berechnet man leicht folgende Tafel, wo die Zähler der einzelnen negativen Potenzen von x von der

6	11	6	1		
24	50	35	10	1	
120	274	225	85	15	
720	1764	1624	735	175	
5040	13068	13132	6769	1960	3
40320	109584	105056	67284	22449	45

Nach dieſer Tafel erhält man

$$A + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} + \frac{D}{x^3} + \frac{E}{x^4} +$$

$$= A + \frac{B}{x} + \frac{C}{x(x+1)} + \frac{C+1}{x(x+1)(x}$$

$$+ \frac{2C + 3D + E}{x(x+1)(x+2)(x+3)} + \frac{6C}{x(x+}$$

$$+ \frac{24C + 50D + 35E + 10F}{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(}$$

$$+ \frac{120C + 274D + 225E + 85F}{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x}$$

eine ſehr merkwürdige Transformatior
Stirlings Werk ſehr zum Studiu

12. Setzt man

$$z(z+1)..(z+n-1) = \overline{B}^{n}_{1} z + \overline{B}^{n}_{2} z$$

ſo erhält man nach einer ganz ähnliche
(9.), wenn man nur auf beiden Seite

und die Relation:

$$\overset{k}{\underset{-n}{A}} = \overset{-(n)k-2)}{\underset{n-1}{B}}.$$

Man kann also wegen dieser Relation die vorige Tafel auch so construiren, daß man die Producte

$$z,\ z(z+1),\ z(z+1)(z+2),\ \ldots$$

entwickelt, und die Coefficienten der Potenzen von z in verkehrter Ordnung in die Horizontalreihen der Tafel schreibt.

13. Eine Transformation von sehr allgemeiner Anwendbarkeit lehrt Euler (Inst. Calc. diff. T. II. Cap. I.). Die gegebene Reihe sey

$$S = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \ldots$$

Setzt man $x = \frac{y}{1+y}$, und entwickelt die Potenzen von x nach Potenzen von y mittelst des Binomialtheorems; so erhält man leicht nach gehöriger Entwickelung,

$$S = ay - (a-b)y^2 + (a-2b+c)y^3 - (a-3b+3c-d)y^4 + (a-4b+6c-4d+e)y^5 - \ldots$$

d. i. (Arithmetische Reihen höherer Ordnungen. 2.)

$$S = ay + \Delta a.y^2 + \Delta^2 a.y^3 + \Delta^3 a.y^4 + \ldots$$
$$= a\frac{x}{1-x} + \Delta a.\frac{x^2}{(1-x)^2} + \Delta^2 a.\frac{x^3}{(1-x)^3} + \ldots$$

Ist die Coefficientenreihe der gegebenen Reihe eine arithmetische Reihe höherer Ordnung; so werden die Differenzen irgend einmal $= 0$; also bricht die transformirte Reihe irgend einmal ab, und die Transformation liefert die Summe der gegebenen Reihe.

So ist z. B. für die Reihe

$$S = x + 3x^2 + 5x^3 + 7x^4 + 9x^5 + \ldots$$
$$a = 1,\ \Delta a = 2,\ \Delta^2 a = \Delta^3 a = \Delta^4 a = \ldots = 0.$$

Also

$$S = \frac{x}{1-x} + \frac{2x^2}{(1-x)^2} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^2}.$$

$$S = \frac{4x}{1-x} + \frac{11x^2}{(1-x)^2} + \frac{14}{(1-}$$
$$= \frac{4x - x^2 + 4x^3 - x^4}{(1-x)^4} = \frac{x}{-}$$

14. Aber auch Theile von Reih
Art ſummiren. Es iſt nämlich für

$$S = ax + bx^2 + \ldots + kx^n +$$
$$ax + bx^2 + \ldots + kx^n = S - x^n(p$$
$$= S - x^n\left(p\frac{x}{1-x} + \Delta p \cdot \frac{}{(1}\right.$$
$$= (a - x^n p)\frac{x}{1-x} + (\Delta a - x^n$$
$$+ (\Delta^2 a - x^n \Delta^2 p)\frac{x^2}{(1-x)^3} + (\Delta$$

Für

$$S = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 +$$

iſt

$$a = 1,\ \Delta a = 1,\ \Delta^2 a = \Delta$$
$$p = n+1,\ \Delta p = 1,\ \Delta^2 p = \Delta$$

Alſo

$$S = \left\{1 - (n+1)x^n\right\}\frac{x}{1-} + (1 - :$$

$$S = \left\{1-(n+1)^2x^n\right\}\frac{x}{1-x} + \left\{3-(2n+3)x^n\right\}\frac{x^2}{(1-x)^2} + (2-2x^n)\frac{x^3}{(1-x)^3}$$
$$= \frac{x+x^2-(n+1)^2x^{n+1}+(2n^2+2n-1)x^{n+2}-n^2x^{n+3}}{(1-x)^3}$$

und eben ſo in ähnlichen Fällen.

15. Setzt man $-x$ für x; ſo erhält man

$$S = ax - bx^2 + cx^3 - dx^4 + \ldots$$
$$= a\frac{x}{1+x} - \Delta a\cdot\frac{x^2}{(1+x)^2} + \Delta^2 a\cdot\frac{x^3}{(1+x)^3} - \ldots$$
$$ax - bx^2 + cx^3 - \ldots \mp kx^n =$$
$$(a \mp x^n p)\frac{x}{1+x} - (\Delta a \mp x^n\Delta p)\frac{x^2}{(1+x)^2}$$
$$+ (\Delta^2 a \mp x^n\Delta^2 p)\frac{x^3}{(1+x)^3} - (\Delta^3 a \mp x^n\Delta^3 p)\frac{x^4}{(1+x)^4} + \ldots$$

Alſo z. B.

$$a - b + c - d + e - \ldots$$
$$= \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{4}\Delta a + \tfrac{1}{8}\Delta^2 a - \tfrac{1}{16}\Delta^3 a + \ldots$$

Für die Reihe

$$1 - 1.2 + 1.2.3 - 1.2.3.4 + \ldots$$

findet Euler nach dieſer Methode die Summe durch ei ziemlich lange Rechnung $= 0{,}40082038\ldots$, nur in d beiden erſten Decimalen genau, da das richtige Reſul $= 0{,}4036524077\ldots$, wie Euler auf anderm Wege funden.

Auf dieſe Weiſe erhält Euler auch

$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \frac{1}{2}$,
$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + \ldots = \frac{1}{4}$,
$1 - 3 + 5 - 7 + 9 - 11 + 13 - 14 + \ldots = 0$,
$1 - 3 + 6 - 10 + 15 - 21 + 28 - 36 + \ldots = \frac{1}{8}$,
$1 - 4 + 9 - 16 + 25 - 36 + 49 - 64 + \ldots = 0$,
$1 - 16 + 81 - 256 + 625 - 1296 + \ldots = 0$.

Oft kann man auch durch dieſe Transformation e Reihe in eine andere verwandeln, die ſich ſummiren lä So erhält man z. B. leicht

$$S = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64 - \ldots$$
$$= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} - \tfrac{1}{64} + \ldots$$

Letztere Reihe convergirt weit ſtärker als die gegebene Rei

— 1 — 4 — 9 — 16 — 25 — 36

Da ſich je zwei auf einander folgende Gli
das erſte ausgenommen, gegenſeitig
$\delta = \frac{1}{2}$.

Mehrere Beiſpiele ſ. m. bei Euler

16. Vorzüglich wichtig iſt dieſe letz
tion, um Reihen eine größere Converge
Die Reihe

$$\log n(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3$$

wird durch dieſe Transformation:

$$\log n(1+x) = \frac{x}{1+x}\left\{1 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right) + \tfrac{1}{3}\left(\right.\right.$$

$$+ \tfrac{1}{4}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3$$

$$\log n 2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{16}$$

Setzt man

$$\text{Arc tang } x = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7$$

$$= \frac{1}{x}(x^2 - \tfrac{1}{3}x^4 + \tfrac{1}{5}x^6 - \tfrac{1}{7}x^8$$

ſo erhält man, wenn die Differenzen der
rechnet werden:

$$\text{Arc tang } x = \frac{x}{1+x^2}\left\{1 + \tfrac{2}{3}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) + \frac{2.}{3.}\right.$$

Da

$$\tfrac{1}{4}\pi = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \ldots$$

so giebt unsere Transformation leicht:

$$\tfrac{1}{4}\pi = 1 + \tfrac{1}{3} + \frac{1.2}{3.5} + \frac{1.2.3}{3.5.7} + \frac{1.2.3.4}{3.5.7.9} + \ldots,$$

eine weit schneller convergirende Reihe.

17. Noch verallgemeinert hat Euler die vorige Umformung in den Inst. Calc. diff. T. II. Cap. VIII. §. 209. sqq. Sei z. B. die Reihe

$$S = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \ldots$$

in eine Reihe von folgender Form zu verwandeln:

$$S = \frac{\mathfrak{A}}{\alpha + \beta x} + \frac{\mathfrak{B}x}{(\alpha+\beta x)^2} + \frac{\mathfrak{C}x^2}{(\alpha+\beta x)^3} + \frac{\mathfrak{D}x^3}{(\alpha+\beta x)^4} + \ldots;$$

so multiplicire man auf beiden Seiten mit $\alpha + \beta x$, wodurch man

$$\begin{matrix} A\alpha + B\alpha \\ + A\beta \end{matrix}\Big|\; x + \begin{matrix} C\alpha \\ + B\beta \end{matrix}\Big|\; x^2 + \begin{matrix} D\alpha \\ + C\beta \end{matrix}\Big|\; x^3 + \ldots$$
$$= \mathfrak{A} + \frac{\mathfrak{B}x}{\alpha+\beta x} + \frac{\mathfrak{C}x^2}{(\alpha+\beta x)^2} + \frac{\mathfrak{D}x^3}{(\alpha+\beta x)^3} + \ldots$$

erhält. Macht man nun $\mathfrak{A} = A\alpha$, und setzt

$$\begin{aligned} A\beta + B\alpha &= A', \\ B\beta + C\alpha &= B', \\ C\beta + D\alpha &= C', \\ D\beta + E\alpha &= D', \\ &\text{&c.} \qquad \text{&c.} \end{aligned}$$

so hat man

$$A' + B'x + C'x^2 + D'x^3 + E'x^4 + \ldots$$
$$= \frac{\mathfrak{B}}{\alpha+\beta x} + \frac{\mathfrak{C}x}{(\alpha+\beta x)^2} + \frac{\mathfrak{D}x^2}{(\alpha+\beta x)^3} + \frac{\mathfrak{E}x^3}{(\alpha+\beta x)^4} + \ldots$$

woraus man wieder wie vorher $\mathfrak{B} = A'\alpha$, und

$$\begin{aligned} A'\beta + B'\alpha &= A'', \\ B'\beta + C'\alpha &= B'', \\ C'\beta + D'\alpha &= C'', \\ D'\beta + E'\alpha &= D'', \\ &\text{&c.} \qquad \text{&c.} \end{aligned}$$

so wie

$$A'' + B''x + C''x^2 + D''x^3 + E''x^4 + \ldots$$
$$= \frac{\mathfrak{C}}{\alpha+\beta x} + \frac{\mathfrak{D}x}{(\alpha+\beta x)^2} + \frac{\mathfrak{E}x^2}{(\alpha+\beta x)^3} + \frac{\mathfrak{F}x^3}{(\alpha+\beta x)^4} + \ldots$$

erhält, u. s. w.

$$D'\beta + C'\alpha =$$

$$\text{ꝛc.}$$

$$\mathfrak{C} = A''\alpha;\ A''\beta + B''\alpha =$$
$$B''\beta + C''\alpha =$$
$$C''\beta + D''\alpha =$$
$$D''\beta + E''\alpha =$$
$$\text{ꝛc.}$$

$$\mathfrak{D} = A'''\alpha;\ A'''\beta + B'''\alpha =$$
$$B'''\beta + C'''\alpha =$$
$$C'''\beta + D'''\alpha =$$
$$D'''\beta + E'''\alpha =$$
$$\text{ꝛc.}$$

Alſo

$$S = \frac{A\alpha}{\alpha + \beta x} + \frac{A'\alpha x}{(\alpha + \beta x)^2} + \frac{A''\alpha x^2}{(\alpha + \beta x}$$

Man nehme jetzt den Nenner dreithe

$$S = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + E$$
$$= \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x}{\alpha + \beta x + \gamma x^2} + \frac{\mathfrak{A}'x^3 +}{(\alpha + \beta x}$$
$$+ \frac{\mathfrak{A}''x^4 + \mathfrak{B}''x^5}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)^3} + \frac{\mathfrak{A}'''x^6}{(\alpha + \beta x}$$

Multiplicirt man nun auf beiden Sei

Setzt man also

$$\mathfrak{A} = A\alpha,\ \mathfrak{B} = A\beta + B\alpha;\ A\gamma + B\beta + C\alpha = A',\ B\gamma + C\beta + D\alpha = B',\ C\gamma + D\beta + E\alpha = C',\ D\gamma + E\beta + F\alpha = D',\ \text{&c.}\quad \text{&c.}$$

und dividirt durch x^2; so wird

$$A' + B'x + C'x^2 + D'x^3 + E'x^4 + \ldots = \frac{\mathfrak{A}' + \mathfrak{B}'x}{\alpha + \beta x + \gamma x^2} + \frac{\mathfrak{A}''x^2 + \mathfrak{B}''x^3}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)^2} + \frac{\mathfrak{A}'''x^4 + \mathfrak{B}'''x^5}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)^3} + \frac{\mathfrak{A}''''x^6 + \mathfrak{B}''''x^7}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)^4} + \ldots$$

wo man nun wieder ganz wie vorher verfahren kann. Bestimmt man daher $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{B}''$, $\mathfrak{A}'''$, $\mathfrak{B}'''$ u. s. f. aus folgenden Gleichungen:

$$\mathfrak{A} = A\alpha,\ \mathfrak{B} = A\beta + B\alpha;\ A\gamma + B\beta + C\alpha = A',\ B\gamma + C\beta + D\alpha = B',\ C\gamma + D\beta + E\alpha = C',\ D\gamma + E\beta + F\alpha = D',\ \text{&c.}\quad \text{&c.}$$

$$\mathfrak{A}' = A'\alpha,\ \mathfrak{B}' = A'\beta + B'\alpha;\ A'\gamma + B'\beta + C'\alpha = A'',\ B'\gamma + C'\beta + D'\alpha = B'',\ C'\gamma + D'\beta + E'\alpha = C'',\ D'\gamma + E'\beta + F'\alpha = D'',\ \text{&c.}\quad \text{&c.}$$

$$\mathfrak{A}'' = A''\alpha,\ \mathfrak{B}'' = A''\beta + B''\alpha;\ A''\gamma + B''\beta + C''\alpha = A''',\ B''\gamma + C''\beta + D''\alpha = B''',\ C''\gamma + D''\beta + E''\alpha = C'',\ D''\gamma + E''\beta + F''\alpha = D''',\ \text{&c.}\quad \text{&c.}$$

so wird

$$S = \frac{A\alpha + (A\beta + B\alpha)x}{\alpha + \beta x + \gamma x^2} + \frac{|A'\alpha + (A'\beta + B'\alpha)x|x^2}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)^2} + \frac{|A''\alpha + (A''\beta + B''\alpha)x|x^4}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)^3} + \ldots$$

Ist der Nenner viertheilig; so bestimme man $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{B}''$, $\mathfrak{C}''$, u. s. f. aus folgenden Gleichungen:

$$\mathfrak{A}'' = A''\alpha,\ \mathfrak{B}'' = A''\beta + B''\alpha,\ \mathfrak{C}''$$
$$A''\delta + B''\gamma + C''\beta + D'$$
$$B''\delta + C'\gamma + D''\beta + E'$$
$$C''\delta + D''\gamma + E''\beta + F'$$
$$\mathfrak{A}. \qquad \mathfrak{A}.$$

so wird

$$S = \frac{A\alpha + (A\beta + B\alpha)x + (A\gamma + B\beta}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3}$$
$$+ \frac{|A'\alpha + (A'\beta + B'\alpha)x + (A'\gamma +}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2 +}$$
$$+ \frac{|A''\alpha + (A''\beta + B''\alpha)x + (A''}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2 \cdot}$$

Wie man auf dieſe Art weiter gehen. Für $x = 1$ wird, wenn der $\alpha + \beta + \gamma = \varkappa$ geſetzt:

$$S = A + B + C + D + E +$$
$$= (\alpha+\beta)\left\{\frac{A}{\varkappa} + \frac{A'}{\varkappa^2} + \frac{A''}{\varkappa^3} + \frac{A'''}{\varkappa^4}\right.$$
$$+ \alpha\left\{\frac{B}{\varkappa} + \frac{B'}{\varkappa^2} + \frac{B''}{\varkappa^3} + \frac{B'''}{\varkappa^4}\right.$$

Iſt der Nenner viertheilig, und $= \varkappa$; ſo wird für $x = 1$:

Reihe von irgend einem Gliede an eine wiederkehrer Reihe wird.

18. Auch folgende allgemeine Transformation merkwürdig, und kann in manchen Fällen von Nut seyn. Man setze nämlich

$$S = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots$$
$$= \frac{\mathfrak{A}}{\alpha + \beta x} + \frac{\mathfrak{B}x}{(\alpha + \beta x)(\alpha' + \beta' x)} + \frac{\mathfrak{C}x^2}{(\alpha + \beta x)(\alpha' + \beta' x)(\alpha'' + \beta'' x)} + \ldots$$

und multiplicire auf beiden Seiten mit $\alpha + \beta x$; so w

$$\begin{matrix} A\alpha + B\alpha \\ + A\beta \end{matrix}\Big\} x + \begin{matrix} C\alpha \\ + B\beta \end{matrix}\Big\} x^2 + \begin{matrix} D\alpha \\ + C\beta \end{matrix}\Big\} x^3 + \ldots$$
$$= \mathfrak{A} + \frac{\mathfrak{B}x}{\alpha' + \beta' x} + \frac{\mathfrak{C}x^2}{(\alpha' + \beta' x)(\alpha'' + \beta'' x)} + \frac{\mathfrak{D}x^3}{(\alpha' + \beta' x)(\alpha'' + \beta'' x)(\alpha''' + \beta''' x)} +$$

Setzt man nun

$$\mathfrak{A} = A\alpha;\ A\beta + B\alpha = A',$$
$$B\beta + C\alpha = B',$$
$$C\beta + D\alpha = C',$$
$$\text{\&c.} \qquad \text{\&c.}$$

und dividirt auf beiden Seiten mit x; so wird

$$A' + B'x + C'x^2 + D'x^3 + E'x^4 + \ldots$$
$$= \frac{\mathfrak{B}}{\alpha' + \beta' x} + \frac{\mathfrak{C}x}{(\alpha' + \beta' x)(\alpha'' + \beta'' x)} + \frac{\mathfrak{D}x^2}{(\alpha' + \beta' x)(\alpha'' + \beta'' x)(\alpha''' + \beta''' x)} + \ldots$$

womit man nun wieder wie vorher verfahren kann.

Bestimmt man also $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, u. s. f. aus f genden Gleichungen:

$$\mathfrak{A} = A\alpha;\ A\beta + B\alpha = A',$$
$$B\beta + C\alpha = B',$$
$$C\beta + D\alpha = C',$$
$$\text{\&c.} \qquad \text{\&c.}$$

$$\mathfrak{B} = A'\alpha';\ A'\beta' + B'\alpha' = A'',$$
$$B'\beta' + C'\alpha' = B'',$$
$$C'\beta' + D'\alpha' = C'',$$
$$\text{\&c.} \qquad \text{\&c.}$$

$$\cdots - \frac{\alpha + \beta x}{\cdots} \cdot \frac{(\alpha + \beta x)(\alpha' + \cdots}{\cdots}$$

$$+ \frac{\cdots}{(\alpha + \beta x)(\alpha' \cdots}$$

$\alpha, \beta, \alpha', \beta', \alpha'', \beta''$, u. ſ. f. ſi
können alſo immer ſo angenomme
Reihe ſtark convergirt.

Setzt man $x = -1$; ſo iſ

$$S = A - B + C - D + E$$

und, wenn man

$$\alpha = \alpha' = \alpha'' = \alpha''' = \alpha''''$$
$$\beta = -1, \beta' = -2, \beta''$$

ſetzt:

$$\mathfrak{A} = A; B - A = A',$$
$$C - B = B',$$
$$D - C = C',$$
$$\text{ꝛc.} \qquad \text{ꝛc.}$$
$$\mathfrak{B} = A'; B' - 2A' = A''$$
$$C' - 2B' = B'',$$
$$D' - 2C' = C''$$
$$\text{ꝛc.} \qquad \text{ꝛc.}$$
$$\mathfrak{C} = A''; B'' - 3A'' = A$$
$$C'' \quad 3B'' = B$$

$$S = \frac{A}{2} - \frac{A'}{2.3} + \frac{A''}{2.3.4} - \frac{A'''}{2.3.4.5} + \frac{A''''}{2.3.4.5.6} - \ldots$$

Nimmt man die Factoren des Nenners dreitheilig an; setze man

$$S = \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x}{\alpha + \beta x + \gamma x^2} + \frac{\mathfrak{A}'x^2 + \mathfrak{B}'x^3}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)(\alpha' + \beta' x + \gamma' x^2)} + \frac{\mathfrak{A}''x^4 + \mathfrak{B}''x^5}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)(\alpha' + \beta' x + \gamma' x^2)(\alpha'' + \beta'' x + \gamma'' x^2)} + \ldots$$

Multiplicirt man nun auf beiden Seiten mit $\alpha + \beta x + \gamma x$ so erhält man:

$$\begin{matrix} A\alpha + B\alpha \\ + A\beta \end{matrix}\Big\} \begin{matrix} x + C\alpha \\ + B\beta \\ + A\gamma \end{matrix}\Big\} \begin{matrix} x^2 + D\alpha \\ + C\beta \\ + B\gamma \end{matrix}\Big\} x^3 + \ldots$$

$$= \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \frac{\mathfrak{A}'x^2 + \mathfrak{B}'x^3}{\alpha' + \beta' x + \gamma' x^2} + \frac{\mathfrak{A}''x^4 + \mathfrak{B}''x^5}{(\alpha' + \beta' x + \gamma' x^2)(\alpha'' + \beta'' x + \gamma'' x^2)} + \ldots$$

und folglich, wenn man

$$\mathfrak{A} = A\alpha,\ \mathfrak{B} = A\beta + B\alpha;\ \begin{matrix} A\gamma + B\beta + C\alpha = A', \\ B\gamma + C\beta + D\alpha = B', \\ C\gamma + D\beta + E\alpha = C', \\ \text{&c.} \qquad \text{&c.} \end{matrix}$$

setzt, auf beiden Seiten zugleich mit x^2 dividirt:

$$A' + B'x + C'x^2 + D'x^3 + E'x^4 + \ldots = \frac{\mathfrak{A}' + \mathfrak{B}'x}{\alpha' + \beta' x + \gamma' x^2} + \frac{\mathfrak{A}''x^2 + \mathfrak{B}''x^3}{(\alpha' + \beta' x + \gamma' x^2)(\alpha'' + \beta'' x + \gamma'' x^2)} + \frac{\mathfrak{A}'''x^4 + \mathfrak{B}'''x^5}{(\alpha' + \beta' x + \gamma' x^2)(\alpha'' + \beta'' x + \gamma'' x^2)(\alpha''' + \beta''' x + \gamma''' x^2)} + \ldots$$

womit man nun wieder wie vorher verfahren kann.

Setzt man also

$$\mathfrak{A} = A\alpha,\ \mathfrak{B} = A\beta + B\alpha;\ \begin{matrix} A\gamma + B\beta + C\alpha = A', \\ B\gamma + C\beta + D\alpha = B', \\ C\gamma + D\beta + E\alpha = C', \\ \text{&c.} \qquad \text{&c.} \end{matrix}$$

$$\mathfrak{A}' = A'\alpha',\ \mathfrak{B}' = A'\beta' + B'\alpha';\ \begin{matrix} A'\gamma' + B'\beta' + C'\alpha' = A'', \\ B'\gamma' + C'\beta' + D'\alpha' = B'', \\ C'\gamma' + D'\beta' + E'\alpha' = C'', \\ \text{&c.} \qquad \text{&c.} \end{matrix}$$

$$\mathfrak{A}'' = A''\alpha'',\ \mathfrak{B}'' = A''\beta'' + B''\alpha'';\ \begin{matrix} A''\gamma'' + B''\beta'' + C''\alpha'' = A''', \\ B''\gamma'' + C''\beta'' + D''\alpha'' = B''', \\ C''\gamma'' + D''\beta'' + E''\alpha'' = C''', \\ \text{&c.} \qquad \text{&c.} \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= \\ \alpha' + \beta' + \gamma' &= \\ \alpha'' + \beta'' + \gamma'' &= \\ \alpha''' + \beta''' + \gamma''' &= \\ \text{ꝛc.} \qquad & \text{ꝛc.} \end{aligned}$$

erhält man hieraus

$$S = \frac{\alpha(A+B)}{x} + \frac{\alpha'(A'+B')}{xx'} + \frac{\alpha''(A}{x}$$

$$+ \frac{\beta A}{x} + \frac{\beta' A'}{xx'} + \frac{\beta'' A''}{xx'x''} + \frac{\beta'''}{xx'x}$$

19. Eine merkwürdige, der
ähnliche Transformation der partiel

$$1 + \frac{\alpha}{1}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2}x^2 + .$$

giebt Laplace (Théorie analyti
p. 151.) Er gelangt dazu durch
den mittelſt der höhern Analyſis.
elementariſch geführt werden, ind
ficienten der αten Potenz von 1 -

$$\varphi(n+1) = 1 + \left\{(\alpha-n+1)_1 - 1\right\} \cdot \frac{x}{1+x}$$
$$+ \left\{(\alpha-n+2)_2 - (\alpha-n+1)_1\right\} \cdot \left(\frac{x}{1+x}\right)^2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \left\{(\alpha-1)_{n-1} - (\alpha-2)_{n-2}\right\} \cdot \left(\frac{x}{1+x}\right)^{n-1}$$
$$+ \left\{(\alpha_n) - (\alpha-1)_{n-1}\right\} \cdot \left(\frac{x}{1+x}\right)^n,$$

woraus leicht:

$$\varphi(n+1) = \varphi(n) \cdot \frac{1}{1+x} + (\alpha_n) \cdot \left(\frac{x}{1+x}\right)^n$$

und folglich durch successive Zerlegung, für $(1+x)^n \cdot \varphi(n+1) = \psi(n+1)$:

$$\psi(n+1) = \psi(n) + (\alpha_n) \cdot x^n = \psi(n-1) + (\alpha_{n-1}) \cdot x^{n-1} + (\alpha_n) \cdot x^n$$
$$= \psi(n-2) + (\alpha_{n-2}) \cdot x^{n-2} + (\alpha_{n-1}) \cdot x^{n-1} + (\alpha_n) \cdot x^n$$
$$\text{\&c.} \qquad \text{\&c.}$$
$$= \psi(2) + (\alpha_2) \cdot x^2 + (\alpha_3) \cdot x^3 + \ldots (\alpha_n) \cdot x^n.$$

Aber

$$\psi(2) = (1+x)\left\{1 + (\alpha-1)_1 \cdot \frac{x}{1+x}\right\}$$
$$= 1 + x + (\alpha-1)_1 \cdot x = 1 + (\alpha_1) \cdot x.$$

Also $\psi(n+1) =$

$$1 + (\alpha_1) \cdot x + (\alpha_2) \cdot x^2 + \ldots + (\alpha_n) \cdot x^n,$$

d. i.

$$1 + \frac{\alpha}{1}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{1.2.3\ldots n}x^n$$
$$= (1+x)^n \cdot \left\{1 + \frac{\alpha-n}{1}\left(\frac{x}{1+x}\right) + \frac{(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{1.2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2\right.$$
$$+ \frac{(\alpha-n+2)(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{1.2.3}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\left. + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n)}{1.2.3\ldots n}\left(\frac{x}{1+x}\right)^n\right\}$$

20. Vergleicht man die in der Wahrscheinlichkeitsrechnung beim Pharao wichtige Reihe (s. Wahrscheinlichkeitsrechnung. 41.)

$$S = 1 - \frac{p-q}{p-1} + \frac{(p-q)(p-q-1)}{(p-1)(p-2)} - \ldots$$

mit der Reihe:

$$a - b + c - d + e - \ldots$$

lung der Differenzen ankommt,
Reihe poſitiv genommen werden.

Folglich nach der Euler'ſch

$$S = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\cdot\frac{q-1}{p-1} + \tfrac{1}{5}\frac{(q$$

$$+ \tfrac{1}{15}\cdot$$

21. Wir wollen nun dieſe Di
trachten. Allgemein iſt

$$\Delta^n a = \frac{(q-1)(q-2)..(q-$$

$$(p-1)(p-2)..(p-$$

Das allgemeine Glied der gegebene

$$a_x = \frac{(p-q)(p-q-1)..($$

$$(p-1)(p-2)..(p$$

oder; wenn wir auf das Vorzeic
Entwickelung der Differenzen, ni

$$a_x = \frac{(p-q)(p-q-1)..(p$$

$$(p-1)(p-2)..(p$$

Folglich ſind die Glieder der gegeb
Producte von a in

$$\Delta^n a_x = \frac{(p-q)(p-q-1)..(p-q-x+2)}{(p-1)(p-2)..(p-x+1)} \times \frac{(q-1)(q-2)...(q-n)}{(p-x)(p-x-1)..(p-x-n+1)}(-1)^n,$$

$$\Delta^{q-1} a_x = \frac{(p-q)(p-q-1)..(p-q-x+2)}{(p-1)(p-2)..(p-x+1)} \times \frac{(q-1)(q-2)...2.1}{(p-x)(p-x-1)..(p-q-x+2)}(-1)^{q-1}$$

$$= \frac{(p-q)..(p-q-x+2)(q-1)...1}{(p-1)(p-2)...(p-q-x+2)}(-1)^{q-1}$$

$$= \frac{(q-1)(q-2)...2.1}{(p-1)(p-2)..(p-q+1)}(-1)^{q-1}.$$

Also $\Delta^{q-1} a_x$ nicht mehr von x abhängig; folglich eine constante Größe, und demnach

$$\Delta^q a_x = \Delta^{q+1} a_x = \Delta^{q+2} a_x = ... = 0,$$

welches Alles für jedes x, also auch $x = 1$, gilt, so daß auch

$$\Delta^{q-1} a = \frac{(q-1)(q-2)..2.1}{(p-1)(p-2)..(p-q+1)}(-1)^{q-1}.$$

Also bricht die in (20.) gefundene Reihe ab, und es ist

$$S = \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2}.\frac{q-1}{p-1} + \tfrac{1}{3}.\frac{(q-1)(q-2)}{(p-1)(p-2)} + ... + \frac{1}{2^q}.\frac{(q-1)(q-2)..2.1}{(p-1)(p-2)..(p-q+1)}.$$

22. Für $x = p - q + 2$, $n = q - \alpha - 1$, d. i. $n < q - 1$, erhält man:

$$\Delta^n a_x = \frac{(p-q)(p-q-1)...1.0}{(p-1)(p-2)...(q-1)} \times \frac{(q-1)(q-2)..(\alpha+1)}{(q-2)(q-3)..\alpha}(-1)^n,$$

d. i. $\Delta^{q-\alpha-1} a_{p-q+2} = 0$.

Für $n = q - 1$, d. i. für $\alpha = 0$, erhält man auch im Nenner einen Factor $= 0$. Diese beiden Factoren gegenseitig aufgehoben geben den obigen constanten Werth für $\Delta^{q-1} a_x$. Also ist nach der Eulerschen Transformation die Summe der gegebenen Reihe vom $(p-q+2)$ten Gliede an, dieses Glied, welches selbst $= 0$ ist, positiv genommen, die folgenden abwechselnd positiv und negativ,

$$= \tfrac{1}{1}.0 + \tfrac{1}{2}.0 + \tfrac{1}{3}.0 + .. + \frac{1}{2^{q-1}}.0 + \frac{1}{2^q}.\frac{(q-1)(q-2)..1}{(p-1)(p-2)..(p-q+1)}.$$

Folglich, wenn man die Glieder mit ihren eigentlichen Zeichen nimmt, diese Summe offenbar

Umformung

$$\frac{(q-1)\ldots 1}{(p-1)\ldots(p-q+1)}\cdot(-1)^{p-q+1}.$$

, wenn man die Summe S′ der $p-q+1$ unſerer Reihe finden will, von S abziehen,

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{q-1}{p-1}+\frac{1}{8}\cdot\frac{(q-1)(q-2)}{(p-1)(p-2)}+\ldots$$
$$+\frac{1}{2^q}\cdot\frac{(q-1)\ldots 1}{(p-1)\ldots(p-q+1)}\cdot\left\{1-(-1)^{p-q+1}\right\}$$
$$\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{q-1}{p-1}+\frac{1}{8}\cdot\frac{(q-1)(q-2)}{(p-1)(p-2)}+\ldots$$
$$\cdot+\frac{1}{2^q}\cdot\frac{(q-1)\ldots 1}{(p-1)\ldots(p-q+1)}\left\{1+(-1)^{p-q}\right\}$$

man nun in der Laplace'ſchen Transforma-
$=-2$, $\alpha=p$, $n=q-1$; ſo er-

$$^2+\frac{p(p-1)}{1.2}.2^2-\ldots+\frac{p(p-1)\ldots(p-q+2)}{1.2.3\ldots(q-1)}.(-2)^{q-1}$$
$$\left\{1+\frac{p-q+1}{1}.2+\frac{(p-q+2)(p-q+1)}{1.2}.2^2\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{(p-1)(p-2)\ldots(p-q+1)}{1.2.3\ldots(q-1)}.2^{q-1}\right\}$$

es, mit (22.) verglichen, giebt leicht:

$$= \frac{P}{2q}\left\{\frac{q}{p-q+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{q(q-1)}{(p-q+1)(p-q+2)} + \ldots\right.$$
$$\ldots + \frac{1}{(-2)^{q-2}}\cdot\frac{q(q-1)\ldots 2}{(p-q+1)\ldots(p-1)}$$
$$\left. + \frac{1}{(-2)^{q-1}}\cdot\frac{q(q-1)\ldots 1}{(p-q+1)\ldots p}\left[1+(-1)^{p-2q+1}\right]\right\}$$

e neue merkwürdige Transformation und Summa-n, welche zugleich ein Beispiel der Euler'schen und La-ce'schen Transformation, und der doppelten Umfor-ung einer Reihe ist. M. s. Mollweide's Pro-amm: Multiplex et continuata serierum trans-rmatio exemplo quodam luculento illustratur. ps. 1820.

24. Sey

$$\frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n)} = \varphi(\gamma; n+1);$$

überzeugt man sich sehr leicht von der Richtigkeit folgen-Relation:

$$\varphi(\gamma, n+1) = \varphi(\gamma, n) + \frac{\beta-\gamma}{\gamma}\varphi(\gamma+1, n).$$

es giebt durch fernere Zerlegung beider Functionen:

$$\varphi(\gamma, n+1) = \varphi(\gamma, n-1) + 2\cdot\frac{\beta-\gamma}{\gamma}\varphi(\gamma+1, n-1)$$
$$+ \frac{(\beta-\gamma)(\beta-\gamma-1)}{\gamma(\gamma+1)}\varphi(\gamma+2, n-1),$$

d hieraus durch die Zerlegung aller drei Functionen:

$$\varphi(\gamma, n+1) = \varphi(\gamma, n-2) + 3\cdot\frac{\beta-\gamma}{\gamma}\varphi(\gamma+1, n-2)$$
$$+ 3\cdot\frac{(\beta-\gamma)(\beta-\gamma-1)}{\gamma(\gamma+1)}\varphi(\gamma+2, n-2)$$
$$+ \frac{(\beta-\gamma)(\beta-\gamma-1)(\beta-\gamma-2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}\varphi(\gamma+3, n-2).$$

an kann dies leicht so weit fortsetzen, als man will, und nerkt sehr bald, daß überhaupt:

$$\varphi(\gamma, n+1) = \varphi(\gamma, n-\varkappa) + (\varkappa+1)_1\cdot\frac{\beta-\gamma}{\gamma}\varphi(\gamma+1, n-\varkappa)$$
$$+ (\varkappa+1)_2\cdot\frac{(\beta-\gamma)(\beta-\gamma-1)}{\gamma(\gamma+1)}\varphi(\gamma+2, n-\varkappa)\ldots.$$
$$+ (\varkappa+1)_{\varkappa+1}\cdot\frac{(\beta-\gamma)\ldots(\beta-\gamma-\varkappa)}{\gamma\ldots(\gamma+\varkappa)}\varphi(\gamma+\varkappa+1, n-\varkappa),$$

$$\varphi(\gamma, n+1) = 1 + (n+1)_1 \cdot \frac{\beta-\gamma}{\gamma} + (n+1)_2 \cdot \frac{(\beta-\gamma)}{\gamma(}$$
$$+ (n+1)_{n+1} \cdot \frac{(\beta-\gamma)\ldots(\beta-\gamma-}{\gamma\ldots(\gamma+n)}$$

25. Sey jetzt

$$S = 1 + \frac{\alpha}{1} \cdot \frac{\beta}{\gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2} \cdot \frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{1.2.3} \cdot \frac{\beta(\beta+1)(\beta+}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+}$$

so erhält man mittelst der vorigen Zerle
$\frac{\beta}{\gamma}$, $\frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}$, ꝛc., wenn man nach Vert
leicht:

$$S = 1 + \frac{\alpha}{1} x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha}{1.2.3}$$
$$\vdots + \frac{\alpha}{1} \cdot \frac{\beta-\gamma}{\gamma} \Big\{ 1 + \frac{\alpha+1}{1} x + \frac{(\alpha+1)(}{1.}$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2} \cdot \frac{(\beta-\gamma)(\beta-\gamma-1)}{\gamma(\gamma+1)} \Big| 1 +$$

Alſo, wenn man die unendlichen Reih
miſchen Lehrſatze ſummirt, und $(1-x)$

$$S = (1-x)^{-\alpha} \Big\{ 1 + \frac{\beta-\gamma}{1} \cdot \frac{\alpha}{\gamma} \Big(\frac{x}{1-x} \Big)$$

statt	gesetzt wird
x	$-\frac{x}{1-x}$
α	$-(\beta-\gamma)=\gamma-\beta$
β	α
$1-x$	$(1-x)^{-1}$
$\frac{x}{1-x}$	$-x$.

Dies giebt $S=(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\times$

$$\left\{1+\frac{\gamma-\alpha}{1}\cdot\frac{\gamma-\beta}{\gamma}x+\frac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\alpha+1)}{1.2}\cdot\frac{(\gamma-\beta)(\gamma-\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}x^2\right.$$
$$\left.+\frac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\alpha+1)(\gamma-\alpha+2)}{1.2.3}\cdot\frac{(\gamma-\beta)(\gamma-\beta+1)(\gamma-\beta+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\ldots\right\}$$

eine schon von Euler gefundene Transformation (Acta Petrop. T. XII.). Setzt man $-x$ für x und dann $-\alpha$ für α; so erhält man andere merkwürdige Formen.

27. Zu der schon im Art. Binomischer Lehrsatz. (17.) mitgetheilten Eulerschen Transformation der Binomialreihe fügen wir hier noch eine andere von Bouvier (Ann. de Math. XVI.). Sey

$$z=\frac{x^n}{1+x^n};$$

so ist $x^m=\left(\frac{z}{1-z}\right)^{\frac{m}{n}}=z^{\frac{m}{n}}.(1-z)^{-\frac{m}{n}}$

Also, weil $z=1-(1-z)$ ist:

$$x^m=\left\{1-\frac{m}{n}(1-z)+\frac{m(m-n)}{n.2n}(1-z)^2-\frac{m(m-n)(m-2n)}{n.2n.3n}(1-z)^3+\ldots\right\}$$
$$\times\left\{1+\frac{m}{n}z+\frac{m(m+n)}{n.2n}z^2+\frac{m(m+n)(m+2n)}{n.2n.3n}z^3+\ldots\right\}$$
$$=\left\{1-\frac{m}{n}\left(\frac{1}{1+x^n}\right)+\frac{m(m-n)}{n.2n}\left(\frac{1}{1+x^n}\right)^2-\frac{m(m-n)(m-2n)}{n.2n.3n}\left(\frac{1}{1+x^n}\right)^3+\ldots\right\}$$
$$\times\left\{1+\frac{m}{n}\cdot\frac{x^n}{1+x^n}+\frac{m(m+n)}{n.2n}\left(\frac{x^n}{1+x^n}\right)^2+\frac{m(m+n)(m+2n)}{n.2n.3n}\left(\frac{x^n}{1+x^n}\right)^3+\ldots\right\}$$

eine Reihe, welche immer convergirt, wenn für n eine

ngenommen wird. Setzt man $\frac{1}{m}$ für m; so

$$1 - \frac{1}{mn}\left(\frac{1}{1+x^n}\right) - \frac{mn-1}{mn \cdot 2mn}\left(\frac{1}{1+x^n}\right)^2 - \frac{(mn-1)(2mn-1)}{mn \cdot 2mn \cdot 3mn}\left(\frac{1}{1+x^n}\right)^3 - \ldots$$

$$1 + \frac{1}{mn}\left(\frac{x^n}{1+x^n}\right) + \frac{mn+1}{mn \cdot 2mn}\left(\frac{x^n}{1+x^n}\right)^2 + \frac{(mn+1)(2mn+1)}{mn \cdot 2mn \cdot 3mn}\left(\frac{x^n}{1+x^n}\right)^3 + \ldots$$

h keine eigentliche Transformation der Bino-
ist der Ausdruck doch merkwürdig genug, um
elle zu finden. Im Artikel Wurzel werden
lben zurückkommen.

h für die logarithmische Reihe findet **Bouvier**
merkwürdige Transformation. Nach dem Vo-
lich

$\frac{z}{-z}$, $n \log n z = \log n z - \log n (1 - z)$.

$= 1 - (1 - z)$; so erhält man mittelst
ogarithmus 25.) leicht:

wo man k immer so groß nehmen kann, daß $\sqrt[k]{x} - 1$ kleiner als jede gegebene Größe wird. Nimmt man k negativ; so wird

$$\log_n x = k\left\{1 - \frac{1}{\sqrt[k]{x}} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[k]{x}}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[k]{x}}\right)^3 + \ldots\right\}$$

Nimmt man k so, daß $\sqrt[k]{x} - 1 < 1$ ist; so convergirt auch die zweite Reihe, wenn x eine ganze Zahl ist. Denn es ist dann $\sqrt[k]{x} > 1$, also

$$\frac{\sqrt[k]{x-1}}{\sqrt[k]{x}} < \sqrt[k]{x} - 1, \quad 1 - \frac{1}{\sqrt[k]{x}} < \sqrt[k]{x} - 1, < 1.$$

Man hat also vermöge der beiden obigen Reihen:

$$\log_n x < k(\sqrt[k]{x} - 1), > k\left(1 - \frac{1}{\sqrt[k]{x}}\right).$$

Der Unterschied der Gränzen ist:

$$k(\sqrt[k]{x} - 1)\left(1 - \frac{1}{\sqrt[k]{x}}\right),$$

welcher offenbar desto kleiner wird, je größer man k nimmt. Giebt man dem $\log_n x$ einen seiner Gränzwerthe; so ist der Fehler also

$$< k(\sqrt[k]{x} - 1)\left(1 - \frac{1}{\sqrt[k]{x}}\right).$$

Für ein unendlich großes k verschwindet dieser Fehler, und man hat

$$\log_n x = k(\sqrt[k]{x} - 1) = k\left(1 - \frac{1}{\sqrt[k]{x}}\right),$$

wodurch also Logarithmen auf Potenzen gebracht sind. Zugleich erhellet hieraus, daß zu jeder Zahl unendlich viele Logarithmen gehören, da eine Wurzel, deren Exponent unendlich groß ist, unendlich viele Werthe hat.

30. Die Artikel Cyklometrie und Cyklotechnie bieten mancherlei Umformungen dar. Noch eine merkwürdige Transformation der Reihe

$$\text{Arc tang } x = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \ldots = \varphi,$$

theile ich aus Fischer's Theorie der Dimensionszeichen.

ſes Glied

$$= \frac{m(m+1)..(k-1)}{1.2.3...(k-m)} t^m y^k = \frac{(k-1)(}{1.2.3..}$$

$$= \frac{(k-1)..(k-m+1)(k-}{1.2.3..(m-1)m..(k-}$$

$$= \frac{(k-1)..m(m-1)..(k-}{1.2..(k-m)(k-m+1)..}$$

$$= \frac{(k-1)(k-2)..(k-m+}{1.2.3...(m-1)}$$

Setzt man nun $\frac{ty}{1-y}$ für y in unſer allgemeine Glied:

$$\left\{ t - \frac{(k-1)(k-2)}{1.2.3} t^3 + \frac{(k-1)..(k-4)}{1..4.5} t^5 - \right.$$

$$= \frac{1}{k}\left\{ kt - \frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3} t^3 + \frac{k..(k-4)}{1..5} t^5 - \right.$$

$$= \frac{(1+t\sqrt{-1})^k - (1-t\sqrt{}}{2k\sqrt{-1}}$$

wie ſich leicht mittelſt des Binomiſchen wickelung der Potenzen der imaginä

Da nun $t = \text{tang}\,\alpha$; ſo iſt dieſes all

$$= \frac{(1+\text{tang}\,\alpha\sqrt{-1})^k - (1-\text{tan}}{2k\sqrt{-1}}$$

Arc tang $x = \varphi$ und $\alpha = \varphi$, $x = \text{tang}\,\varphi$, wird:

$$\varphi = \frac{\sin\varphi}{1.2\cos\varphi} + \frac{\sin 2\varphi}{2.4\cos\varphi^2} + \frac{\sin 3\varphi}{3.8\cos\varphi^3} + \frac{\sin 4\varphi}{4.16\cos\varphi^4} + \ldots$$

h ist das allgemeine Glied

$$= \frac{\sin k\alpha}{k\cos\alpha^k}\left(\frac{\text{tang}\,\varphi}{\text{tang}\,\alpha + \text{tang}\,\varphi}\right)^k = \frac{\sin k\alpha}{k}\left\{\frac{\sin\varphi}{\sin(\alpha+\varphi)}\right\}^k,$$

aus

$$\varphi = \frac{\sin\alpha\sin\varphi}{\sin(\alpha+\varphi)} + \frac{\sin 2\alpha\sin\varphi^2}{2\sin(\alpha+\varphi)^2} + \frac{\sin 3\alpha\sin\varphi^3}{3\sin(\alpha+\varphi)^3} + \ldots$$

31. Wir beschließen diesen Artikel mit einer merkwürdigen von Laplace (Mém. de Paris. 1782. p. 7.) und Lamp (Hindenburgs Archiv. Heft. 10. S. 223.) gefundenen Umformung der Bernoullischen Reihe (Integralformel. 145.). Es ist nämlich

$$\int X\partial x = xX - \frac{x^2\partial X}{1.2\partial x} + \frac{x^3\partial^2 X}{1.2.3\partial x^2} - \ldots$$

$$\int x\partial X = Xx - \frac{X^2\partial x}{1.2\partial X} + \frac{X^3\partial^2 x}{1.2.3\partial X^2} - \ldots$$

er $\int x\partial X = Xx - \int X\partial x$ (Thl. II. S. 783.). Also

$$\int X\partial x = \frac{X^2\partial x}{1.2\partial X} - \frac{X^3\partial^2 x}{1.2.3\partial X^2} + \frac{X^4\partial^3 x}{1.4\partial X^3} - \ldots$$

an setze nun

$$\frac{X\partial x}{\partial X} = Z, \frac{\partial Z}{\partial x} = U', \frac{\partial . ZU'}{\partial x} = U'', \frac{\partial . ZU''}{\partial x} = U''', \text{ u. s. f.}$$

ist

$$\frac{\partial Z}{\partial X} = \frac{ZU'}{X},$$
$$\frac{\partial U'}{\partial X} = \frac{U'' - U'U'}{X},$$
$$\frac{\partial U''}{\partial X} = \frac{U''' - U'U''}{X},$$
$$\frac{\partial U'''}{\partial X} = \frac{U'''' - U'U'''}{X},$$
$$\text{&c.} \qquad \text{&c.}$$

von man sich leicht überzeugt, wenn man die obigen Differentiale der Producte wirklich entwickelt. Hieraus erhält man ferner

$$\frac{\partial x}{\partial X} = \frac{Z}{X}, \frac{\partial^2 x}{\partial X^2} = -\frac{Z(1-U')}{X^2},$$
$$\frac{\partial^3 x}{\partial X^3} = \frac{Z(2 - 3U' + U'')}{X^3}, \quad \text{&c.}$$

ohne Rückſicht auf ſein Vorzeichen. Hebt r
ler und Nenner durch X^{n-1} auf; ſo wird d
X^{n+1}, und der Zähler =

$$X\left\{\overset{1}{A}_n - \overset{2}{A}_n U' + \ldots \pm \overset{n}{A}_n U^{(n-1)}\right\}\frac{\partial Z}{\partial X}$$

$$+ XZ\left\{-\overset{2}{A}_n\frac{\partial U'}{\partial X} + \overset{3}{A}_n\frac{\partial U''}{\partial X} - \ldots \pm \overset{n}{A}_n\frac{\partial U^{(n-}}{\partial X}\right.$$

$$- nZ\left\{\overset{1}{A}_n - \overset{2}{A}_n U' + \ldots \pm \overset{n}{A}_n U^{(n-1)}\right\}$$

$$= Z\left\{\overset{1}{A}_n - \overset{2}{A}_n U' + \ldots \pm \overset{n}{A}_n U^{(n-1)}\right\} U'$$

$$+ Z\left\{-\overset{2}{A}_n(U'' - U'U') + \overset{3}{A}_n(U''' - U'U\right.$$

$$- \ldots \pm \overset{n}{A}_n\left(U^{(n)} - U'U^{(n-}\right.$$

$$- nZ\left\{\overset{1}{A}_n - \overset{2}{A}_n U' + \ldots \pm \overset{n}{A}_n U^{(n-1)}\right\}$$

$$= -Z\left\{\overset{1}{n}A_n - (\overset{1}{A}_n + \overset{2}{n}A_n)U' + \ldots \pm (\overset{n-1}{A}_n + \overset{n}{n}A_n)U\right.$$

Alſo, wenn man wieder auf das Zeichen des quotienten Rückſicht nimmt:

$$\frac{\partial^{n+1}x}{\partial X^{n+1}} = \mp\frac{Z\left\{\overset{1}{A}_{n+1} - \overset{2}{A}_{n+1}U' + \ldots \mp \overset{n+1}{A}_{n+1}\right.}{X^{n+1}}$$

wo $\overset{1}{A}_{n+1} = \overset{1}{n}A_n$,

$$\overset{k}{A}_n = \overrightarrow{B}_k$$

ist, daß diese Relation allgemein, und folglich nach (12.) und der dortigen Bezeichnung:

$$\overset{k}{A}_n = \underset{-(k+1)}{\overset{n-k+1}{A}}, \quad \overset{k}{A}_{-n} = \underset{n+k-2}{\overset{n-1}{A}}.$$

Hiernach erhalten wir nun

$$\int X\,\partial x = \frac{X^2}{1.2}\cdot\frac{Z\overset{1}{A}_1}{X} + \frac{X^3}{1.2.3}\cdot\frac{Z\left\{\overset{1}{A}_2 - \overset{2}{A}_2U'\right\}}{X^2}$$
$$+ \frac{X^4}{1\ldots4}\cdot\frac{Z\left\{\overset{1}{A}_3 - \overset{2}{A}_3U' + \overset{3}{A}_3U''\right\}}{X^3}$$
$$+ \frac{X^5}{1\ldots5}\cdot\frac{Z\left\{\overset{1}{A}_4 - \overset{2}{A}_4U' + \overset{3}{A}_4U'' - \overset{4}{A}_4U'''\right\}}{X^4} + \ldots$$
$$= ZX\left\{\frac{\overset{1}{A}_1}{1.2} + \frac{\overset{1}{A}_2}{1.2.3} + \frac{\overset{1}{A}_3}{1..4} + \ldots\right\}$$
$$- ZXU'\left\{\frac{\overset{2}{A}_2}{1.2.3} + \frac{\overset{2}{A}_3}{1..4} + \frac{\overset{2}{A}_4}{1..5} + \ldots\right\}$$
$$+ ZXU''\left\{\frac{\overset{3}{A}_3}{1..4} + \frac{\overset{3}{A}_4}{1..5} + \frac{\overset{3}{A}_5}{1..6} + \ldots\right\}$$
$$- ZXU'''\left\{\frac{\overset{4}{A}_4}{1..6} + \frac{\overset{4}{A}_5}{1..6} + \frac{\overset{4}{A}_6}{1..7} + \ldots\right\} + \ldots$$

Nach (11.) aber für $x = 1$:

$$1 = \frac{\overset{1}{A}}{\underset{1\ldots n}{-n}} + \frac{\overset{2}{A}}{\underset{1..(n+1)}{-n}} + \frac{\overset{3}{A}}{\underset{1..(n+2)}{-n}} + \ldots$$
$$= \frac{\overset{n-1}{A}_{n-1}}{1\ldots n} + \frac{\overset{n-1}{A}_n}{1..(n+1)} + \frac{\overset{n-1}{A}_{n+1}}{1..(n+2)} + \ldots$$

nach obiger Relation. Folglich

$$\int X\,\partial x = ZX\left\{1 - U' + U'' - U''' + U'''' - \ldots\right\}$$

32. Die Verwandlung der Reihen in Kettenbrüche, und die Auflösung einiger Reihen in Producte mit unendlich vielen Factoren s. m. in den Artt. Kettenbruch. (39.), Cyklometrie (26.), und Product. Die Transformation der Reihen mittelst der fonctions génératrices muß den Zusätzen zu diesem Werke aufbehalten bleiben. Mehr Belehrung, als hier der Kürze wegen gegeben werden konnte, suche man in den Euler'schen Werken, der oben (7.) angeführten wichtigen Schrift von Stirling, der

Umgekehrte Methode der B

(inversa methodus tangentium; ſ. die
im Allgemeinen einerlei mit der Integratio
tialgleichungen des erſten Grades zwiſchen z
chen Größen. So wie nämlich mittelſt de
rechnung aus der Gleichung einer Curve l
für die Subtangente, Normale und Subno
tet werden; ſo kann man auch umgekehrt
chung einer Curve fragen, deren Subtange
oder Subnormale eine gegebene Function
oder überhaupt eine gegebene Eigenſchaft
(Berührende Linie. 13.40.) die Subtangent

Subnormale $= \frac{y\partial y}{\partial x}$, die Normale $=$
iſt; ſo iſt klar, daß jedes ſolches Problem
gration einer Differentialgleichung des erſte
ſchen zwei Veränderlichen führen muß. Die
dieſer Art, welche überhaupt aufgelöſet wo
die Beauniſche (ſ. dieſen Art.). Zuweile
griff auch noch erweitert (ſchon von Joh.
Opp. T. III. p. 414.), und man verſteht

Proportionale zwischen einer gegebenen Größe a und der Subtangente, oder zwischen der Subtangente und der gegebenen Größe a weniger der Abscisse ist.

Für den ersten Fall ist:

$$a : y = y : \frac{y\partial x}{\partial y},\quad \frac{a\partial x}{\partial y} = y;$$

$$a\partial x = y\partial y,\quad ax = \tfrac{1}{2}y^2 + \text{const};$$

$$y^2 = 2ax - \text{const} = 2a(x - \alpha) = 2ax',$$

wenn wir die Constante $= 2a\alpha$ und $x - \alpha = x'$ setzen. Die gesuchte Curve ist also die apollonische Parabel. Die Constante muß noch durch eine willkührliche Bedingung bestimmt werden.

Für den zweiten Fall ist:

$$a - x : y = y : \frac{y\partial x}{\partial y},\quad y\partial y = (a - x)\partial x;$$

$$ax - \tfrac{1}{2}x^2 = \tfrac{1}{2}y^2 + \text{const},\quad 2ax - x^2 = y^2 + \text{const}.$$

Setzt man nun $x' - \alpha = x$, $y' = y$; so wird die Gleichung:

$$2a(x' - \alpha) - (x' - \alpha)^2 = y'^2 + \text{const},$$

$$2(a + \alpha)x' - x'^2 - \alpha(2a + \alpha) = y'^2 + \text{const},$$

wo man α offenbar immer so bestimmen kann, daß

$$-\alpha(2a + \alpha) = \text{const}.$$

Dann wird die Gleichung:

$$2(a + \alpha)x' - x'^2 = y'^2,$$

und die Curve ist also ein Kreis, dessen Halbmesser $= a + \alpha$. Zur Bestimmung der Constante muß noch eine willkührliche Bedingung gegeben seyn.

2. Eine Curve zu finden, bei welcher das Quadrat der Ordinate die mittlere Proportionale zwischen einem gegebenen Quadrate a^2 und der Area der Curve ist.

Dies giebt die Proportion:

$$a^2 : y^2 = y^2 : \int y\partial x \qquad \text{(Quadratur. 8.)}$$

Also $a^2\int y\partial x = y^4$, $a^2 y\partial x = 4y^3\partial y$, $a^2\partial x = 4y^2\partial y$, $a^2x = \frac{4}{3}y^3 + \text{const}$; $y^3 = \frac{3}{4}a^2x - \text{const} = \frac{3}{4}a^2(x - \alpha) = \frac{3}{4}a^2x'$. Die Curve ist folglich eine Parabola cubicalis prima, wie man sie mit Joh. Bernoulli (Opp. T. III. p. 415.) nennen kann, da die

chen Abſciſſe gleich iſt.

$$\frac{y\partial x}{\partial y} = nx, \quad \frac{\partial x}{x} = \frac{n\partial y}{y},$$

$\log x = n \log y + \text{const}$, $n \log y = \log x$ für const $= -\log \alpha$. Alſo $y^n =$ ſuchte Curve folglich eine Parabel der n rabeln höherer Art.). Für $n = 2$ erh niſche Parabel (Parabel. 13.).

5. Die Curve zu finden, deren St dratwurzel der Abſciſſe proportional iſt.

$$\frac{y\partial y}{\partial x} = a\sqrt{x}, \quad y\partial y = ax^{\frac{1}{2}}\partial x; \quad \tfrac{1}{2}y^2 = \tfrac{2}{3}$$

6. Eine Curve von ſolcher Beſch daß alle von einem gegebenen Punkte a den gefällten Perpendikel einer gegebene n gleich ſind.

Man nehme den gegebenen Punkt ordinaten an. Bezeichnen x, y die ſuchten Curve; ſo iſt, wie aus (Linie rührende Linie. 14.) leicht geſchloſſen

$$u - y = \frac{\partial y}{\partial x}(z - x)$$

(Linie, gerade. 17.). Die Coordinaten der Durchschnittspunkte beider Linien sind:

$$\alpha = \frac{(x\partial y - y\partial x)\partial y}{\partial x^2 + \partial y^2}, \beta = -\frac{(x\partial y - y\partial x)\partial x}{\partial x^2 + \partial y^2},$$

(Linie, gerade. 18.), und die Länge des Perpendikels ist

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = n.$$

Setzt man nun für α, β die obigen Werthe; so erhält man als Differentialgleichung der gesuchten Curve:

$$x\partial y - y\partial x = n\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}.$$

Setzt man $\frac{\partial y}{\partial x} = p$, und differentiirt von Neuem; so wird

$$y = px - n\sqrt{1 + p^2},$$

$$\partial y = p\partial x + x\partial p - \frac{np\partial p}{\sqrt{1 + p^2}},$$

oder, da $\partial y = p\partial x$ ist:

$$x\partial p - \frac{np\partial p}{\sqrt{1 + p^2}} = \left\{x - \frac{np}{\sqrt{1 + p^2}}\right\}\partial p = 0;$$

so daß also unsere Differentialgleichung erfüllt wird, sowohl für $\partial p = 0$, als auch für

$$x - \frac{np}{\sqrt{1 + p^2}} = 0.$$

Die erste Gleichung giebt $p = \text{const} = c$, und folglich die gesuchte Gleichung nach dem Obigen:

$$y = cx - n\sqrt{1 + c^2},$$

für jedes c, die Gleichung einer geraden Linie. Zu näherer Bestimmung derselben setze man ihren Neigungswinkel gegen die Abscissenaxe $= \alpha$, das von dem Anfang der Coordinaten auf sie gefällte Perpendikel $= q$. Für $x = 0$ ist $y = -n\sqrt{1+c^2}$, und es erhellet leicht, daß $q = -n\sqrt{1+c^2}.\cos\alpha$. Aber $c = \text{tang}\,\alpha$ (Linie, gerade. 13.), $1 + c^2 = \sec\alpha^2 = \frac{1}{\cos\alpha^2}$, $\sqrt{1+c^2} = \pm\frac{1}{\cos\alpha}$, $q = \mp n$, so daß also jede gerade Linie, deren Entfernung von dem gegebenen Punkte $= n$ ist, der Aufgabe Genüge leistet, wie sich auch von selbst versteht.

Die zweite Gleichung:

der gegebene Punkt, und deſſen Halbme
ſer Kreis leiſtet alſo, wie ſich auch von ſel
falls der Aufgabe Genüge. In der Gle
ſes kommt keine willkührliche Conſtante v
ſtern Gleichung. Man nennt eine ſold
partikuläre oder ſinguläre Auflöſ
tialgleichung. Eine weitere Auseinander
Gegenſtand gehört aber nicht in dieſen
den Zuſätzen zu dieſem Werke aufbehalt

Man wird aus den wenigen hier beh
deren Anzahl ſich leicht vermehren ließe,
die Schwierigkeit lediglich in der Integr
tialgleichung liegt, da die Bildung der
aus den Formeln der analytiſchen Geon
Vorzüglich die ältern Werke über In
reich an hierher gehörenden Beiſpielen.

Umkehrung der Reihen,

versio — serierum. Retour des s
meinſten Sinne die Bezeichnung des

Die Engländer nennen dies ebenfalls nicht unschicklich: methode of extracting the root of an infinite equation, eigentlich und richtiger: Auflösung der Gleichungen durch unendliche Reihen. Eine Umkehrung einer Reihe im eigentlichen Sinne bietet, streng genommen, nur der besondere Fall des obigen allgemeinen Problems dar, wo y durch eine Reihe nach Potenzen von x gegeben ist, und nun umgekehrt x in eine Reihe nach Potenzen von y entwickelt werden soll. Indem wir uns nach und nach zu der Auflösung der allgemeinen Aufgabe zu erheben suchen, werden wir zugleich das Historische mitnehmen.

I. Recurrirende Form.

1. Sey zunächst nur

$$y^{\beta} = ax^{\alpha} + bx^{\alpha+\delta} + cx^{\alpha+2\delta} + \ldots$$

gegeben; so ist nach dem polynomischen Lehrsatze, wenn wir Coefficienten, auf deren Größe es weiter nicht ankommt, durch (.) bezeichnen:

$$y = (.)x^{\frac{\alpha}{\beta}} + (.)x^{\frac{\alpha}{\beta}+\delta} + (.)x^{\frac{\alpha}{\beta}+2\delta} + \ldots$$

und es kommt nun — das ist eigentlich der Sinn unserer Aufgabe — darauf an, x durch eine Reihe nach Potenzen von y auszudrücken, welche, für x in obige Gleichung gesetzt, dieselbe für jedes y identisch $y = y$ macht. Zugleich soll dann diese Reihe auf die Potenz γ erhoben werden, damit man sogleich x^{γ} erhält.

2. Zur Bestimmung der Form der Reihe bedienen wir uns des polynomischen Lehrsatzes. Die Reihe für x durch y muß so beschaffen seyn, daß das erste Glied ihrer $\frac{\alpha}{\beta}$ten Potenz $= y$ ist, und die Coefficienten aller übrigen Glieder des aus ihrer Substitution für x in obige Gleichung hervorgehenden, völlig nach y entwickelten, Ausdrucks auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens verschwinden. Der Exponent des ersten Gliedes der Reihe sey $= \nu$; so ist nach dem polynomischen Lehrsatze der Ex-

$$x^{\frac{\alpha}{\beta}+2\delta} = (.)\,y^{1+\frac{2\beta\delta}{\alpha}}$$

$$x^{\frac{\alpha}{\beta}+3\delta} = (.)\,y^{1+\frac{3\beta\delta}{\alpha}}$$

&c. &c.

Denkt man ſich dies in die obige Gle
ſo wird man, alles gehörig geordnet
telbar darauf geführt, für x eine R
$\frac{\alpha}{\beta}$te Potenz die Form

$$(.)y^{1+\frac{\beta\delta}{\alpha}} + (.)y^{1+\frac{2\beta\delta}{\alpha}} + (.)y$$

hat. Dieſe Reihe iſt aber nach dem
ſatze keine andere, als

$$(.)y^{\frac{\beta}{\alpha}} + (.)y^{\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\beta\delta}{\alpha}} + (.)y$$

woraus ferner

$$x^{\gamma} = (.)y^{\frac{\gamma\beta}{\alpha}} + (.)y^{\frac{\beta(\gamma+\delta)}{\alpha}} + (.)$$

$$x^{\gamma} = Ay^{\frac{\beta\gamma}{\alpha}} + By^{\frac{\beta(\gamma+\delta)}{\alpha}} + Cy^{\frac{\beta(\gamma+2\delta)}{\alpha}} + \ldots$$

Nach dem polynomischen Lehrsatze erhält man mit Hülfe der Hindenburgischen Localzeichen (S. diesen Artikel) durch Entwickelung der Potenzen von y aus der Reihe für y^{β} (1.), und Substitution in x^{γ}:

$$x^{\gamma} = Ap\,{}^{\frac{\gamma}{\alpha}}\varkappa 1\, x^{\gamma} + Ap\,{}^{\frac{\gamma}{\alpha}}\varkappa 2 \left\{ x^{\gamma+\delta} + Ap\,{}^{\frac{\gamma}{\alpha}}\varkappa 3 \left\{ x^{\gamma+2\delta} + \ldots \right. \right. \\ + Bp\,{}^{\frac{\gamma+\delta}{\alpha}}\varkappa 1 \left. \left. + Bp\,{}^{\frac{\gamma+\delta}{\alpha}}\varkappa 2 \right\} \right. \\ \left. + Cp\,{}^{\frac{\gamma+2\delta}{\alpha}}\varkappa 1 \right\}$$

Damit nun diese Gleichung für jedes x gelte, müssen die Coefficienten A, B, C, D, ꝛc. so bestimmt werden, daß sie folgenden Gleichungen genügen:

$$1 = Ap\,{}^{\frac{\gamma}{\alpha}}\cdot\varkappa 1,$$

$$0 = Ap\,{}^{\frac{\gamma}{\alpha}}\cdot\varkappa 2 + Bp\,{}^{\frac{\gamma+\delta}{\alpha}}\cdot\varkappa 1,$$

$$0 = Ap\,{}^{\frac{\gamma}{\alpha}}\cdot\varkappa 3 + Bp\,{}^{\frac{\gamma+\delta}{\alpha}}\cdot\varkappa 2 + Cp\,{}^{\frac{\gamma+2\delta}{\alpha}}\cdot\varkappa 1;$$

ꝛc. ꝛc.

$$0 = Ap\,{}^{\frac{\gamma}{\alpha}}\cdot\varkappa(n+1) + Bp\,{}^{\frac{\gamma+\delta}{\alpha}}\cdot\varkappa n + \ldots + Mp\,{}^{\frac{\gamma+(n-1)\delta}{\alpha}}\cdot\varkappa 2 + Np\,{}^{\frac{\gamma+n\delta}{\alpha}}\cdot\varkappa 1,$$

wo N der Coefficient des (n+1)ten Gliedes ist. Daß diese recurrirende Bestimmung möglich, und die angenommene Form der Reihe für x oder x^{γ} also richtig ist, liegt klar vor Augen.

4. Sey jetzt allgemeiner

$$a_1 y^{\alpha_1} + b_1 y^{\alpha_1+\delta_1} + c_1 y^{\alpha_1+2\delta_1} + \ldots \\ = ax^{\alpha} + bx^{\alpha+\delta} + cx^{\alpha+2\delta} + \ldots$$

gegeben, und x^{γ} nach Potenzen von y zu entwickeln; so ist, wenn z eine, diesen beiden Reihen gleiche, Größe bezeichnet, nach (3.)

$$x^{\gamma} = A\,|\,q^{\frac{\gamma}{\alpha}}\,x1^{\frac{\gamma\alpha_1}{\alpha}}y + q^{\frac{\gamma}{\alpha}}\,x2^{\frac{\gamma\alpha_1}{\alpha}}y + \delta_1$$

$$\ldots + q^{\frac{\gamma}{\alpha}}\,x(m+1)^{\frac{\gamma\alpha_1}{\alpha}}y + 1$$

$$+ B\,|\,q^{\frac{\gamma+\delta}{\alpha}}\,x1^{\frac{(\gamma+\delta)\alpha_1}{\alpha}}y + q^{\frac{\gamma+\delta}{\alpha}}\,x2^{\frac{(\gamma+\delta)}{\alpha}}y$$

$$\ldots + q^{\frac{\gamma+\delta}{\alpha}}\,x(m+1)^{\frac{(\gamma+\delta)}{\alpha}}y$$

$$+ C\,|\,q^{\frac{\gamma+2\delta}{\alpha}}\,x1^{\frac{(\gamma+2\delta)\alpha_1}{\alpha}}y + q^{\frac{\gamma+2\delta}{\alpha}}\,x2^{\frac{(\gamma+2}{\alpha}}y$$

$$\ldots + q^{\frac{\gamma+2\delta}{\alpha}}\,x(m+1)^{\frac{(\gamma+2}{\alpha}}y$$

$$\&c. \qquad \&c.$$

$$+ N\,|\,q^{\frac{\gamma+n\delta}{\alpha}}\,x1^{\frac{(\gamma+n\delta)\alpha_1}{\alpha}}y + q^{\frac{\gamma+n\delta}{\alpha}}\,x2^{\frac{(\gamma+}{\alpha}}y$$

$$\ldots + q^{\frac{\gamma+n\delta}{\alpha}}\,x(m+1)^{\frac{(\gamma+}{\alpha}}y$$

$$\&c. \qquad \&c.$$

$$+ \{Aq^{\frac{\gamma}{\alpha}} \varkappa 3 + Bq^{\frac{\gamma+\delta}{\alpha}} \varkappa 2 + Cq^{\frac{\gamma+2\delta}{\alpha}} \varkappa 1\} y^{\gamma+2\delta} + \ldots$$

wo A, B, C, D, ꝛc. immer wie oben beſtimmt werden.

6. Für $\alpha = \gamma = \delta = 1$ giebt dies:

$$x = Aq \varkappa 1\, y + \{Aq \varkappa 2 + Bq^2 \varkappa 1\} y^2 + \{Aq \varkappa 3 + Bq^2 \varkappa 2 + Cq^3 \varkappa 1\} y^3 \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \{Aq \varkappa (n+1) + Bq^2 \varkappa n + \ldots + Nq^{n+1} \varkappa 1\} y^{n+1} + \ldots$$

wo A, B, C, D, ꝛc. durch folgende Gleichungen beſtimmt werden:

$$1 = Ap \varkappa 1,$$
$$0 = Ap \varkappa 2 + Bp^2 \varkappa 1,$$
$$0 = Ap \varkappa 3 + Bp^2 \varkappa 2 + Cp^3 \varkappa 1,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$0 = Ap \varkappa (n+1) + Bp^2 \varkappa n + \ldots + Np^{n+1} \varkappa 1,$$
ꝛc. ꝛc.

7. Die bisherige Behandlung verdankt man vorzüglich Hindenburg und ſeinen Schülern, beſonders Eſchenbach und Rothe, worüber nachher ein Mehreres. Eine andere Regel für den letztern Fall giebt Moivre (Phil. Transact. Vol. XX. 1698. p. 190.), der ſich zuerſt in größerer Allgemeinheit mit der Umkehrung der Reihen beſchäftigt hat, obgleich der einfachſte Fall, wo $y = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \ldots$, ſchon von Newton (Epist. ad Oldenburg. posterior cum Leibnitio communicanda. Leibn. Opp. T. III. p. 75.) unterſucht worden iſt.

Wenn

$$a_1 y + b_1 y^2 + c_1 y^3 + d_1 y^4 + \ldots = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \ldots$$

iſt; ſo ſetze man, der Form in (1.) gemäß

$$x = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 \ldots$$

wo die punktirten Coefficienten coefficientes ficti s. assumti bedeuten. Bezeichnen wir nun die nte Combinationsklaſſe zur Summe m, wenn man jede Combination mit ihrer Permutationszahl multiplicirt, durch $[n]^m_u C$; ſo iſt nach dem polynomiſchen Lehrſatze, wie ſich leicht aus dieſem Artikel. (8.) ergeben wird:

$$a_1 y + b_1 y^2 + c_1 y^3 + d_1$$

$$= aAy + \left\{aB + b[2]\overset{2}{C}_2\right\} y^2$$

$$+ \left\{aC + b[2]\overset{3}{C}_2 + c[3]\overset{3}{C}_3\right.$$

$$+ \left\{aD + b[2]\overset{4}{C}_2 + c[3]\overset{4}{C}_3\right.$$

$$a_1 = a[1]\overset{1}{C}_1,$$

$$b_1 = a[1]\overset{2}{C}_1 + b[2]\overset{2}{C}_2,$$

$$c_1 = a[1]\overset{3}{C}_1 + b[2]\overset{3}{C}_2 + c[3]$$

$$d_1 = a[1]\overset{4}{C}_1 + b[2]\overset{4}{C}_2 + c[3]$$

&c. &c.

woraus die Coefficienten beſtimmt w

$$x = \frac{a_1}{a}y + \frac{b_1 - b[2]\overset{2}{C}}{a} {}^{2}y^2 + \frac{c_1 -}{}$$

$$+ \frac{d_1 - b[2]\overset{4}{C}_2 - c[3]\overset{4}{C}}{a}$$

$$= \frac{a_1}{a}y + \frac{b_1 - bA^2}{a}y^2 + \frac{c_1 - 2}{}$$

iel angegeben, welche wegen ihres einfachen Gesetzes merk-
ürdig, wegen der vielen Substitutionen aber zur Rech-
ung selbst unbequem ist. Für den Fall

$$y = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \ldots$$

at der Italiäner Philipp Rubbiani die umgekehrte
eihe bis zum neunten Gliede wirklich entwickelt. Das
esultat theilt, seine Richtigkeit versichernd, Cagnoli
n Traité de Trigon. Paris. 1808. p. 46., als bei
raktischen Rechnungen zuweilen brauchbar, mit.

II. Independente Form.

9. Setzen wir jetzt

$$p = ax^{\alpha} + \overset{1}{a}x^{\alpha+\delta} + \overset{2}{a}x^{\alpha+2\delta} + \ldots,$$

nd bezeichnen die Coefficienten von p^m durch A, $\overset{1}{A}$, $\overset{2}{A}$, ꝛc.;
o folgt aus der dritten Form des polynomischen Lehrsatzes,
aß allgemein

$$\begin{aligned} \overset{n}{naA} &= (m-n+1)\overset{1}{a}\overset{n-1}{A} + (2m-n+2)\overset{2}{a}\overset{n-2}{A} \\ &\quad + (3m-n+3)\overset{3}{a}\overset{n-3}{A} + \ldots + [(n-1)m-1]\overset{n-1}{a}\overset{1}{A} + n\overset{n}{maA} \\ &= (m+1)\{\overset{1}{a}\overset{n-1}{A} + \overset{2}{2a}\overset{n-2}{A} + \ldots + (n-1)\overset{n-1}{a}\overset{1}{A} + \overset{n}{naA}\} \\ &\quad - n\{\overset{1}{a}\overset{n-1}{A} + \overset{2}{a}\overset{n-2}{A} + \ldots + \overset{n-1}{a}\overset{1}{A} + \overset{n}{aA}\}, \end{aligned}$$

der in Localzeichen:

$$\begin{aligned} \overset{n}{nap^m{}_x}(n+1) &= (m+1)\{\overset{1}{a}p^m{}_x n + \overset{2}{2a}p^m{}_x(n-1) + \ldots \\ &\quad \ldots + (n-1)\overset{n-1}{a}p^m{}_x 2 + \overset{n}{nap^m{}_x 1}\} \\ &\quad - n\{\overset{1}{a}p^m{}_x n + \overset{2}{a}p^m{}_x(n-1) + \ldots + \overset{n-1}{a}p^m{}_x 2 + \overset{n}{ap^m{}_x 1}\} \end{aligned}$$

Nach dem polynomischen Lehrsatze ist aber:

$$p^m = p^m{}_x 1\, x^{m\alpha} + p^m{}_x 2\, x^{m\alpha+\delta} + p^m{}_x 3\, x^{m\alpha+2\delta} + \ldots$$

Dies, mit p multiplicirt, giebt leicht folgende Relation:

$$\begin{aligned} p^{m+1}{}_x(n+1) &= ap^m{}_x(n+1) + \overset{1}{a}p^m{}_x n + \overset{2}{a}p^m{}_x(n-1) + \ldots \\ &\quad \ldots + \overset{n-1}{a}p^m{}_x 2 + \overset{n}{a}p^m{}_x 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p^{m+1}{}_x(n+1) - ap^m{}_x(n+1) &= \overset{1}{a}p^m{}_x n + \overset{2}{a}p^m{}_x(n-1) + \overset{3}{a}p^m{}_x(n-2) + \ldots \\ &\quad \ldots + \overset{n-1}{a}p^m{}_x 2 + \overset{n}{a}p^m{}_x 1. \end{aligned}$$

$$ap^m \varkappa(n+1) + \overset{1}{2}ap^m \varkappa n + \overset{2}{3}ap^m \varkappa(n-$$
$$\ldots + \overset{n-1}{n}\,a\,p^m \varkappa 2 + (n+1)\,\overset{n}{a}\,p^m$$

10. Aus dem Vorhergehenden folgt α und δ:

$$\alpha p^{m+1} \varkappa(n+1) = \alpha ap^m \varkappa(n+1) + \alpha \overset{1}{a} p^m \varkappa n$$
$$\ldots + \alpha \overset{n-1}{a}\, p^m$$

$$\frac{n\delta}{m+1} p^{m+1} \varkappa(n+1) =$$
$$\delta \overset{1}{a} p^m \varkappa n + 2\delta \overset{2}{a} p^m \varkappa(n-1) + \ldots + (n-1)\delta \overset{n-1}{a}\, p^m$$
$$\frac{\alpha(m+1)+n\delta}{m+1} p^{m+1} \varkappa(n+1) = \alpha ap^m \varkappa(n+1) + (\alpha -$$
$$+ (\alpha + 2\delta) \overset{2}{a} p^m \varkappa(n-1) \ldots + (\alpha + (n-1)\delta) \overset{n-1}{a}\, p^m \varkappa 2$$

11. Hierin ſetze man für p irgend eine daß alſo ſtatt p^m die Potenz p^{mf} geſetzt wer hält man, wenn zugleich $p^f \varkappa 1, p^f \varkappa 2, \ldots$ für a,

$$\frac{\alpha(m+1)+n\delta}{m+1} p^{(m+1)f} \varkappa(n+1) = \alpha p^f \varkappa 1 . p^f$$
$$+ (\alpha+\delta) p^f \varkappa 2 . p^{fm} \varkappa n + (\alpha + 2\delta) p^f \varkappa 3 .$$
$$+ (\alpha + (n-1)\delta) p^f \varkappa n . p^{fm} \varkappa 2 + (\alpha + n\delta) p^f$$

$$y^{\beta} = ax^{\alpha} + bx^{\alpha+\delta} + cx^{\alpha+2\delta} + \ldots = p,$$

$$x^{\gamma} = Ay^{\frac{\gamma\beta}{\alpha}} + By^{\frac{\beta(\gamma+\delta)}{\alpha}} + Cy^{\frac{\beta(\gamma+2\delta)}{\alpha}} + \ldots = q;$$

ist nach dem polynomischen Lehrsatze:

$$y^{\frac{\beta\gamma}{\alpha}} = p^{\frac{\gamma}{\alpha}} \cdot x1 \cdot x^{\gamma} + p^{\frac{\gamma}{\alpha}} \cdot x2 \cdot x^{\gamma+\delta} + p^{\frac{\gamma}{\alpha}} \cdot x3 \cdot x^{\gamma+2\delta} + \ldots,$$

a nun ferner $x^{\gamma} = q$ ist; so ist

$$x = q^{\frac{1}{\gamma}}, \quad x^{\gamma+\delta} = q^{\frac{\gamma+\delta}{\gamma}}, \quad x^{\gamma+2\delta} = q^{\frac{\gamma+2\delta}{\gamma}}, \text{ ꝛc.}$$

ntwickelt man also diese Potenzen von x, indem man in r Reihe für x^{γ} nach und nach $\gamma+\delta$, $\gamma+2\delta$, $\gamma+3\delta$, für γ setzt, substituirt die erhaltenen Ausdrücke in die ntwickelung von $y^{\frac{\beta\gamma}{\alpha}}$, und setzt dann die Coefficienten icher Potenzen von y auf beiden Seiten einander gleich; erhält man folgende Gleichungen;

$$0 = Ap^{\frac{\gamma}{\alpha}} \cdot x1 - 1,$$

$$0 = Bp^{\frac{\gamma}{\alpha}} \cdot x1 + q^{\frac{\gamma+\delta}{\gamma}} \cdot x1 \cdot p^{\frac{\gamma}{\alpha}} \cdot x2,$$

$$0 = Cp^{\frac{\gamma}{\alpha}} x1 + q^{\frac{\gamma+\delta}{\gamma}} \cdot x2 \cdot p^{\frac{\gamma}{\alpha}} \cdot x2 + q^{\frac{\gamma+2\delta}{\gamma}} \cdot x1 \cdot p^{\frac{\gamma}{\alpha}} x3$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$0 = Np^{\frac{\gamma}{\alpha}} x1 + q^{\frac{\gamma+\delta}{\gamma}} \cdot xn \cdot p^{\frac{\gamma}{\alpha}} x2 + q^{\frac{\gamma+2\delta}{\gamma}} \cdot x(n-1) \cdot p^{\frac{\gamma}{\alpha}} x3 + \ldots$$

$$\ldots + q^{\frac{\gamma+n\delta}{\gamma}} \cdot x1 \cdot p^{\frac{\gamma}{\alpha}} x(n+1).$$

ieraus lassen sich nun A, B, C, ꝛc. auf folgende Art bestimmen.

13. Aus der ersten Gleichung folgt:

$$A = \frac{1}{p^{\frac{\gamma}{\alpha}} x1}$$

$$q^{\frac{\gamma+\delta}{\gamma}} x1 = x^{\gamma+\delta} x1 = \frac{\gamma+\delta}{\gamma+\delta} p$$

Alſo nach der zweiten Gleichung in (1

$$o = Bp^{\frac{\gamma}{\alpha}} x1 + \frac{\gamma+\delta}{\gamma+\delta} p^{-\frac{\gamma+\delta}{\alpha}} x1 . p$$

Nach (11.) iſt aber, wenn man γ für $-\frac{\gamma+\delta}{\alpha}$ für g ſetzt, indem man noch zu $\gamma + \delta$ dividirt:

$$o = \frac{\gamma}{\gamma+\delta} p^{-\frac{\gamma+\delta}{\alpha}} \quad x2 . p \quad x1 + \frac{\gamma+\delta}{\gamma+\delta} p^{\frac{\gamma}{\alpha}}$$

woraus, verglichen mit der vorhergeh mittelbar folgt:

$$B = \frac{\gamma}{\gamma+\delta} p^{-\frac{\gamma+\delta}{\alpha}} x2 = q x2 = x^{\gamma} x2$$

15. Folglich, wenn man hier γ $\nu + 2\delta$ für ν ſetzt.

$$o = Cp^{\frac{\gamma}{\alpha}} \times 1 + \frac{\gamma+\delta}{\gamma+2\delta} p^{-\frac{\gamma+2\delta}{\alpha}} \times 2 . p^{\frac{\gamma}{\alpha}} \times 2$$
$$+ \frac{\gamma+2\delta}{\gamma+2\delta} p^{-\frac{\gamma+2\delta}{\alpha}} \times 1 . p^{\frac{\gamma}{\alpha}} \times 3.$$

Mittelst ähnlicher Verwandlungen wie vorher aber, nur daß jetzt $-\frac{\gamma+2\delta}{\alpha}$, für g gesetzt wird, nach (11.)

$$o = \frac{\gamma}{\gamma+2\delta} p^{-\frac{\gamma+2\delta}{\alpha}} \times 3 . p^{\frac{\gamma}{\alpha}} \times 1 + \frac{\gamma+\delta}{\gamma+2\delta} p^{-\frac{\gamma+2\delta}{\alpha}} \times 2 : p^{\frac{\gamma}{\alpha}} \times 2$$
$$+ \frac{\gamma+2\delta}{\gamma+2\delta} p^{-\frac{\gamma+2\delta}{\alpha}} \times 1 . p^{\frac{\gamma}{\alpha}} \times 3,$$

woraus, mit der ersten Gleichung verglichen, sogleich:

$$C = \frac{\gamma}{\gamma+2\delta} p^{-\frac{\gamma+2\delta}{\alpha}} \times 3 = q \times 3 = x^{\gamma} \times 3.$$

16. Das Gesetz, und wie man weiter gehen kann, erhellet nun schon. Es ist nämlich

$$N = \frac{\gamma}{\gamma+n\delta} p^{-\frac{\gamma+n\delta}{\alpha}} \times (n+1) = q \times (n+1) = x^{\gamma} \times (n+1).$$

Dies Gesetz allgemein zu beweisen, nehmen wir an, es gelte bis $M = q \times n$; so erhalten wir, auf ähnliche Art wie vorher, wenn wir in den Ausdrücken der einzelnen Coefficienten vom nten bis zum 1ten nach und nach $\gamma+\delta$, $\gamma+2\delta$, $\gamma+3\delta$, ... $\gamma+n\delta$ für γ setzen, und die erhaltenen Ausdrücke in die allgemeine Gleichung (12.) für N substituiren:

$$o = Np^{\frac{\gamma}{\alpha}} \times 1 + \frac{\gamma+\delta}{\gamma+n\delta} p^{-\frac{\gamma+n\delta}{\alpha}} \times n . p^{\frac{\gamma}{\alpha}} \times 2$$
$$+ \frac{\gamma+2\delta}{\gamma+n\delta} p^{-\frac{\gamma+n\delta}{\alpha}} \times (n-1) . p^{\frac{\gamma}{\alpha}} \times 3$$
$$+ \frac{\gamma+3\delta}{\gamma+n\delta} p^{-\frac{\gamma+n\delta}{\alpha}} \times (n-2) . p^{\frac{\gamma}{\alpha}} \times 4$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \frac{\gamma+n\delta}{\gamma+n\delta} p^{-\frac{\gamma+n\delta}{\alpha}} \times 1 . p^{\frac{\gamma}{\alpha}} \times (n+1).$$

$$+\frac{\gamma+2\delta}{\gamma+n\delta}p^{\frac{\alpha}{\alpha}}x(n\cdot$$

$$+\frac{\gamma+3\delta}{\gamma+n\delta}p^{-\frac{\gamma+n\delta}{\alpha}}x(n$$

. . . . . .

$$+\frac{\gamma+n\delta}{\gamma+n\delta}p^{-\frac{\gamma+n\delta}{\alpha}}x1\cdot p$$

Folglich, wenn man beide Gleichu
gleicht, offenbar:

$$N=\frac{\gamma}{\gamma+n\delta}p^{-\frac{\gamma+n\delta}{\alpha}}x(n+$$

ſo daß alſo das bemerkte Geſetz für
es bis qkn gilt, und demnach allge

Unmittelbar hieraus, und aus
x^{γ}, ergiebt ſich auch:

$$q^{\gamma}(n+1)=\frac{\gamma}{\gamma+n\delta}p^{-\frac{\gamma+n\delta}{\alpha}}\cdot k$$

worin folgender höchſt merkwürdige

Das $(n+1)$te Glied der Reih

lieder der umgekehrten Reihe mittelst des polynomi-
'ehrsatzes jederzeit möglich.

'. Der Erfinder dieses merkwürdigen Satzes ist H.
othe, welcher ihn in der Schrift: Formulae de
um reversione demonstratio universalis signis
bus combinatorio-analyticorum vicariis exhi-
Lips. 1793. p. 11., die in dieser Lehre als classisch
)en ist, vorgetragen hat. Es sind darin zwei Be-
;egeben, wovon jedoch der erste die Differentialrech-
)orausetzt. Der hier gegebene Beweis wird einiges
hümliche haben.

. Schon vor Rothe hat indeß H. C. W. Eschen-
eine independente Entwickelung der Umkehrungs-
efunden, und, jedoch ohne Beweis, in der Schrift:
rierum reversione formulis analytico-combi-
is exhibita. Lips. 1789. vorgetragen. Seine
l folgt unmittelbar aus dem Rothe'schen Satze.
)nen wir nämlich $\frac{\gamma+n\delta}{\alpha}$ durch ${}^{n}\mu$, den mten Bino-
Coefficienten der nten Potenz durch (n_m), oder,
n mehrtheilig ist, auch blos durch $(n)_m$, und die
mten Combinationen wie oben (7.); so ist nach dem
omialtheorem (Thl. III. S. 834. 835.):

$$p^{-{}^{n}\mu}k(n+1) =$$

$$a^{-{}^{n}\mu}\cdot\left\{\frac{(-{}^{n}\mu_1)[1]\overset{n}{C}_1}{a} + \frac{(-{}^{n}\mu_2)[2]\overset{n}{C}_2}{a^2} + \frac{(-{}^{n}\mu_3)[3]\overset{n}{C}_3}{a^3} + \ldots + \frac{(-{}^{n}\mu_n)[n]\overset{n}{C}_n}{a^n}\right\}$$

n Zeiger

$$\begin{pmatrix} b, & c, & d, & e, & f, & \ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \ldots \end{pmatrix}.$$

)aupt aber ist:

$$(-\,n_m) = \frac{(-n)(-n-1)..(-n-m+1)}{1.2.3...m}$$

$$= \pm\frac{(n+m-1)(n+m-2)..(n+1)}{1.2.3..(m-1)}\cdot\frac{n}{m}$$

$$= \pm(n+m-1)_{m-1}\cdot\frac{n}{m}$$

$\mp$ —

Aber (16.)

$$q^r(n+1) = \frac{\gamma}{\gamma+n\delta} p^{-{}^n\mu}{}_x(n+$$

Folglich, da für jedes n:

$${}^n\mu \cdot \frac{\gamma}{\gamma+n\delta} = \frac{\gamma+n\delta}{\alpha} \cdot \frac{\gamma}{\gamma+n\delta} =$$

iſt:

$$q^r(n+1) =$$

$$-{}^o\mu \left(\frac{y^\beta}{a}\right)^{{}^n\mu} \cdot \left\{ \frac{[1]^n_1 C}{a} - \frac{({}^n\mu+1)_1 \cdot [2]}{2a^2} \right.$$

. . . . . .

$$\mp \text{ —} \quad ({}^n\mu \cdot$$

welches die Eſchenbachiſche Form

19. Eſchenbach fand alſo zu Entwickelung der Umkehrungsreihe. mochte er nicht allgemein zu führen. ſelben, und kam dabei zugleich auf di Verbindung der Umkehrungsreihe m theorem. Die Formel des erſtern combinatoriſch - analytiſche Formel

ionem formulis localibus et combinatorio-analyti-is absolvendam paralipomenon. Lips. 1793. p. VIII. agt.

20. Sey, um ein Beiſpiel zu geben,

$$y = ax^{\alpha} + bx^{\alpha+\delta} = p;$$

) giebt der binomiſche Lehrſatz:

$$p^{-\frac{\gamma+n\delta}{\alpha}} k(n+1) =$$

$$\pm \frac{(\gamma+n\delta)(\gamma+n\delta+\alpha)\ldots(\gamma+n\delta+(n-1)\alpha)}{\alpha.2\alpha.3\alpha\ldots n\alpha} a^{-\frac{\gamma+n\delta+\alpha}{\alpha}} b^{n}$$

$\pm$ wenn n $\left\{\begin{matrix}\text{gerade}\\ \text{ungerade}\end{matrix}\right\}$ iſt.

olglich mittelſt der Localformel nach einigen leichten Reuctionen:

$$x^{\gamma} = a^{-\frac{\gamma}{\alpha}} y^{\frac{\gamma}{\alpha}} \left\{ 1 - \frac{\gamma}{\alpha} a^{-\frac{\alpha+\delta}{\alpha}} b y^{\frac{\delta}{\alpha}} + \frac{\gamma(\gamma+2\delta+\alpha)}{\alpha.2\alpha} a^{-\frac{2(\alpha+\delta)}{\alpha}} b^{2} y^{\frac{2\delta}{\alpha}} - \frac{\gamma(\gamma+3\delta+\alpha)(\gamma+3\delta+2\alpha)}{\alpha.2\alpha.3\alpha} a^{-\frac{3(\alpha+\delta)}{\alpha}} b^{3} y^{\frac{3\delta}{\alpha}} + \ldots\ldots\ldots \right\}$$

21. Hat man nun die Gleichung

$$1 = \frac{A}{x^{\lambda}} + \frac{B}{x^{\mu}}, \quad \frac{1}{A} = x^{-\lambda} + \frac{B}{A} x^{-\mu};$$

) ergiebt ſich, verglichen mit obiger allgemeinen Gleichung, ir $y = \frac{1}{A}$, $a = 1$, $b = \frac{B}{A}$, $\alpha = -\lambda$, $\alpha+\delta = -\mu$, $\delta = -\alpha-\mu = \lambda-\mu$, leicht:

$$x^{\gamma} = A^{\frac{\gamma}{\lambda}} + \frac{\gamma}{\lambda} A^{\frac{\gamma-\mu}{\lambda}} B + \frac{\gamma(\gamma+\lambda-2\mu)}{\lambda.2\lambda} A^{\frac{\gamma-2\mu}{\lambda}} B^{2} + \frac{\gamma(\gamma+2\lambda-3\mu)(\gamma+\lambda-3\mu)}{\lambda.2\lambda.3\lambda} A^{\frac{\gamma-3\mu}{\lambda}} B^{3} + \ldots$$

oraus für $\gamma = 1$ leicht eine Wurzel der Gleichung

$y = 1$; so giebt die Cyclometrie:

$$x = y - [1]\overset{1}{C}_1 y^3$$

$$- \left\{ [1]\overset{2}{C}_1 - \tfrac{1}{2}(6_1)\,[2]\overset{2}{C}_2 \right\} y^5$$

$$- \left\{ [1]\overset{3}{C}_1 - \tfrac{1}{2}(8_1)[2]\overset{3}{C}_2 + \tfrac{1}{3}(\right.$$

. . . . . .

$$- \left\{ [1]\overset{n}{C}_1 - \tfrac{1}{2}(2n+2)_1 \cdot [2]\overset{n}{C}_2 + \right.$$

$$- \ldots \mp \frac{1}{n}(3n)_{n-1} \cdot [n]\overset{1}{C}$$

$$- \ldots\ldots\ldots\ldots$$

für den Zeiger:

$$\left(-\tfrac{1}{1}, +\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{3}, +\tfrac{1}{4},\right.$$

Aber, wenn $\overset{1}{\mathfrak{B}}$, $\overset{2}{\mathfrak{B}}$, $\overset{3}{\mathfrak{B}}$, ꝛc. die Ber deuten, (Cyclometrie. 17.):

$$x = \operatorname{tang} y = \frac{4(4-1)\overset{1}{\mathfrak{B}}}{1.2} y + \frac{4}{}$$

$$+ \ldots + \frac{4^{n+1}(4^{n+1} - 1}{1 \ldots (2n+2}$$

Folglich $\overset{n+1}{\mathfrak{B}} =$

ner Mathematischen Abhandlungen. Altona. 1822. gegeben.

23. Sey nun wieder folgende Gleichung gegeben:

$$a_1 y^{\alpha_1} + b_1 y^{\alpha_1+\delta_1} + c_1 y^{\alpha_1+2\delta_1} + \ldots$$
$$= ax^{\alpha} + bx^{\alpha+\delta} + cx^{\alpha+2\delta} + \ldots$$

Die erste Reihe werde durch q, die zweite durch p bezeichnet, und z sey eine, beiden Reihen gleiche Größe. Man soll x^{γ} nach Potenzen von y entwickeln. Nach der Localformel ist

$$x^{\gamma} = \frac{\gamma}{\gamma} p^{-\frac{\gamma}{\alpha}} \times 1 z^{\frac{\gamma}{\alpha}} + \frac{\gamma}{\gamma+\delta} p^{\frac{\gamma+\delta}{\alpha}} \times 2 z^{\frac{\gamma+\delta}{\alpha}}$$
$$+ \frac{\gamma}{\gamma+2\delta} p^{-\frac{\gamma+2\delta}{\alpha}} \times 3 z^{\frac{\gamma+2\delta}{\alpha}}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \frac{\gamma}{\gamma+n\delta} p^{-\frac{\gamma+n\delta}{\alpha}} \times (n+1) z^{\frac{\gamma+n\delta}{\alpha}}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

und nach dem Polynomialtheorem

$$z^{\frac{\gamma+n\delta}{\alpha}} = q^{\frac{\gamma+n\delta}{\alpha}} \times 1 y^{\frac{\gamma+n\delta}{\alpha}\alpha_1}$$
$$+ q^{\frac{\gamma+n\delta}{\alpha}} \times 2 y^{\frac{\gamma+n\delta}{\alpha}\alpha_1 + \delta_1}$$
$$+ q^{\frac{\gamma+n\delta}{\alpha}} \times 3 y^{\frac{\gamma+n\delta}{\alpha}\alpha_1 + 2\delta_1}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ q^{\frac{\gamma+n\delta}{\alpha}} \times (m+1) y^{\frac{\gamma+n\delta}{\alpha}\alpha_1 + m\delta_1}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Dies, in die vorige Reihe substituirt, giebt:

$$x^{\gamma} = \frac{\gamma}{\gamma} p^{-\frac{\gamma}{\alpha}} \times 1 \left\{ q^{\frac{\gamma}{\alpha}} \times 1 y^{\frac{\gamma}{\alpha}\alpha_1} + q^{\frac{\gamma}{\alpha}} \times 2 y^{\frac{\gamma}{\alpha}\alpha_1 + \delta_1} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + q^{\frac{\gamma}{\alpha}} \times (m+1) y^{\frac{\gamma}{\alpha}\alpha_1 + m\delta_1} + \ldots\ldots \right\}$$

$$+ q \qquad \varkappa 2y$$

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{\gamma + n\delta}{\alpha}$$

$$+ q \qquad \varkappa(m+$$

$$\cdots\cdots$$

$$\text{ꝛc.} \qquad \text{ꝛc.}$$

Diese Reihe giebt Hindenburg i
angeführten ad serierum reversio
p. III., dem Wesentlichen nach ebe
dung des Zeichens $^n\mu$ (18.).

24. Folglich für $\alpha = \alpha_1$, δ

$$x^\gamma = \frac{\gamma}{\gamma} p^{-\frac{\gamma}{\alpha}} \varkappa 1 \,.\, q^{\frac{\gamma}{\alpha}} \varkappa 1\, y^\gamma$$

$$+ \frac{\gamma}{\gamma} p^{-\frac{\gamma}{\alpha}} \varkappa 1 \,.\, q^{\frac{\gamma}{\alpha}} \varkappa 2$$

$$+ \frac{\gamma}{\gamma+\delta} p^{-\frac{\gamma+\delta}{\alpha}} \varkappa 2 \,.\, q^{\frac{\gamma}{}}$$

$$+ \frac{\gamma}{\gamma} p^{-\frac{\gamma}{\alpha}} \varkappa 1 \,.\, q^{\frac{\gamma}{\alpha}} \varkappa 3$$

$$x^\gamma = \frac{\gamma}{\gamma} p^{-\frac{\gamma}{\alpha}} x1 \cdot q^{\frac{\gamma}{\alpha}} x1 . y^\gamma$$
$$+ \frac{\gamma}{\gamma} p^{-\frac{\gamma}{\alpha}} x1 \cdot q^{\frac{\gamma}{\alpha}} x2 \Bigg\} y^{\gamma+1}$$
$$+ \frac{\gamma}{\gamma+1} p^{-\frac{\gamma+1}{\alpha}} x2 \cdot q^{\frac{\gamma+1}{\alpha}} x1 \Bigg\}$$
$$+ \frac{\gamma}{\gamma} p^{-\frac{\gamma}{\alpha}} x1 \cdot q^{\frac{\gamma}{\alpha}} x3 \Bigg\} y^{\gamma+2}$$
$$+ \frac{\gamma}{\gamma+1} p^{-\frac{\gamma+1}{\alpha}} x2 \cdot q^{\frac{\gamma+1}{\alpha}} x2$$
$$+ \frac{\gamma}{\gamma+2} p^{-\frac{\gamma+2}{\alpha}} x3 \cdot q^{\frac{\gamma+2}{\alpha}} x1 \Bigg\}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots$$

Dies iſt die von Tempelhoff a. a. O. betrachtete For

In der Moivre'ſchen Form iſt $\alpha = \gamma = 1$. A

$$x = p^{-1} x1 . q x1 . y$$
$$+ \{ p^{-1} x1 . q x2 + \tfrac{1}{2} p^{-2} x2 . q^2 x1 \} y^2$$
$$+ \{ p^{-1} x1 . q x3 + \tfrac{1}{2} p^{-2} x2 . q^2 x2 + \tfrac{1}{3} p^{-3} x3 . q^3 x1 \} y$$
$$+ \ldots\ldots\ldots$$

25. Eſchenbach und Rothe aa. OO. haben n die Form

$$a_1 y^{\beta\alpha} + b_1 y^{\beta(\alpha+\delta)} + c_1 y^{\beta(\alpha+2\delta)} + \ldots$$
$$= a x^\alpha + b x^{\alpha+\delta} + c x^{\alpha+2\delta} + \ldots$$

betrachtet. Man muß, um x^γ zu entwickeln, $\alpha_1 = \beta$ $\delta_1 = \beta\delta$ ſetzen, woraus:

$$x^\gamma = \frac{\gamma}{\gamma} p^{-\frac{\gamma}{\alpha}} x1 \cdot q^{\frac{\gamma}{\alpha}} x1 . y^{\beta\gamma}$$
$$+ \frac{\gamma}{\gamma} p^{-\frac{\gamma}{\alpha}} x1 . q^{\frac{\gamma}{\alpha}} x2 \Bigg\} y^{\beta(\gamma+\delta)}$$
$$+ \frac{\gamma}{\gamma+\delta} p^{-\frac{\gamma+\delta}{\alpha}} x2 . q^{\frac{\gamma+\delta}{\alpha}} x1 \Bigg\}$$

26. a, welches in den obigen Reihen
vorkommt, darf nicht = o ſeyn, d. h. di
Reihe darf kein conſtantes Glied enthalten
z. B.

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots$$

ſo entwickele man, da

$$y - a = bx + cx^2 + dx^3 + \ldots$$

nach dem Obigen x nach Potenzen von y —
entwickele ſodann nach dem binomiſchen Leh
nen Potenzen von y — a. Allgemeine F
ſen Fall würden ſehr zuſammengeſetzt ausf

III. Zuſammenhang des Lagrangiſche der Reverſion der Reihen

27. Sey zuerſt

$$y = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \ldots$$

ſo erhält man, wenn dieſe Reihe durch fx
leicht

ſetzen wir nun ψx (a. a. O.) $= (\varphi x)^\gamma$; ſo iſt auch $\psi y = (\varphi y)^\gamma$, und folglich

$$\frac{\partial \psi y}{\partial y} = \gamma (\varphi y)^{\gamma-1} \cdot \frac{\partial \varphi y}{\partial x},$$

raus ferner:

$$\frac{\partial^{n-1}\left\{(\varphi y)^n \frac{\partial \psi y}{\partial y}\right\}}{\partial y^{n-1}} = \frac{\partial^{n-1}\left\{\gamma(\varphi y)^{n+\gamma-1} \cdot \frac{\partial \varphi y}{\partial y}\right\}}{\partial y^{n-1}}$$

$$= \frac{\gamma}{\gamma+n} \cdot \frac{\partial^{n-1}\left\{(n+\gamma)(\varphi y)^{n+\gamma-1} \cdot \frac{\partial \varphi y}{\partial y}\right\}}{\partial y^{n-1}}$$

$$= \frac{\gamma}{\gamma+n} \cdot \frac{\partial^{n-1}\left\{\frac{\partial \cdot (\varphi y)^{\gamma+n}}{\partial y}\right\}}{\partial y^{n-1}} = \frac{\gamma}{\gamma+n} \cdot \frac{\partial^n \cdot (\varphi y)^{\gamma+n}}{\partial y^n}.$$

glich nach dem La Grange'ſchen Satze (S. dieſen Ar- l. 11.):

$$(\varphi x)^\gamma = (\varphi y)^\gamma + \frac{\gamma}{\gamma+1} \cdot \frac{\partial \cdot (\varphi y)^{\gamma+1}}{1 \cdot \partial y} \cdot z + \frac{\gamma}{\gamma+2} \cdot \frac{\partial^2 \cdot (\varphi y)^{\gamma+2}}{1.2 \partial y^2} \cdot z^2 + \frac{\gamma}{\gamma+3} \cdot \frac{\partial^3 \cdot (\varphi y)^{\gamma+3}}{1.2.3 \partial y^3} \cdot z^3 + \ldots$$

$$\left(\frac{x}{fx}\right)^\gamma = y^\gamma (fy)^{-\gamma} + \frac{\gamma}{\gamma+1} \cdot \frac{\partial\left\{y^{\gamma+1} \cdot (fy)^{-\gamma-1}\right\}}{1 \cdot \partial y} z + \frac{\gamma}{\gamma+2} \cdot \frac{\partial^2\left\{y^{\gamma+2} \cdot (fy)^{-\gamma-2}\right\}}{1.2 \partial y^2} z^2 + \frac{\gamma}{\gamma+3} \cdot \frac{\partial^3\left\{y^{\gamma+3} \cdot (fy)^{-\gamma-3}\right\}}{1.2.3 \partial y^3} z^3 + \ldots$$

n man nach dem Obigen o für y, und y für z ſetzt. kann man offenbar auch y und fy mit x und fx ver- chen, wenn man nur nach der Differentation überall = o ſetzt. Alſo

$$\left(\frac{x}{fx}\right)^\gamma = x^\gamma (fx)^{-\gamma} + \frac{\gamma}{\gamma+1} \cdot \frac{\partial\left\{x^{\gamma+1} \cdot (fx)^{-\gamma-1}\right\}}{1 \cdot \partial x} y + \frac{\gamma}{\gamma+2} \cdot \frac{\partial^2\left\{x^{\gamma+2} \cdot (fx)^{-\gamma-2}\right\}}{1.2 \partial x^2} y^2 + \frac{\gamma}{\gamma+3} \cdot \frac{\partial^3\left\{x^{\gamma+3} \cdot (fx)^{-\gamma-3}\right\}}{1.2.3 \partial x^3} y^3 + \ldots$$

$$y^{-m} = (ax + bx^2 + cx^3 + \ldots)^{-m}$$

$$= p^{-m} \varkappa 1.x^{-m} + p^{-m} \varkappa 2.x^{-m+1}$$

Also

$$x^m y^{-m} = p^{-m} \varkappa 1 + p^{-m} \varkappa 2.x +$$

und folglich, weil

$$\frac{\partial^n x}{\partial x^n} = \frac{\partial^n . x^2}{\partial x^n} = \ldots = \frac{\partial^n .}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^n . x^n}{\partial x^n} = 1.2,.n, \frac{\partial^n . x^{n+1}}{\partial x^n} =$$

ist:

$$\frac{\partial^n . x^m y^{-m}}{\partial x^n} = 1.2.3 \ldots n p^{-m} \varkappa (n+1) + 2.3$$

Folglich für $x = 0$:

$$\frac{\partial^n . x^m y^{-m}}{\partial x^n} = 1.2.3..n p^{-m}$$

$$\frac{\partial^n \left(x^{\gamma+n} y^{-\gamma-n} \right)}{1:2.3..n \, \partial x^n} = p^{-\gamma-}$$

Also, weil nach der Reihe für $x^m y^{-}$ $p^{-\gamma} k1$ ist, für $x =$ 0

$$y^{\beta} = x^{\alpha}(a + bx^{\delta} + cx^{2\delta} + \ldots)$$

$$y^{\frac{\beta\delta}{\alpha}} = x^{\delta}(a+bx^{\delta} + cx^{2\delta} + \ldots)^{\frac{\delta}{\alpha}}$$

$$= Ax^{\delta} + Bx^{2\delta} + Cx^{3\delta} + \ldots.$$

Form, welche der polynomiſche Lehrſatz rechtfertigt. für

$$x^{\delta} = u,\ y^{\frac{\beta\delta}{\alpha}} = v:$$

$$v = Au + Bu^2 + Cu^3 + \ldots = P.$$

ich nach (28.)

$$u^{\gamma'}{}_{\tau}(n+1) = \frac{\gamma'}{\gamma'+n} P^{-\gamma'-n}{}_{x}(n+1)\, v^{\gamma'+n},$$

n wir nun $\gamma' = \frac{\gamma}{\delta}$; ſo iſt

$$u^{\gamma'} = (x^{\delta})^{\frac{\gamma}{\delta}} = x^{\gamma},\ P = p^{\frac{\delta}{\alpha}};$$

$$P^{-\gamma'-n} = \left(p^{\frac{\delta}{\alpha}}\right)^{-\frac{\gamma+n\delta}{\delta}} = p^{-\frac{\gamma+n\delta}{\alpha}};$$

$$v = y^{\frac{\beta\delta}{\alpha}},\ v^{\gamma'+n} = y^{\frac{\beta(\gamma+n\delta)}{\alpha}}.$$

ich

$$x^{\gamma}{}_{\tau}(n+1) = \frac{\gamma}{\gamma+n\delta} p^{-\frac{\gamma+n\delta}{\alpha}}{}_{x}(n+1)\, y^{\frac{\beta(\gamma+n\delta)}{\alpha}}$$

Lothe'ſche Localformel.

30. Dieſe Ableitung dieſer wichtigen Formel aus dem Lrange'ſchen Satze iſt von J. F. Pfaff zuerſt gege- wodurch ſich derſelbe ein weſentliches Verdienſt um Lehre von der Reihenumkehrung erworben hat. M. rchiv für reine und angewandte Mathematik v. Hin- burg. Thl. I. S. 85., vorzüglich aber in Pfaffs quisitiones analyticae, Helmst. 1797. die dritte andlung, welche ſich überhaupt ſehr ausführlich über Polynomialtheorem und die Reverſion der Reihen ver-

$$y = x - z\varphi x, \quad x = y$$

oder, wenn man $z\varphi x = v$ ſetzt:

$$x = y + v, \quad z = \frac{}{\varphi($$

Folglich nach dem Taylor'ſchen Sa

$$z^{-1} = \frac{\varphi(y+v)}{v}$$

$$= \frac{1}{v}\Big\{ \varphi y + \frac{\partial \varphi y}{1.\partial y} v + \frac{\partial^2 \varphi y}{1.2\,\partial y^2}$$

$$= \varphi y . v^{-1} + \frac{\partial \varphi y}{1.\partial y} v^0 + \frac{\partial^2 \varphi y}{1.2\,\partial y^2}$$

Folglich nach der Localformel zur R

$$v^{\gamma}{}_{\pi}(n+1) = \frac{\gamma}{\gamma+n} p^{\gamma+n}{}_{\pi}($$

da hier $\alpha = \beta = -1$, $\delta = 1$
aber offenbar $(\varphi(y+v))^m$, wenn
für y ſetzt. Alſo nach dem Taylor'

$$p^m = \frac{(\varphi(y+v))^m}{v^m}$$

$$= (\varphi y)^m . v^{-m} + \frac{\partial . (\varphi y)^m}{1.\partial y} v^{-m+1} + \frac{\partial^2 .}{1.}$$

$$p^m{}_{\pi}(n+1) = \frac{\partial^n . (\varphi y)^m}{1.2.3..n\,\partial y^n}$$

von z zu entwickeln, die Potenzen von v, deren allgemeines Glied so eben gefunden, setzen. Es ist aber

$$\begin{aligned}
&\text{für } \gamma = 1,\ 1 + (n-1) = n;\\
&\text{„ } \gamma = 2,\ 2 + (n-2) = n;\\
&\qquad\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
&\text{„ } \gamma = n-1,\ n-1+1 = n;\\
&\text{„ } \gamma = n,\qquad n + 0 = n.
\end{aligned}$$

Also offenbar

$$\begin{aligned}
\psi x_n(n+1) &= \frac{1}{n}\cdot\frac{\partial^{n-1}.(\varphi y)^n}{1..(n-1)\partial y^{n-1}}\cdot\frac{\partial\psi y}{1.\partial y}\\
&+\frac{2}{n}\cdot\frac{\partial^{n-2}.(\varphi y)^n}{1..(n-2)\partial y^{n-2}}\cdot\frac{\partial^2\psi y}{1.2\,\partial y^2}\\
&+\frac{3}{n}\cdot\frac{\partial^{n-3}.(\varphi y)^n}{1..(n-3)\partial y^{n-3}}\cdot\frac{\partial^3\psi y}{1.2.3\,\partial y^3}\\
&\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+\frac{n}{n}\cdot(\varphi y)^n.\frac{\partial^n\psi y}{1..n\,\partial y^n};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1.2.3\ldots n\psi x_n(n+1) &= \frac{\partial^{n-1}.(\varphi y)^n}{\partial y^{n-1}}\cdot\frac{\partial\psi y}{\partial y}\\
&+\frac{n-1}{1}\cdot\frac{\partial^{n-2}.(\varphi y)^n}{\partial y^{n-2}}\cdot\frac{\partial^2\psi y}{\partial y^2}\\
&+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\cdot\frac{\partial^{n-3}.(\varphi y)^n}{\partial y^{n-3}}\cdot\frac{\partial^3\psi y}{\partial y^3}\\
&\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+(\varphi y)^n.\frac{\partial^n\psi y}{\partial y^n}.
\end{aligned}$$

Setzt man aber in der Leibnitzischen Reihe (Thl. I. S. 903.) für $\partial^n.xy$ das dortige $x = (\varphi y)^n$, $y = \frac{\partial\psi y}{\partial y}$, und entwickelt $\partial^{n-1}.xy$; so erhält man augenblicklich:

$$\psi x_n(n+1) = \frac{\partial^{n-1}\left\{(\varphi y)^n.\frac{\partial\psi y}{\partial y}\right\}}{1.2.3..n\,\partial y^{n-1}},$$

$$\psi x_r(n+1) = \frac{\partial^{n-1}\left\{(\varphi y)^n.\frac{\partial\psi y}{\partial y}\right\}}{1.2.3..n\,\partial y^{n-1}}z^n,$$

das allgemeine Glied der La Grangeschen Reihe, wie Thl. II. S. 632., womit also diese Reihe bewiesen.

Ueber die Verbindung der Reversionsformel mit dem La Grange'schen Satze s. m. auch einen Aufsatz von Hindenburg im Archiv d. r. u. angew. M. II. S. 359.

$$k = -ax^{-p} - bx^{-(p-1)} - \ldots - i$$

Für $\alpha = -p$, $\beta = 1$, $\delta =$
man durch Umkehrung eine nach
nete Reihe für x, von denen die
ders brauchbar seyn wird, jenachd
tiv ist. Man kann also mittelst d
immer wenigstens so viele Reihen
kannte Größe einer Gleichung find
efficienten vorkommen, die nicht =
ständige Gleichung des nten Grade
welche sich jedoch leicht auf 2(n
man sowohl das niedrigste, als hö
als Anfangsglied betrachten kann
nten Grades hat aber immer nur
sen unter diesen Reihen gleiche vo
gut, ihre Anzahl vervielfältigen zu
wendung auf numerische Rechnung
nicht gleichgültig ist. Durch Div
einer solchen Zahl, wodurch die
echter Bruch wird, läßt sich di

$-\frac{a}{b} = x^{-1} + \frac{c}{b}x^1$, $-\frac{a}{c} = x^1 + \frac{b}{c}x$, $-\frac{b}{c} = x^2 + \frac{a}{c}x^{-1}$

erhält man durch Reversion mittelst der Localformel:

$$x = -\frac{a}{b} + \frac{a^2c}{b^3} - \frac{3a^5c^2}{b^7} + \frac{12a^7c^3}{b^{10}} - \frac{55a^9c^4}{b^{13}} + \frac{273a^{11}c^5}{b^{16}} + \ldots$$

$$x = -\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{b}{3c}\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{b^2}{81c^3}\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{5}{2}}$$
$$- \frac{b^4}{243c^4}\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{7}{2}} + \frac{4b^6}{6561c^6}\left(\frac{c}{a}\right)^{11} \ldots.$$

$$x = \left(-\frac{b}{c}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{a}{2c}\left(-\frac{c}{b}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{3a^2}{8c^2}\left(-\frac{c}{b}\right)^{\frac{5}{2}} - \frac{a^3}{2c^3}\left(-\frac{c}{b}\right)^{\frac{7}{2}}$$
$$- \frac{105a^4}{128c^4}\left(-\frac{c}{b}\right)^{\frac{11}{2}} - \frac{3a^5}{2c^5}\left(-\frac{c}{b}\right)^{\frac{14}{2}} - \ldots$$

indem nämlich für diese drei Formen:

$$y = -\frac{a}{b},\ \beta = 1,\ \alpha = 1,\ \delta = 2;$$

$$y = -\frac{a}{c},\ \beta = 1,\ \alpha = 3,\ \delta = -2;$$

$$y = -\frac{b}{c},\ \beta = 1,\ \alpha = 2,\ \delta = -3;$$

auch, wie hier immer, $\gamma = 1$ zu setzen ist.

34. Wendet man diese Reihen auf die im Artikel, Cardans Regel. (10.), als Beispiel gebrauchte Gleichung:

$$x^3 - 2100x + 24000 = 0$$

an; so erhält man durch die erste und dritte obige Reihe:

$x = +\ 11{,}4286$	$x = +\ 45{,}82575$
$+\ 0{,}7108$	$-\ 5{,}71429$
$+\ 0{,}1326$	$-\ 1{,}06878$
$+\ 0{,}0330$	$-\ 0{,}08863$
$+\ 0{,}0094$	$-\ 0{,}00226$
$+\ 0{,}0029$	$-\ 0{,}00002$
$+\ 0{,}0003$	.....
$+\ 12{,}3176$	$+\ 38{,}95177$

Die zweite Reihe giebt $x = -52{,}439$; sie convergirt aber vom dritten Glied an fast gar nicht, daher ist das Resultat unsicher. Setzt man aber diese dritte Wurzel $= w$; so hat man (Gleichung. 151.):

$$-12{,}3176 - 38{,}9518 - w = 0,$$
$$12{,}3176 . 38{,}9518 . w = -24000.$$

wo nur die zweiten ſchon in den Zehnt
abweichen.

Umkehrung eines Satzes,

lung der Vorausſetzung und Folgerun
und Theſis, mit einander. Beiſpiele
targeometrie in Menge dar. Die Ber
ten Sätze werden oft indirect oder
Der eilfte Grundſatz des Euclides
der Lehre von den Parallelen bekannt
macht (Parallelen. 2.), iſt eigentlich
Elem. Lib. I. Prop. 27. 28. Wenn
geht; ſo geht c auch in a + b auf, iſt
zu beweiſender, arithmetiſcher Satz.
Satz: wenn c in a + b aufgeht; ſo g
b auf, würde, ſo allgemein ausgeſpr
ſeyn. Man ſieht alſo, daß nicht alle
laſſen. Das Weitere und Allgemeiner
Logik zu überlaſſen. In der Math
nicht im Allgemeinen zu wiſſen, weld
ren laſſen, da alle umgekehrte Sätze b

r) heißt einer, von einer krummen Linie oder krummen äche eingeſchloſſenen, Figur umſchrieben (circumscri-a), wenn alle Seitenlinien oder Seitenflächen der erſtern erührende des Umfangs oder der Oberfläche der letztern, elche dann der erſtern eingeſchrieben (inscripta) heißt, nd. In dem nach Wolf benannten mathematiſchen Le-con (Thl. I. S. 1367.) heißen erſtere umſchreibende, ztere umſchriebene Figuren. Eine geradlinige oder eine on ebenen Flächen eingeſchloſſene Figur heißt einer Figur on derſelben Art umſchrieben, und letztere der erſtern ingeſchrieben, wenn alle Seiten und Seitenflächen der rſtern durch die Spitzen und Ecken der letztern gehen. Das, dem Hypſikles beigelegte, funfzehnte Buch der Elemente handelt von der Einſchreibung der regulären Kör-er in einander, und auch in dem von Candalla hinzu-gefügten ſechszehnten Buche kommen mehrere Sätze über ie bei ſolchen Körpern ſtatt findenden Verhältniſſe vor.

Umſchriebene Hyperbel, (Hyperbola circumscripta) nennt Newton bei ſeiner Aufzählung der Linien der dritten Ordnung eine beſondere Gattung der Linien dieſer Ordnung, worüber der Artikel Hyperbel höherer Art zu vergleichen.

Umwandlung, ſ. Umformung.

Unabhängige veränderliche Größe, ſ. Veränderliche Größe und Veränderung der unabhängigen veränderlichen Größe.

Unariſche ſymmetriſche Functionen, ſ. Symmetriſche Function. Thl. IV. S. 861.

Unbegränzt, heißt eine Linie oder Fläche, wenn man ſie ſich willkührlich verlängert oder erweitert denken kann. Die Schenkel der Parabel und Hyperbel kann man ſich als unbegränzt vorſtellen. Die Fläche des Kreiſes wird durch ſeine Peripherie begränzt; eben ſo die Ellipſe. Eine Linie wird immer durch zwei Punkte, eine Fläche durch Linien begränzt. Die Seitenfläche des Kegels, des para-

Unbekannte Größen in einer
chungen ſind diejenigen in denſelben vork
welche mittelſt der in der Aufgabe gegeb
mit Hülfe der Gleichungen ſelbſt, de
Aufgabe gemäß, welche durch die Gle
dargeſtellt werden, beſtimmt werden ſol
net die unbekannten oder geſuchten G
die letztern kleinen lateiniſchen Buchſta
w,...., die gegebenen oder bekannt
durch a, b, c, d,...., obgleich bei
ben zuweilen auch noch andere Bezeich
den, die ſich aber immer leicht ergeben,
Fall möglichſt einfach und naturgem
Soll die Aufgabe beſtimmt ſeyn, ſo
Bedingungen, deren Erfüllung ſie verl
ſo viele Gleichungen ableiten laſſen, al
ßen geſucht werden. Iſt die Anzahl de
ner als die Anzahl der unbekannten Grö
gabe unbeſtimmt (S. unbeſtimmte Auf
Analytik), und ſie heißt mehr als beſtim
zahl der Gleichungen größer iſt als di

Anzahl ihrer Einheiten, nicht auf deren beſondere Beſchaffenheit ankommt. Durch Verbindung einer unbenannten Zahl mit einer gewiſſen Einheit entſteht eine benannte Zahl. So iſt z. B. zwölf eine unbenannte Zahl, und zwölf Thaler eine benannte Zahl, welche durch die Verbindung der unbenannten Zahl zwölf mit dem Thaler als Einheit entſteht. Unbenannte Zahlen heißen auch abſtracte Zahlen, oder Zahlen in abstracto; benannte Zahlen dagegen concrete Zahlen, oder Zahlen in concreto. S. Zahl.

Unbeſtimmte Analytik oder Analyſis, (Analysis Diophantea; ſ. unten bei der Geſchichte.) iſt der Theil der Algebra, welcher ſich mit der Auflöſung unbeſtimmter, d. i. ſolcher algebraiſcher Aufgaben beſchäftigt, bei denen zur Beſtimmung der unbekannten Größen weniger Gleichungen als unbekannte Größen gegeben ſind. Solche Aufgaben überlaſſen alſo immer einige unbekannte Größen der willkührlichen Annahme. Wären nämlich m Größen aus m — n Gleichungen zu beſtimmen; ſo nehme man n unbekannte Größen willkührlich an, ſetze ihre Werthe in die gegebenen m — n Gleichungen, und beſtimme aus denſelben die übrigen m — n unbekannten Größen nach bekannten Methoden. Da man für n unbekannte Größen unendlich viele verſchiedene Werthe annehmen kann; ſo giebt es auch unendlich viele Auflöſungen der vorgelegten Aufgabe. Sehr beſchränkt wird aber die Anzahl der Auflöſungen, wenn man nur nach denen unter ihnen fragt, durch welche die unbekannten Größen in ganzen, auch poſitiven Zahlen, oder, bei einer gewiſſen Klaſſe von Aufgaben, wenigſtens in rationalen Zahlen gegeben werden. Dieſe Auflöſungen, nicht etwa durch Ausſonderung aus der unendlichen Menge aller Auflöſungen, ſondern nach gewiſſen beſtimmten Methoden für ſich und nur allein, ohne Rückſicht auf die übrigen zu finden, dies iſt das eigentliche Geſchäft der unbeſtimmten Analytik und darin beſteht ihr Weſen.

1. Sey

$$ax - by = c$$

leicht, daß die Auflösung unserer Gleichu
len sich auf die Auflösung der Gleichung

$$ap - bq = \pm 1$$

in ganzen Zahlen reducirt, weil man dan

$$x = \pm pc, \quad y = \pm qc$$

zu setzen braucht. Die Auflösung letzt
ganzen Zahlen ist aber immer möglich.
nämlich $\frac{b}{a}$ in einen Kettenbruch (S. dies
bezeichne dessen vorletzten Partialwerth d
$\frac{b}{a}$ der letzte Partialwerth ist,

$$ap - bq = \pm 1$$

(Kettenbruch. 6.), wo das obere oder
nehmen, jenachdem die Anzahl der Gli
bruchs ohne die etwa in ihm enthaltene
oder ungerade ist. Allgemein erhält m
irgend eine ganze Zahl bezeichnet, für x,

$$x = \pm pc + mb, \quad y = \pm qc +$$

wie leicht erhellen wird. Die Zahlen a,
mer positiv nehmen, da dem x und y le

tenbruch; so ist der zweite, als vorletzter, Partialwerth $= \frac{1}{4}$. Folglich $p = 3$, $q = 2$, $x = 3.94 + 7m$, $y' = 2.94 + 5m$, oder $x = 282 + 7m$, $y = -188 - 5m$. Verlangt man nun bloß positive Werthe; so muß man m negativ nehmen, und es muß $7m < 282$, $5m > 188$, d. i. $m < \frac{282}{7}$, $> \frac{188}{5}$ seyn. Dies giebt für m die Gränzen -40, -38, und man erhält:

$$x = 16, 9, 2; \quad 5x + 2 = 82, 47, 12.$$
$$y = 2, 7, 12; \quad 7y + 4 = 18; 53, 88.$$

Also giebt es drei Auflösungen unserer Aufgabe in ganzen positiven Zahlen.

3. Durch Hinzufügung einer gewissen Bedingung kann eine unbestimmte Aufgabe in eine bestimmte verwandelt werden, wie z. B. beim folgenden Falle. Eine Bäuerin bringt Eier zu Markte, mehr als 100, weniger als 200. Ueberzählt sie dieselben nach 15, so bleiben ihr 4, überzählt sie dieselben aber nach 12, 10 Eier übrig. Wie viele Eier hatte sie? Die Gleichung ist

$$15x + 4 = 12y + 10, \quad 15x - 12y = 6,$$
$$5x - 4y = 2.$$

Der vorletzte Werth des Kettenbruchs für $\frac{4}{5}$ ist $= \frac{1}{4}$. Also $p = 1$, $q = 1$, und folglich $x = 2 + 4m$, $y = 2 + 5m$. Also

$$x = 2, 6, 10, 14, 18, \ldots$$
$$y = 2, 7, 12, 17, 22, \ldots$$
$$15x + 4 = 34, 94, 154, 214, 274, \ldots$$

Folglich die gesuchte Zahl $= 154$.

4. Hat man zwischen n Größen $x, y, z, v, \ldots, n$ $n-1$ Gleichungen von der Form:

$$ax - by = c, \quad a'x - b'z = c', \quad a''x - b''v = c'', \quad \text{&c.}$$

so giebt die erste Gleichung für x einen Werth von der Form:

$$x = \alpha + b\varphi.$$

Diesen Werth setze man in die zweite Gleichung, und bestimme φ. Also

$$\varphi = \alpha' + b'\psi.$$

Dies in den Ausdruck für x gesetzt, giebt für x einen Werth von der Form:

ten Größen zu bestimmen. Alle
mer gehörig reducirt werden. H
die Coefficienten der beiden unbek
einer Gleichung einen gemeinschaft
Aufgabe unmöglich, d. h. in ganze

5. Oft läßt sich die Auflösun
z. B. Zahlen finden, welche, durc
11 dividirt, nach der Reihe die R
0 übrig lassen. Hier ist klar, daß
Bedingungen erfüllt sind, es unm
sten seyn werden. Wegen der t
hat man nämlich:

$$9x + 5 = 10y + 9 :$$

Folglich

$$\frac{9x+5}{3} = 3x + 1 +$$

$$\frac{10y+9}{2} = 2y + 4 +$$

$$\frac{10y+9}{5} = 2y + 1 +$$

Ferner erhält man leicht $9x = 10$
$9x$, folglich auch in x auf (S. Zah
$2x'$, und folglich

$$9x + 5 \qquad 18x' + 4$$

$$\varphi = 1 + \tfrac{4}{5},\ \frac{p}{q} = \tfrac{4}{5},\ p = 1,\ q = 1;$$

$$x = -4 + 10\varphi.$$

, in die zweite Gleichung gesetzt, giebt:

$$90\varphi - 11z = 31.$$

$$\tfrac{11}{90} = \frac{1}{8+\frac{1}{5+\frac{1}{2}}},\ \frac{p}{q} = \tfrac{5}{41},\ p = 5,\ q = 41;$$

$$\varphi = -155 + 11\psi.$$

ich $x = -1554 + 110\psi$. Schließt man negative he aus; so ist mindestens zu setzen $\psi = 15$. Dies

$$x = 96, 206, 316, 426, 536, \ldots$$

ich die kleinste gesuchte Zahl $= 9.96 + 5 = 869$, ie folgende $= 9.206 + 5 = 1859$, u. s. f.

lufgaben, von der Art der so eben aufgelöseten, hat sberg (Demonstrative Rechenkunst. §. 1366.) ei- arten Knoten genannt. Erleichterungen besonderer ewähren dabei die cyklischen Perioden (S. diesen Art. eine Abhandlung von Hindenburg über dieselben ipziger Magazin. 3tes Stück 1786., und ein Auf- on Lüdicke im Archiv der r. u. a. Math. Bnd. II. 06.)

. Man kann unsere allgemeine Aufgabe auch auf den Ausdruck bringen. Eine Zahl x zu finden, so ie Größen

$$\frac{ax - c}{b},\ \frac{a'x - c'}{b'},\ \frac{a''x - c''}{b''},\ \text{ꝛc.}$$

Zahlen werden. Sey z. B. x so zu bestimmen, daß

$$\frac{121x - 41}{504},\ \frac{9x + 1}{35},\ \frac{27x - 11}{16}$$

Zahlen werden. Da, wenn jede einzelne mehrerer Prim- in einer Zahl aufgeht, auch deren Product in dieser ufgehen muß (Zahl. I. 9.); so zerlege man, weil in die- alle die Nenner ziemlich groß sind, sie in ihre Prim- en ($504 = 2^3.3^2.7$, $35 = 7.5$, $16 = 2^4$) nache die Brüche

$$\frac{121x-41}{2^3},\ \frac{121x-41}{3^2},\ \frac{121x-41}{7},\ \frac{9x+1}{7},\ \frac{9x+1}{5},\ \frac{27x-11}{2^4}$$

zu ganzen Zahlen zu machen, woraus ſ
chungen ergeben:

$4x - 9y = 5$, $2x - 7z = -1$, $4x - 5v =$

Die letzte giebt für x die Form:

$$x = 16\varphi + 1,$$

und dies, in die dritte geſetzt:

$$64\varphi - 5v = -1, \quad \frac{p}{q} = \frac{1}{13}, \quad p = 1$$

$$\varphi = 5 + 5\psi = 5\psi', \quad x = 80\psi' + 1.$$

Folglich, mittelſt der zweiten Gleichung:

$$160\psi' - 7z = -3, \quad \frac{p}{q} = \frac{1}{23}, \quad p =$$

$$\psi' = 3 + 7X, \quad x = 241 + 560X.$$

Alſo, mittelſt der erſten

$$2240X - 9y = -959, \quad \frac{p}{q} = \frac{1}{243}$$

$$X = 959 + 9w, \quad x = 537281 + 5040$$

Will man den kleinſten poſitiven Werth
muß man $w = -106$ ſetzen, woraus

7. Aus der bisherigen Theorie folgt

8. Hat man nun überhaupt $m - 1$ Gleichungen mit n unbekannten Größen, z. B. für $m = 5$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}v + Ax + By + Cz + Du &= E, \\ \mathfrak{X}'v + A'x + B'y + C'z + D'u &= E', \\ \mathfrak{X}''v + A''x + B''y + C''z + D''u &= E'', \\ \mathfrak{X}'''v + A'''x + B'''y + C'''z + D'''u &= E''' ; \end{aligned}$$

bestimme man x, y, z, u durch Elimination aus den leichungen:

$$\begin{aligned} Ax + By + Cz + Du &= E - \mathfrak{X}v, \\ A'x + B'y + C'z + D'u &= E' - \mathfrak{X}'v, \\ A''x + B''y + C''z + D''u &= E'' - \mathfrak{X}''v, \\ A'''x + B'''y + C'''z + D'''u &= E''' - \mathfrak{X}'''v, \end{aligned}$$

durch man Ausdrücke von der Form

$$= \frac{Mv - L}{N}, \quad y = \frac{M'v - L'}{N'}, \quad z = \frac{M''v - L''}{N''}, \quad u = \frac{M'''v - L'''}{N'''}$$

ält. Dann bestimme man (6.) v so, daß diese Werthe n x, y, z, u ganze Zahlen werden. Die Aufgabe nn unmöglich werden, welches sich beim letzten Theile r Auflösung jederzeit zeigen wird (4.).

Hat man $m - n$ Gleichungen mit m unbekannten röße; so nehme man $n - 1$ unbekannte Größen als kannt an, und bringe die Gleichungen auf die vorige rm; so hat man $m - n$ Gleichungen mit $m - (n - 1) = m - n + 1$ unbekannten Größen, die man nun wie rher auflösen kann. Für die als bekannt angenommen Größen kann man dann alle ganze Zahlen setzen. Nur, enn die gesuchten Größen auch alle positiv seyn sollten, ürde dies noch eine Beschränkung erleiden. Allgemeine ormeln würden sich nur mit großer Weitläufigkeit geben ssen. Einige Beispiele werden das Gesagte deutlich achen.

9. Die gegebenen Gleichungen seyen z. B.

$$3x + 5y + 7z = 560, \quad 9x + 25y + 49z = 2920;$$
$$3x + 5y = 560 - 7z, \quad 9x + 25y = 2920 - 49z;$$
$$7z - 3x = 60, \quad 14z - 5y' = 620,$$

enn man $y' = -y$ setzt. Die erste Gleichung giebt:

$$z = 60 + 3\varphi = 3.(20 + \varphi) = 3\varphi'.$$

ies, in die zweite gesetzt:

für die möglichen Auflösungen unſerer Au
poſitiven Zahlen.

10. Hat man die Gleichung

$$5x + 8y + 7z = 50;$$

ſo erhält man für $y = -y'$:

$$5x - 8y' = 50 - 7z, \frac{p}{q} = \frac{5}{8}, p = 3,$$

Die Anzahl der Glieder des Kettenbruchs,
auf die Ganzen, iſt ungerade. Alſo

$$x = -3.(50 - 7z) + 8\varphi, y' = -2.(50$$

oder

$$x = 21z + 8\varphi - 150, y = 100 - 14$$

wo für φ, z alle ganze Zahlen geſetzt werde
langte man nur poſitive Werthe; ſo müßte

$$21z + 8\varphi \geqq 150, 14z + 5\varphi \leqq 1$$

ſeyn, woraus ſogleich folgt, daß imm
$\varphi \leqq 20$ ſeyn muß. Da $42z + 16\varphi + 15\varphi \geqq 300$; ſo folgt durch Subt
Alſo kann φ nur poſitiv, und nicht $>$
Gränzen von z wären

$$\frac{300 - 16\varphi}{42} \text{ und } \frac{300 - 15\varphi}{42},$$

$$150 - 8\varphi = 21\psi,\ 100 - 5\varphi = 14\psi:$$
$$21\psi - 8\varphi' = 150,\ 14\varphi - 5\varphi' = 100,$$

für $\varphi' = -\varphi$, in ganzen Zahlen auf; ſo erhält man für die erſte,

$$\varphi = -\varphi' = 1200 - 21X,$$

und für die zweite:

$$\varphi = -\varphi' = 300 - 14X.$$

Die poſitiven Werthe von φ, welche nicht > 20, ſind alſo $\varphi = 3$; und $\varphi = 6, = 20$. Die Gränzen von z wären nach den obigen Formeln 6, $6\frac{1}{14}$; $4\frac{6}{7}$, 5; $-\frac{10}{21}$, 0. Alſo hat man folgende zuſammenſtimmende Werthe:

$$\varphi = 3, 6, 20;\ z = 6, 5, 0;$$

demnach folgende Auflöſungen in poſitiven ganzen Zahlen:

$$x = 0, 3, 10;\ y = 1, 0, 0;\ z = 6, 5, 0.$$

11. Hat man die Gleichungen

$$x + y + z + v = 100,\ 20x + 10y + 4z + v = 200;$$

ſo erhält man durch Elimination leicht

$$3z = 100 - 19x - 9y.$$

Folglich, wenn man durch 3 dividirt:

$$z = 33 - 6x - 3y - \frac{x - 1}{3}.$$

Alſo muß $\frac{x-1}{3}$ eine ganze Zahl ſeyn. Deshalb ſetze man

$$x - 1 = 3t,\ x = 3t + 1.$$

Dies giebt

$$x = 3t + 1,\ y = y,\ z = 27 - 19t - 3y,$$
$$v = 100 - x - y - z = 72 + 2y + 16t.$$

Für $t = 2$ würde z negativ. Alſo kann man nur $t = 0$, $t = 1$ ſetzen. Für den erſten Fall erhält man $x = 1$, $y = y$, $z = 27 - 3y$, $v = 72 + 2y$, und für $t = 1$:

$$x = 4,\ y = y,\ z = 8 - 3y,\ v = 88 + 2y.$$

Im erſten Falle darf man alſo y nicht > 9, im andern nicht > 2 nehmen. Dies giebt im Ganzen 13 Auflöſungen in poſitiven ganzen Zahlen, wenn man nur auch $y = 0$ ſetzt.

12. Die hier angewandte Methode iſt eine andere als die vorher gebrauchte. Iſt ſie auch nicht ſo allgemein als jene, ſo wird ſie doch auch zuweilen mit Vortheil angewandt. Sie rührt von Euler her, und beſteht vorzüg-

$$11x + 3 = 19y + 5,\ 11x$$

$$x = y + \frac{8y + 2}{11} = y$$

$$y = p + \frac{3p - 2}{8} = p$$

$$p = 2q + \frac{2q + 2}{3} = 2q$$

$$q = r - 1 + \frac{r}{2} = r$$

$$r = 2s.$$

Alſo, durch rückwärts gehende Be
$r = 2s$, $q = 3s - 1$, $p = 8s - 2$, y
und folglich die Form der geſucht
$= 209s - 52$. Die kleinſte p
$= 157$ für $s = 1$.

Viele nach dieſer Methode b
im zweiten Theile von Eulers
Auch vergl. m. die Artt. Alligations
wo auch einige hierher gehörende

14. Man habe jetzt eine Gleich
ten Größen, von denen die ein
überſteigt:

$$o = a + bx + a'y + cx^2 + b'$$

den wir durch q bezeichnen wollen, im Zähler p aufgeht. Man hat alſo

$$p = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \ldots$$
$$q = a' + b'x + c'x^2 + d'x^3 + e'x^4 + \ldots$$

Aus dieſen beiden Gleichungen eliminire man x, wodurch zwiſchen p, q eine Gleichung von der Form

$$o = A + Bp + Cq + Dp^2 + Epq + Fq^2 + Gp^3 + \ldots$$

erhalten wird. Die Coefficienten dieſer Gleichung ſind ganze rationale Functionen von a, a′, b, b′, c, c′, u. ſ. f. (Elimination. 10. ff.). Da nun $y = -\frac{p}{q}$ iſt; ſo iſt $p = -qy$; welches, in vorhergehende Gleichung geſetzt, giebt:

$$o = A - Bqy + Cq + Dq^2y^2 - Eq^2y + Fq^2 - Gq^3y^3 + \ldots$$

Alle Glieder dieſer Gleichung, außer A, enthalten q als Factor. Sollen daher q, y zugleich ganze Zahlen ſeyn; ſo muß q in A aufgehen. Man ſuche daher alle Theiler von A (Theiler einer Zahl. 1. 11.), und ſetze nach und nach jeden derſelben für q in die Gleichung

$$q = a' + b'x + c'x^2 + d'x^3 + \ldots$$

Alle Gleichungen, welche man hierdurch erhält, löſe man auf, und ſetze die ganzen rationalen Werthe von x, ſo viel man deren erhält, nach und nach für x; ſo werden ſich leicht diejenigen ergeben, für welche $\frac{p}{q}$ eine ganze Zahl wird. Es erhellet leicht, daß man hierdurch alle Auflöſungen unſerer Gleichung in ganzen Zahlen erhalten muß, ſo wie denn auch die Anzahl dieſer Auflöſungen jederzeit beſchränkt ſeyn wird.

Nur ein Fall läßt ſich nach dieſer Methode nicht behandeln. Iſt nämlich

$$y = -\frac{a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots}{a'},$$

ſo daß $b' = c' = d' = \ldots = o$; ſo iſt in der Gleichung $q = a'$ kein x mehr enthalten, und ſie kann alſo nicht, wie die Methode verlangt, nach x aufgelöſet werden. Man muß in dieſem Falle x in ganzen Zahlen ſo beſtimmen, daß

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots$$

durch a′ theilbar wird. Sey n ein ſolcher Werth von x;

ttelſt des binomiſchen Lehrſatzes leicht, daß für
ι auch $n \pm \mu a'$ ein Werth von x ſeyn wird.
aber leicht, daß, indem man bloß auf die ab-
he der Größen Rückſicht nimmt, wenn $n >$
ch immer ſo beſtimmen läßt, daß $n \pm \mu a' < \frac{1}{2} a'$
at nämlich, immer bloß die abſoluten Werthe
hierzu die beiden Bedingungen:

$$n - \mu a' < \tfrac{1}{2} a', \quad n - \mu a' > 0;$$

eicht ergiebt:

$$\mu > \frac{n}{a'} - \tfrac{1}{2}, \quad \mu < \frac{n}{a'}.$$

n ſolcher Werth von x, welcher $< \frac{1}{2} a'$; ſo
anze μ' überhaupt

$$n = n' \pm \mu' a'.$$

he man bei allen ganzen Zahlen, welche rück-
abſoluten Werthe nicht $> \frac{1}{2} a'$ ſind, ob, wenn
ſetzt, $a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots$ durch a'
Sind nun n', n'', n''', u. ſ. f. diejenigen
en, bei welchen dies eintrifft; ſo ſind

$$\pm \mu' a', \; n'' \pm \mu'' a', \; n''' \pm \mu''' a', \; \text{ꝛc.}$$

$$x = f - \beta,\ y = -\frac{p}{q} = g - \alpha,$$

ine Auflösung Zahlen unserer Gleichung in ganzen Zahlen.

16. Die Gleichung sey:

$$\alpha x + \beta y + \gamma = \lambda xy;$$

ist

$$y = -\frac{\alpha x + \gamma}{\beta - \lambda x},\ p = \alpha x + \gamma,\ q = \beta - \lambda x;$$

$$\alpha\beta + \gamma\lambda - \lambda p - \alpha q = o.$$

Sey nun $\alpha\beta + \gamma\lambda = fg$; so ist

$$f = \beta - \lambda x,\ x = \frac{\beta - f}{\lambda};$$

$$y = -\frac{p}{q} = -\frac{\alpha(\beta - f) + \gamma\lambda}{\lambda f} = -\frac{\alpha\beta + \gamma\lambda - \alpha f}{\lambda f} = \frac{\alpha - g}{\lambda}.$$

Also müssen die Factoren f, g so beschaffen seyn, daß die Brüche

$$\frac{\beta - f}{\lambda},\ \frac{\alpha - g}{\lambda}$$

ganze Zahlen sind.

Hat man z. B. die Gleichung

$$2x + 3y + 18 = 5xy;$$

ist $\alpha\beta + \gamma\lambda = 6 + 90 = 96$. Aber $96 = \pm 1 . \mp 96 = \pm 2 . \mp 48 = \pm 3 . \mp 32 = \pm 4 . \mp 24 = \pm 6 . \mp 16 = \pm 8 . \mp 12$, und

$$\frac{3 + 2}{5} = 1,\ \frac{2 + 48}{5} = 10;$$

$$\frac{3 - 48}{5} = -9,\ \frac{2 - 2}{5} = o;$$

$$\frac{3 - 3}{5} = o,\ \frac{2 - 32}{5} = -6;$$

$$\frac{3 + 32}{5} = 7,\ \frac{2 + 3}{5} = 1;$$

$$\frac{3 - 8}{5} = -1,\ \frac{2 - 12}{5} = -2;$$

$$\frac{3 + 12}{5} = 3,\ \frac{2 + 8}{5} = 2.$$

Demnach hat man folgende Auflösungen in ganzen Zahlen:

$$x = -9, -1, 0, 1, 3, 7;$$
$$y = 0, -2, -6, 10, 2, 1.$$

17. Die vorigen Exempel sind zum Theil von Euler ent-

ach Lagrange mitgetheilte allgemeine Auflö-
elche immer ſicher zum Zweck führt, hat Euler
eſondern Fällen kann man zuweilen kürzer ver-
n man, auf ähnliche Art wie (11. 13.), aus
für y die Ganzen durch Diviſion ausſondert.

$$xy + x^2 = 2x + 3y + 29$$

Gleichung; ſo erhält man

$$\frac{x - x^2 + 29}{x - 3} = -x - 1 + \frac{26}{x - 3}.$$

-3 ein Theiler von 26 ſeyn. Die Theiler von
$\pm 1, \pm 2, \pm 13, \pm 26$. Dies giebt

$= \pm 1$; $x = 4$, $y = 21$; $x = 2$, $y = -29$;

$= \pm 2$; $x = 5$, $y = 7$; $x = 1$, $y = -15$;

$= \pm 13$; $x = 16$, $y = -15$; $x = -10$, $y = 7$;

$= \pm 26$; $x = 29$, $y = -29$; $x = -23$, $y = 21$;

gen in ganzen Zahlen. Will man nur poſitive
rhält man nur:

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 = v^2;$$

ilt man, diese Gleichung nach x auflösend, für

$= A$, $\beta^2 - 4\alpha\gamma = B$: $2\gamma x + \beta = \sqrt{Av^2 + B}$,

also unsere Aufgabe ferner darauf reducirt ist, v bestimmen, daß $Av^2 + B$ ein vollkommnes Qua- wird.

). Hierbei ist nun zunächst zu bemerken, daß, wenn r B einen quadratischen Factor hat, derselbe unbe- t der Allgemeinheit weggelassen werden kann. Wäre h $A = m^2A'$, $B = n^2B'$, und es wäre ein Werth v gefunden, für welchen $A'v^2 + B'$ ein vollkomm- uadrat ist; so setze man $v = \frac{n}{m}v'$. Dann ist $Av^2 = n^2(A'v'^2 + B')$ ebenfalls ein vollkommnes Qua- Wir wollen also annehmen, daß A, B schon von quadratischen Factoren befreit seyen. Man braucht e Werthe von v' mit $\frac{n}{m}$ zu multipliciren.

l. Setzt man nun $v = \frac{p}{q}$, wo p, q ganze Zahlen so wird

$$Av^2 + B = \frac{Ap^2 + Bq^2}{q^2},$$

$v^2 + B$ ist ein vollkommnes Quadrat, wenn Ap^2 l^2 es ist. Demnach ist die Aufgabe jetzt auf folgende rt:

) q in ganzen Zahlen so zu bestimmen, daß Ap^2 ^{2} ein vollkommnes Quadrat wird, oder, was dassel- die Gleichung

$$Ap^2 + Bq^2 = z^2$$

nzen Zahlen aufzulösen.

2. Man kann hierbei Folgendes annehmen:

a) p, q, z haben keinen gemeinschaftlichen Fac- weil, für $p = hp'$, $q = hq'$, $z = hz'$, man durch ion mit h^2 leicht

$$Ap'^2 + Bq'^2 = z'^2$$

ufzulösende Gleichung erhalten würde.

b) Nicht zwei der Größen p, q, z haben einen

(Zahl. I. 2.). Also muß h ein Factor von
I. 7.), welches nicht möglich, da B als vo
quadratischen Factoren befreit vorausgesetzt r

c) Ferner sind auch A, q relativ
Denn für $A = hA'$, $q = hq'$ wäre

$$z^2 = (A'p^2 + Bhq'^2)h.$$

Folglich hätte z^2 mit q den Factor h gemein
offenbar auch z und q entweder h selbst, od
sor von h, als Factor gemein haben würde
Eben so überzeugt man sich, daß auch B, p
zahlen seyn müssen.

23. Man nehme nun an, daß der Coef
$< B$ sey, wobei, wie immer auch im Folge
absoluten Werthe der Größen berücksichtigt
gebe der Gleichung die Form

$$z^2 - Bq^2 = Ap^2,$$

welches offenbar verstattet ist, da die Gleichu
auf p und q ganz einerlei Gestalt hat.

24. Wäre nun die Gleichung in ganzen Z
bar, so daß sich für z, q ein Paar ganzza
M, N finden ließen; so müßte, da A, q, d.
lative Primzahlen sind (22. c.), auch die Gl

Zahlen, sind. Setzt man dies in unsere Gleichung; so erhält man leicht:

$$\frac{(n^2 - B)q^2}{A} - 2nqq' + Aq'^2 = p^2.$$

Es muß also $\frac{(n^2 - B)q^2}{A}$, d. i., weil A, q relative Primzahlen sind (22. c.), $\frac{n^2 - B}{A}$ eine ganze Zahl seyn. Wäre ein Werth von n gefunden, für welchen dieser Bruch eine ganze Zahl würde; so wäre

$$z = nq - Aq',$$

wo q' willkührlich ist.

25. Wir bemerken hier besonders, daß man für n nur alle die ganzzahligen Werthe zu setzen braucht, welche $\frac{1}{2}$A nicht übersteigen. Sind nämlich n', n'', n''', u. s. f. die Werthe von n, welche $\frac{1}{2}$A nicht übersteigen und $n^2 - B$ durch A theilbar machen; so sind auch $n' \pm \mu' A$, $n'' \pm \mu'' A$, $n''' \pm \mu''' A$, ꝛc. Werthe von n (14.). Dies, in die Formel

$$(n^2 - B)q^2 - 2Anqq' + A^2q'^2 = Ap^2,$$
$$(nq - Aq')^2 - Bq^2 = Ap^2$$

gesetzt, giebt:

$$\{n'q - A(q' \mp \mu'q)\}^2 - Bq^2 = Ap^2,$$

welches, da q' ganz willkührlich, von

$$(nq - Aq')^2 - Bq^2 = Ap^2$$

nicht unterschieden ist. Man wird also für n alle ganze Zahlen, welche $\frac{1}{2}$A nicht übersteigen, setzen, und versuchen, ob $\frac{n^2 - B}{A}$ eine ganze Zahl wird. Findet sich unter diesen Werthen kein genügender; so ist die gegebene Aufgabe in rationalen Zahlen nicht auflösbar. Finden sich aber im angegebenen Intervall genügende Werthe von n; so rechnet man für jeden derselben auf folgende Art weiter.

26. Sey $n^2 - B = AA'x^2$, wo x^2 der größte in $\frac{n^2 - B}{A}$ enthaltene quadratische Factor ist; so ist

$$A'x^2q^2 - 2nqq' + Aq'^2 = p^2,$$

woraus, wenn auf beiden Seiten mit $A'x^2$ multiplicirt, und dann auf der linken n^2q' addirt und subtrahirt wird:

Bedingung macht.

27. Iſt der poſitive Werth des eine Quadratzahl $= A^2$; ſo iſt, für Gleichung von der Form

$$x'^2 - p''^2 = Bq'^2.$$

Iſt aber der poſitive Werth von A' keine auch > 1; ſo rechnet man, wenn der noch $\gtrless B$ iſt, auf folgende Art weiter. lich zu merken, daß immer $A' < A$ iſt ſchlimmſten Falle, wenn B negativ, $=$

$$A' = \frac{n^2 - B}{Ax^2} = \frac{n^2 + \mathfrak{B}}{Ax^2}$$

doch immer $< A$ ſeyn muß, indem nach

$$n^2 \gtrless \tfrac{1}{4}A^2, \quad \mathfrak{B} \gtrless A;$$

$$\frac{n^2 + \mathfrak{B}}{Ax^2} \gtrless \frac{\frac{1}{4}A^2 + A}{Ax^2}, \gtrless \frac{\frac{1}{4}A \cdot}{x^2}$$

aber $A \gtrless 2$, $x^2 - \frac{1}{4} \gtrless \frac{3}{4}$, $A(x^2 -$ Alſo

$$\frac{n^2 + \mathfrak{B}}{Ax^2} < \frac{\frac{1}{4}A + A(x^2 - \frac{1}{4})}{x^2},$$

d. i. $A' < A$, immer blos in Bezug

$$\begin{aligned} z^2 - Bq^2 &= Ap^2, \\ z'^2 - Bq'^2 &= A'p'^2, \\ z''^2 - Bq''^2 &= A''p''^2, \\ z'''^2 - Bq'''^2 &= A'''p'''^2, \end{aligned}$$

u. s. f. u. s. f.

t, in welchen A, A′, A″, A‴, u. s. f. eine abneh-
e Reihe bilden. Dadurch muß man nothwendig ir-
einmal auf eine Gleichung

$$z_1^2 - Bq_1^2 = Cp_1^2$$

nen, in welcher C < B ist. Aus dieser Gleichung
man wie vorher wieder eine ähnliche Reihe von Glei-
zen ab:

$$\begin{aligned} z_1^2 - Cp_1^2 &= Bq_1^2, \\ z'_1{}^2 - Cp'_1{}^2 &= B'q'_1{}^2, \\ z''_1{}^2 - Cp''_1{}^2 &= B''q''_1{}^2, \\ z'''_1{}^2 - Cp'''_1{}^2 &= B'''q'''_1{}^2, \end{aligned}$$

u. s. f. u. s. f.

vieder B, B′, B″, B‴, u. s. f. eine abnehmende Reihe
n, und man also auf eine Gleichung

$$z_2^2 - Cp_2^2 = Dq_2^2$$

nen muß, in welcher D < C, woraus man dann wie-
bleitet:

$$\begin{aligned} z_2^2 - Dq_2^2 &= Cp_2^2, \\ z'_2{}^2 - Dq'_2{}^2 &= C'p'_2{}^2, \\ z''_2{}^2 - Dq''_2{}^2 &= C''p''_2{}^2, \\ z'''_2{}^2 - Dq'''_2{}^2 &= C'''p'''_2{}^2, \end{aligned}$$

u. s. f. u. s. f.

auch C, C′, C″, C‴, u. s. f. eine abnehmende Reihe
en, und man also endlich auf

$$z_3^2 - Dq_3^2 = Ep_3^2$$

ihrt werden muß, wo E < D. In den Gleichungen

$$\begin{aligned} z^2 - Bq^2 &= Ap^2, \\ z_1^2 - Cp_1^2 &= Bq_1^2, \\ z_2^2 - Dq_2^2 &= Cp_2^2, \\ z_3^2 - Ep_3^2 &= Dq_3^2, \end{aligned}$$

u. s. f. u. s. f.

en nun auch A, B, C, D, E, u. s. f. eine abnehmen-
Reihe ganzer Zahlen, so daß man also durch diese Ope-

ſeyn werden. Setzt man nun auch $p_r =$

$$(z_r - q_r)(z_r + q_r) = \alpha_1\beta_1\pi^2\varrho^2$$

und die Gleichung wird aufgelöſet ſeyn, aus den Gleichungen

$$z_r + q_r = \alpha_1\pi^2,\ z_r - q_r = \beta$$

beſtimmt, woraus:

$$z_r = \frac{\alpha_1\pi^2 + \beta_1\varrho^2}{2},\ q_r = \frac{\alpha_1\pi^2 - \beta_1\varrho^2}{2}$$

π, ϱ können willkührlich angenommen w ten die Brüche vielleicht den Bruch $\frac{1}{2}$, und ganzen Zahlen; ſo ſetze man

$$z_r = \alpha_1\pi^2 + \beta_1\varrho^2,\ q_r = \alpha_1\pi^2 - \beta_1\varrho^2,$$

weil dann

$$z_r^2 - q_r^2 = 2\alpha_1\pi^2 . 2\beta_1\varrho^2 = \alpha_1\beta_1 . (2$$

d. i. $z_r^2 - q_r^2 = Ap_r^2$ iſt, wie verlan

29. Dieſe Auflöſung der Gleichungen des mit zwei Unbekannten hat dem Weſen ſo Lagrange gegeben (Mém. de Berlin d'Algèbre par L. Euler. Nouv. éd T. II. p. 388. Additions. §. V.);

muß in dieſem Falle $2v^2 - 2$ ein vollkommnes Quadrat werden, und man hat für $v = \frac{p}{q}$ folglich die Gleichung

$$2p^2 - 2q^2 = z^2,\ z^2 + 2q^2 = 2p^2.$$

Alſo muß $\frac{n^2+2}{2}$ eine ganze Zahl ſeyn, und man braucht n nicht > 1 zu nehmen. Demnach $n = o$, $A' = 1$, $x = 1$, und folglich die transformirte Gleichung:

$$z'^2 + 2q'^2 = p'^2,\ z'^2 - p'^2 = -2q'^2.$$

Da nun $-2 = -2.1$; ſo ſetze man $\alpha_1 = -2$, $\beta_1 = 1$, und man hat:

$$z' = -\frac{2\pi^2 - \varrho^2}{2},\ p' = -\frac{2\pi^2 + \varrho^2}{2},\ q' = \pi\varrho.$$

Aber (26.)

$$xp = p',\ A'x^2q - nq' = z',\ z = nq - Aq'.$$

Alſo $p = p'$, $q = z'$, d. i.

$$p = -\frac{2\pi^2 + \varrho^2}{2},\ q = -\frac{2\pi^2 - \varrho^2}{2};\ v = \frac{p}{q} = \frac{2\pi^2 + \varrho^2}{2\pi^2 - \varrho^2}.$$

Für $\pi = 1$, $\varrho = 1$ iſt $v = 3$, $2v^2 - 2 = 2.9 - 2 = 16 = 4^2$. Für $\pi = 2$, $\varrho = 3$ iſt $v = -17$, $2v^2 - 2 = 576 = 24^2$.

31. Zwei Quadratzahlen zu finden, deren Summe ein Quadrat iſt, ſetze man

$$p^2 + q^2 = z^2,\ z^2 - q^2 = p^2.$$

Der Coefficient von p^2 iſt $= 1 = 1.1$. Alſo $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 1$, und

$$p = \pi\varrho,\ q = \frac{\pi^2 - \varrho^2}{2};\ \text{oder}\ p = 2\pi\varrho,\ q = \pi^2 - \varrho^2.$$

32. Sey x ſo zu beſtimmen, daß $7 + 15x + 13x^2$ ein vollkommnes Quadrat wird. Hier iſt (19.) $\alpha = 7$, $\beta = 15$, $\gamma = 13$, $A = 52 = 2^2.13$, $B = -139$. Alſo $13v'^2 - 139$ zu einem Quadrat zu machen, oder

$$z^2 - 13p^2 = -139q^2$$

die aufzulöſende Gleichung. Es muß alſo $\frac{n^2 - 13}{-139}$ eine ganze Zahl ſeyn, wobei n nicht $> \frac{139}{2}$. Dies iſt der Fall für $n = 41$, wodurch obiger Bruch $= -12 = -3.2^2$. Alſo $A' = -3$, $x = 2$, und

$$z'^2 - 13p'^2 = -3q'^2,\ \text{oder}\ z'^2 + 3q'^2 = 13p'^2,$$

folglich

$$z'''^2 + 3q'''^2 = p'''^2, \text{ oder } z'''^2 - p'''^2 :$$

Da nun $-3 = -3.1$, also $\alpha_1 =$
ist; so ist

$$z''' = \frac{-3\pi^2 + \varrho^2}{2}, \quad p''' = \frac{-3\pi^2 - \varrho}{2}$$

Für $\pi = 1$ und $\varrho = 1$ z. B. ist

$$z''' = -1, \; p''' = -2, \; q''' =$$

Die allgemeinen Gleichungen in (26.)

$$\varkappa p = p', \; A'\varkappa^2 q - nq' = z', \; z = nq$$

geben aber:

$$p'' = p''', \; q'' = z''', \; z'' = -3q''';$$
$$= -2, \quad = -1, \quad = -3;$$
$$p' = p'', \quad q' = \frac{z'' + 6q''}{3}, \; z' = 6q'$$
$$= -2, \quad = -3, \qquad = -5$$
$$q = \frac{q'}{2}, \quad p = \frac{z' + 41p'}{-12}, \; z = 41p \cdot$$
$$= -\tfrac{3}{2}, \quad = \tfrac{29}{4}, \qquad = \tfrac{77}{4}.$$

Folglich $v' = \frac{p}{q} = -\frac{29}{6}$ und $v =$
Es ist $52v^2 - 139 = (\frac{77}{6})^2$. End
$= \sqrt{Av^2 + B}$, d. i. $26x + 15 =$
$= -\frac{1}{\ldots}$, oder $x = -\frac{167}{\ldots}$. Dies

Also muß $\frac{n^2+5}{23}$ Zahl seyn, für n nicht $> \frac{23}{4}$. Dies ist der Fall für $n = 8$, wofür obiger Bruch $= 3 = 3.1$. Also $A' = 3$, $\varkappa = 1$, und $z'^2 + 5q'^2 = 3p'^2$, $z'^2 - 3p'^2 = -5q'^2$ die neue Gleichung. Also muß $\frac{n'^2-3}{-5}$ eine ganze Zahl seyn, für n nicht $> \frac{5}{4}$. Ein solcher Werth von n' existirt aber nicht, und daher kann $23v^2 - 5$ nie ein vollkommnes Quadrat werden.

34. Hat man einen Werth l von x gefunden, für welchen $\alpha + \beta x + \gamma x^2$ ein vollkommnes Quadrat wird; so lassen sich daraus auf folgende Art leicht andere Werthe ableiten. Man setze nämlich $x = l + y$; so wird

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 = \alpha + \beta l + \gamma l^2 + (\beta + 2\gamma l)y + \gamma y^2$$
$$= f^2 + (\beta + 2\gamma l)y + \gamma y^2,$$

wenn wir $\alpha + \beta l + \gamma l^2$, welches ein vollkommnes Quadrat ist, $= f^2$ setzen. Die Quadratwurzel aus dem gefundenen Ausdrucke setze man $= f + \frac{g}{h}y$; so wird derselbe

$$= f^2 + \frac{2fg}{h}y + \frac{g^2}{h^2}y^2.$$

Also, wenn man f^2 auf beiden Seiten aufhebt, und durch y dividirt:

$$\beta + 2\gamma l + \gamma y = \frac{2fg}{h} + \frac{g^2}{h^2}y,$$

$$y = \frac{h\{2fg - h(\beta + 2\gamma l)\}}{\gamma h^2 - g^2},$$

$$x = \frac{l(\gamma h^2 - g^2) + h\{2fg - h(\beta + 2\gamma l)\}}{\gamma h^2 - g^2},$$

wo g, h zwei völlig unbestimmte Größen sind, und

$$f = \sqrt{\alpha + \beta l + \gamma l^2}$$

ist.

35. Durch diese Methoden lassen sich nun zwar alle Gleichungen des zweiten Grades mit zwei Unbekannten in rationalen Zahlen auflösen; sie sind aber nicht ausreichend, wenn man nur ganze Zahlen verlangt. Die Untersuchung über diesen Gegenstand hängt so unmittelbar mit der Entwickelung irrationaler Quadratwurzeln in Kettenbrüche (Kettenbruch. 28.) zusammen, daß darüber hier zunächst noch Einiges vorausgeschickt werden muß.

gemäß zu beſtimmen, weil dann

$$\sqrt{A} = a + \frac{1}{a' + \frac{1}{a'' + \frac{1}{a''' + \ldots}}}$$

Man erhält aber leicht:

$$x = \frac{1}{\sqrt{A} - a}, \; x' = \frac{1}{x - a'}, \; x'' = \frac{1}{x' - a''}, \; x'''$$

und, wenn man Zähler und Nenner des $\sqrt{A} + a$ multiplicirt:

$$x = \frac{a + \sqrt{A}}{A - a^2} = \frac{Q' + \sqrt{A}}{P'},$$

für $Q' = a$, $P' = \frac{A - a^2}{1}$.

Setzt man nun dieſen Werth von x für x', und multiplicirt immer Zähler und Nenner mit ſolchen gemeinſchaftlichen Factor, daß tional wird; ſo erhält man leicht:

$$x' = \frac{P'}{\sqrt{A} - (a'P' - Q')} = \frac{P'}{\sqrt{A} - Q''} = \frac{P'(\sqrt{A} + Q'}{A - Q''^2}$$

für $Q'' = a'P' - Q'$, $P'' = \frac{A - Q''^2}{P'}$

$$x'' = \frac{P''}{\sqrt{A} - (a''P'' - Q'')} = \frac{P''}{\sqrt{A} - Q'''} = \frac{P''(\sqrt{A} + Q''}{A - Q'''^2}$$

Bezeichnen wir nun durch das zwiſchen zwei Größen geſetzte Zeichen $<$, daß die erſte das größte in der zweiten enthaltene Ganze ſeyn ſolle, und ſetzen $Q = 0$, $P = 1$; ſo haben wir:

$$\begin{array}{llll} Q = 0, & P = 1, & a < \sqrt{A} \\ Q' = a, & P' = \frac{A - Q'^2}{P}, & a' < \frac{\sqrt{A} + Q'}{P'}; \\ Q'' = a'P' - Q', & P'' = \frac{A - Q''^2}{P'}, & a'' < \frac{\sqrt{A} + Q''}{P''}; \\ Q''' = a''P'' - Q'', & P''' = \frac{A - Q'''^2}{P''}, & a''' < \frac{\sqrt{A} + Q'''}{P'''}; \\ Q'''' = a'''P''' - Q''', & P'''' = \frac{A - Q''''^2}{P'''}, & a'''' < \frac{\sqrt{A} + Q''''}{P''''}; \end{array}$$

u. ſ. f. u. ſ. f.

Für $A = 45$ erhält man z. B. für a, a', a'', ... die Werthe 6, 1, 2, 2, 2, 1, 12, ...

37. Sey nun

$$\sqrt{A} = a + \frac{1}{a' + \ldots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n + \frac{1}{x_n}}}}$$

und die den drei letzten Nennern entſprechenden Partialwerthe des Kettenbruchs ſeyen $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$, $\frac{p_n}{q_n}$, $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ ſo iſt (Kettenbruch. 5.), da offenbar $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \sqrt{A}$ iſt:

$$\sqrt{A} = \frac{p_n x_n + p_{n-1}}{q_n x_n + q_{n-1}}.$$

Setzt man nun (36.)

$$x_n = \frac{\sqrt{A} + Q_{n+1}}{P_{n+1}};$$

multiplicirt auf beiden Seiten mit dem Nenner, und ſondert das Rationale und Irrationale von einander; ſo erhält man:

$$p_n Q_{n+1} + p_{n-1} P_{n+1} - q_n A = [q_n Q_{n+1} + q_{n-1} P_{n+1} - p_n]\sqrt{A}.$$

Das Rationale kann aber dem Irrationalen nicht gleich ſeyn, ohne daß

$$p_n Q_{n+1} + p_{n-1} P_{n+1} - q_n A = 0, \quad q_n Q_{n+1} + q_{n-1} P_{n+1} - p_n = 0,$$

woraus durch Elimination:

Da nun (Kettenbruch. 2.) $\frac{p_n}{q_n} \lessgtr \sqrt{}$
$p_n p_n - q_n q_n A$ negativ oder positiv iſt, je
oder ungerade iſt; ſo iſt klar, daß P_{n+1}

Da ferner (36.) überhaupt

$$P_n P_{n+1} = A - Q_{n+1} Q_{n+1},$$

$P_n P_{n+1}$ aber, wie wir ſo eben geſehen ha
tiv iſt; ſo iſt immer

$$Q_{n+1} Q_{n+1} < A,$$

oder der abſolute Werth von $Q_{n+1} < \sqrt{}$
die Brüche

$$\frac{\sqrt{A} + Q'}{P'}, \frac{\sqrt{A} + Q''}{P''}, \frac{\sqrt{A} + Q'}{P'''}$$

alle poſitiv ſind.

Es läßt ſich aber auch leicht zeigen, da
zeichneten Größen ſelbſt poſitiv ſind. S
iſt, weil a_n das größte in $\frac{\sqrt{A} + Q_n}{P_n}$ enth
offenbar

$$2a_n > \frac{\sqrt{A} + Q_n}{P_n}, \quad 2a_n P_n > \sqrt{}$$

Aber nach dem Vorigen $Q_n < \sqrt{A}$. Al
$a_n P_n > Q_n$. Folglich $a_n P_n - Q_n$, t

ist; so kann $a_n P_n$, folglich auch sowohl a_n als P_n die Größe 2a nicht übersteigen. Also können die durch P, Q bezeichneten Größen nur eine bestimmte endliche Anzahl von Werthen haben, und auch die Anzahl der Verbindungen je zweier dieser Werthe unter einander kann nur endlich seyn. Der Kettenbruch für die irrationale Größe $\sqrt{A}$ läuft aber natürlich ins Unendliche fort. Daher muß jederzeit irgend eine Combination der Werthe von P nnd Q, d. i. einer der Brüche

$$\frac{rA + Q'}{P'}, \frac{rA + Q''}{P''}, \frac{rA + Q'''}{P'''}, \ldots$$

einmal wiederkehren. Dann kehrt aber auch offenbar eine gewisse Anzahl vorhergehender Nenner in derselben Ordnung immer wieder, so daß also jeder Kettenbruch, welcher eine irrationale Quadratwurzel darstellt, periodisch ist.

40. Um den Anfang der Periode näher zu bestimmen, wollen wir setzen, daß a_{n+1} wiedergekehrt sey, so daß $a_{n+1} = a_{n+i+1}$, und folglich auch $Q_{n+1} = Q_{n+i+1}$, $P_{n+1} = P_{n+i+1}$ ist. Nun ist (36.)

$$Q_{n+1} = a_n P_n - Q_n,$$
$$P_n P_{n+1} = A - Q_{n+1} Q_{n+1};$$
$$Q_{n+i+1} = a_{n+i} P_{n+i} - Q_{n+i},$$
$$P_{n+i} P_{n+i+1} = A - Q_{n+i+1} Q_{n+i+1}.$$

Folglich nach der Annahme:

$$P_n P_{n+1} = A - Q_{n+1} Q_{n+1}, \quad P_{n+i} P_{n+1} = A - Q_{n+1} Q_{n+1},$$

woraus unmittelbar folgt, daß $P_n = P_{n+i}$ ist. Also ist

$$Q_{n+1} = a_n P_n - Q_n, \quad Q_{n+1} = a_{n+i} P_n - Q_{n+i},$$

woraus durch Subtraction:

$$\frac{Q_n - Q_{n+i}}{P_n} = a_n - a_{n+i},$$

oder, weil $P_n = P_{n+i}$ ist:

$$\frac{Q_{n+i} - Q_n}{P_{n+i}} = a_{n+i} - a_n.$$

Es ist aber ferner (37.)

$$q_{n-1} Q_n + q_{n-2} P_n = p_{n-1}, \quad Q_n = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}} P_n.$$

Da nun $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ ein Näherungswerth des gegebenen Ketten-

$a - Q = a$, $P = 1$ (37.), alſo
$a - Q < P$ iſt. Für $n = 1$ iſt $a - Q'$
$a - Q' < P'$. Ganz eben ſo hat man
$< P_{n+i}$. Folglich, da $P_n = P_{n+i}$ iſt:

$$a - Q_n < P_{n+i}, \quad a - Q_{n+i} < P_n$$

Da nun nie $Q_n > a$, $Q_{n+i} > a$ iſt (38.
jenachdem $Q_{n+i} \gtrless Q_n$ iſt:

$$Q_{n+i} - Q_n < P_{n+i}, \quad Q_n - Q_{n+i} <$$

In den beiden obigen Brüchen:

$$\frac{Q_n - Q_{n+i}}{P_n}, \quad \frac{Q_{n+i} - Q_n}{P_{n+i}}$$

iſt alſo immer der Zähler kleiner als der
Brüche ſind aber den ganzen Zahlen a_n
$a_{n+i} - a_n$ gleich. Alſo müſſen dieſe ganze
d. h. es muß in beiden Fällen $a_n = a_{n+i}$ ſe
der Fall, wo $n = 0$, ausgeſchloſſen. J
a_{n+i+1}; ſo iſt auch $a_n = a_{n+i}$, und man
irgend ein Nenner a_{n+1} einmal wiederge
fortgeſetzte Anwendung obiger Schlußart:

$$a_{nti} = a_{ntiti}, \quad a_n = a_{nti},$$

Der vollſtändige a_i entſprechende Quotient ſey $= a_i + z$; ſo iſt (Kettenbruch. 5.)

$$\frac{P_i}{q_i} = \gamma A = \frac{P_{i-1}(a_i + z) + P_{i-2}}{q_{i-1}(a_i + z) + q_{i-2}}.$$

Da aber a_i der letzte Nenner in einer Periode iſt; ſo iſt offenbar $z = \sqrt{A} - a$. Alſo

$$\gamma A = \frac{P_{i-1}(\gamma A + a_i - a) + P_{i-2}}{q_{i-1}(\gamma A + a_i - a) + q_{i-2}},$$

woraus

$$\begin{aligned} &Aq_{i-1} - (a_i - a)P_{i-1} - P_{i-2} \\ &= \left\{P_{i-1} - (a_i - a)q_{i-1} - q_{i-2}\right\}\gamma A. \end{aligned}$$

Alſo nach einer ſchon oben öfter gebrauchten Schlußart:

$$Aq_{i-1} - (a_i - a)P_{i-1} - P_{i-2} = 0,$$

$$P_{i-1} - (a_i - a)q_{i-1} - q_{i-2} = 0,$$

woraus leicht:

$$\frac{P_{i-1}}{q_{i-1}} = a_i - a + \frac{q_{i-2}}{q_{i-1}}.$$

Da nun nach der Natur der Kettenbrüche immer $q_{i-2} < q_{i-1}$ iſt; ſo iſt $a_i - a$ das größte in $\frac{P_{i-1}}{q_{i-1}}$ enthaltene Ganze. Das in jedem Partialwerthe, alſo auch in letzterem, enthaltene größte Ganze iſt aber $= a$. Folglich $a_i - a = a$, $a_i = 2a$, ſo daß alſo das letzte Glied der Periode immer $= 2a$ iſt, wie auch leicht zu berechnende Beiſpiele lehren werden.

42. Setzt man $a_i = 2a$ in die Gleichung

$$P_{i-1} - (a_i - a)q_{i-1} - q_{i-2} = 0,$$

und dividirt durch q_{i-1}; ſo erhält man:

$$\frac{P_{i-1}}{q_{i-1}} - a = \frac{q_{i-2}}{q_{i-1}}.$$

Läßt man nun a_i die Gränze der erſten Periode ſeyn; ſo iſt

$$\frac{P_{i-1}}{q_{i-1}} - a = \frac{1}{a' + \frac{1}{a'' + \ldots + \frac{1}{a_{i-1}}}}.$$

$$\frac{q_{i-1}}{q_{i-2}} = a_{i-1} + \frac{q_{i-3}}{q_{i-2}},$$

$$\frac{q_{i-2}}{q_{i-3}} = a_{i-2} + \frac{q_{i-4}}{q_{i-3}}.$$

$$\frac{q_{i-3}}{q_{i-4}} = a_{i-3} + \frac{q_{i-5}}{q_{i-4}},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{q'''}{q''} = a''' + \frac{q'}{q''},$$

$$\frac{q''}{q'} = a'' + \frac{1}{q'},$$

$$q' = a',$$

woraus durch ſucceſſive Subſtitution:

$$\frac{q_{i-2}}{q_{i-1}} = \frac{1}{a_{i-1} + \frac{1}{a_{i-2} + \cdots + \frac{1}{a'' +}}}$$

erhalten wird. Folglich nach dem Obigen

$$\frac{1}{a' + \frac{1}{a'' + \cdots + \frac{1}{a_{i-1}}}} = \frac{1}{}$$

identiſch ſeyn müſſen. Daher iſt immer die Reihe der Glieder der Periode, ohne das letzte Glied, einerlei mit der umgekehrten Reihe dieſer Glieder, oder die Reihe der Glieder der Periode iſt ſymmetriſch. Bei $\sqrt{45}$ iſt die Periode ohne das letzte Glied: 1, 2, 2, 2, 1. Das letzte Glied iſt $= 12 = 2.6$, und 6 die in $\sqrt{45}$ enthaltene ganze Zahl.

43. Da nun (39.) für den Endpunkt irgend einer Periode

$$Q_i + Q_{i+1} = a_i P_i$$

und $a_i = 2a$ (41.), Q_i, Q_{i+1}, P_i aber ganze poſitive Zahlen ſind, deren zwei erſtere nie $> a$ werden können (38. 39.); ſo iſt klar, daß $Q_i = Q_{i+1} = a$, und $P_i = 1$ ſeyn muß. Aber (37.)

$$\mp P_i = p_{i-1}p_{i-1} - q_{i-1}q_{i-1}A;$$

alſo $p_{i-1}p_{i-1} - q_{i-1}q_{i-1}A = \mp 1$, wo das obere oder untere Zeichen gilt, jenachdem $i - 1$ gerade oder ungerade iſt, d. i. jenachdem i ungerade oder gerade iſt, oder

$$p_{i-1}p_{i-1} - q_{i-1}q_{i-1}A = \pm 1,$$

jenachdem $\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}} >$ oder $< \sqrt{A}$ iſt.

44. Sey nun die unbeſtimmte Gleichung des zweiten Grades $x^2 - Ay^2 = \mp 1$, wo A eine ganze Zahl iſt, in ganzen Zahlen aufzulöſen. Es erhellet zunächſt, daß A nicht negativ ſeyn kann, weil die Gleichung $x^2 + Ay^2 = -1$ offenbar unmöglich, die Gleichung $x^2 + Ay^2 = 1$ aber augenſcheinlich nur die Auflöſungen $x = 1$, $y = 0$ geſtattet. Auch darf A kein vollkommnes Quadrat ſeyn, indem für $A = a^2$ und $x^2 - Ay^2 = +1$, $(x + ay)(x - ay) = +1$, alſo $x + ay = 1$, $x - ay = 1$ ſeyn müßte, woraus $x = 1$, $y = 0$ als einzige Auflöſung folgte. Für $x^2 - Ay^2 = -1$, hätte man eben ſo $(x + ay)(x - ay) = -1$, alſo $x + ay = 1$, $x - ay = -1$, oder $x + ay = -1$, $x - ay = 1$. Im erſten Falle erhielte man $x = 0$, $y = \frac{1}{a}$, im andern $x = 0$, $y = -\frac{1}{a}$.

) alſo A poſitiv und eine unvollkommne Q
d zunächſt $x^2 - Ay^2 = +1$. Man e
$\sqrt{A}$ in einen Kettenbruch, und bezeichne
a_{i-1} gehörenden Partialbruch mit $\frac{p}{q}$. Iſt
hl der Glieder einer Periode, alſo auch
; ſo iſt immer (43.) $p^2 - Aq^2 = +1$,
der entſprechenden Werthe von p, q ſind Auf-
rer Gleichung in ganzen Zahlen. Iſt aber i,
die Anzahl der Glieder einer einzelnen Periode
, ungerade; ſo ſind die vorletzten Glieder der
ioden

$a_{i-1}, a_{2i-1}, a_{3i-1}, a_{4i-1}, a_{5i-1}, \ldots$

-1 gerade, $2i-1$ ungerade, $3i-1$ ge-
1 ungerade, $5i-1$ gerade, u. ſ. f. Alſo
ähler und Nenner der den Nennern a_{2i-1},
, u. ſ. f. entſprechenden Partialwerthe, Auf-
rer Gleichung in ganzen Zahlen, Zähler und
en Nennern $a_{i-1}, a_{3i-1}, a_{5-1}$, u. ſ. f. ent-
artialwerthe dagegen Auflöſungen der Glei-
$Ay^2 = -1$ in ganzen Zahlen, ſo daß alſo
dem Fall, wenn die Anzahl der Glieder ei-
Periode des Kettenbruchs für $\sqrt{A}$ unge-
er auflösbar iſt.

Für $x^2 - 53y^2 = \pm 1$ hat man

$$\sqrt{53} = 7 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{14 + \ldots}}}}}$$

Die Periode hat 5 Glieder, also eine ungerade Anzahl. Der 5te Partialwerth ist $= \frac{182}{25}$, und es ist wirklich $182^2 - 53.25^2 = -1$, der 10te Partialwerth ist $= \frac{66249}{9100}$, und es ist wirklich $66249^2 - 53.9100^2 = +1$. Eben so sind nun der 15te, 25ste, 35ste u. s. f. Partialwerth Auflösungen von $x^2 - 53y^2 = -1$, der 20ste, 30ste, 40ste u. s. f. aber Auflösungen von $x^2 - 53y^2 = +1$.

46. Man hat auch Tafeln der einfachsten Werthe von x, y, welche die Gleichung $x^2 - Ay^2 = +1$ in ganzen rationalen Zahlen auflösen, für die einzelnen Werthe von A berechnet. Euler (Algebra. II. §. 111.) giebt eine Tafel für $A = 2$ bis $A = 99$. Die vollständigste Tafel ist: Canon Pellianus, sive tabula simplicissimam aequationis celeb. $y^2 = ax^2 + 1$ solutionem, pro singulis numeri dati valoribus ab 1 usque ad 1000 in numeris rat. iisdemque integris exhibens. Autore C. F. Degen. Hafniae. 1817. Man nennt nämlich die Aufgabe auch Pells Aufgabe (S. diesen Art.). Legendre (Théorie des nombres; am Ende), giebt eine Tafel bis $A = 135$, welche die einfachsten Auflösungen von $x^2 - Ay^2 = \pm 1$ enthält.

47. Hat man nur eine Auflösung der Gleichung $x^2 - Ay^2 = \pm 1$, so ist es leicht, mehrere zu finden. Sey zuerst die Anzahl der Glieder der Periode des Kettenbruchs für $\sqrt{A}$ gerade; so ist nur $x^2 - Ay^2 = +1$ in ganzen Zahlen auflösbar (45.). Der erste Näherungsbruch, welcher eine Auflösung giebt, sey $= \frac{p}{q}$, also $p^2 - Aq^2 = +1$. Irgend eine andere Auflösung sey P, Q, also auch $P^2 - AQ^2 = +1$; so ist

$$(p^2 - Aq^2)(P^2 - AQ^2) = +1$$
$$= p^2P^2 + A^2q^2Q^2 - Ap^2Q^2 - Aq^2P^2$$

$(pP + AqQ)^2 - A(pQ + qP)^2$.

haupt

$= pP + AqQ$, $y = pQ + qP$.

$\frac{p'}{q'}$, $\frac{p''}{q''}$ u. ſ. f. Brüche, welche Auflöſungen

hung geben; ſo kann man ſetzen:

$p = p$, $q = q$;
$p' = p^2 + Aq^2$, $q' = 2pq$;
$p'' = pp' + Aqq'$, $q'' = pq' + p'q$;
$p''' = pp'' + Aqq''$, $q''' = pq'' + p''q$;
u. ſ. f. u. ſ. f.

n nach und nach mehrere Auflöſungen erhält.
e Ausdrücke erhält man ſo. Es iſt

$yVA = pP \pm qPVA \pm pQVA + AqQ$
$= (p \pm qVA)(P \pm QVA)$;

an auch ſetzen:

$p \pm qVA = p \pm qVA$,
$p' \pm q'VA = (p \pm qVA)^2$,
$p'' \pm q''VA = (p \pm qVA)^3$,
$p''' \pm q'''VA = (p \pm qVA)^4$,
u. ſ. f. u. ſ. f.

Zusätzen zu Eulers Algebra. 75. zeigt, daß man auf diese Art alle möglichen Auflösungen in ganzen Zahlen erhält.

48. Ist die Anzahl der Glieder der Periode des Kettenbruchs für $\sqrt{A}$ ungerade; so sind die Gleichungen $x^2 - Ay^2 = +1$ und $x^2 - Ay^2 = -1$ beide auflösbar (45.). Man habe, wenn $\frac{p}{q}$ der einfachste Näherungsbruch ist, welcher die Gleichung $x^2 - Ay^2 = \pm 1$ auflöset,

$$\begin{aligned} p^2 - Aq^2 &= -1, \\ p'^2 - Aq'^2 &= +1, \\ p''^2 - Aq''^2 &= -1, \\ p'''^2 - Aq'''^2 &= +1, \\ &\text{u. s. f.} \qquad \text{u. s. f.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (p^2 - Aq^2)(p^2 - Aq^2) &= +1, \\ (p^2 - Aq^2)(p'^2 - Aq'^2) &= -1, \\ (p^2 - Aq^2)(p''^2 - Aq''^2) &= +1, \\ (p^2 - Aq^2)(p'''^2 - Aq'''^2) &= -1, \\ &\text{u. s. f.} \qquad \text{u. s. f.} \end{aligned}$$

Folglich sind (47.)

$$\begin{array}{ll} p; & q; \\ p^2 + Aq^2, & 2pq; \\ pp' + Aqq', & pq' + p'q; \\ pp'' + Aqq'', & pq'' + p''q; \\ pp''' + Aqq''', & pq''' + p'''q; \\ \text{u. s. f.} & \text{u. s. f.} \end{array}$$

abwechselnd Auflösungen der Gleichung $x^2 - Ay^2 = -1$, und $x^2 - Ay^2 = +1$.

Wie vorher (47.) hat man nun wieder

$$x \pm y\sqrt{A} = (p \pm q\sqrt{A})(P \pm Q\sqrt{A})$$

woraus leicht

$$x^2 - Ay^2 = (p^2 - Aq^2)(P^2 - AQ^2) = -1.(\pm 1) = \mp 1,$$

so daß also $x^2 - Ay^2 = \mp 1$, jenachdem $P^2 - AQ^2 = \pm 1$ ist. Also kann man setzen:

$$\begin{aligned} p \pm q\sqrt{A} &= p \pm q\sqrt{A}, \\ p' \pm q'\sqrt{A} &= (p \pm q\sqrt{A})^2, \\ p'' \pm q''\sqrt{A} &= (p \pm q\sqrt{A})^3, \\ p''' \pm q'''\sqrt{A} &= (p \pm q\sqrt{A})^4, \\ &\text{u. s. f.} \qquad \text{u. s. f.} \end{aligned}$$

indem das obere oder untere Zeichen
dem n gerade oder ungerade iſt.

Uebrigens ſind die einfachſten
chungen dieſer Form doch oft ſehr g
die Nothwendigkeit einer Methode,
das Reſultat ohne alles Verſuchen
rer wird. Für die Gleichung $x^2 -$
die einfachſte Auflöſung:

$x = 379516400906811930638$
$y = 120557357903313594474$

49. Es giebt noch einen Fall, t
Gleichung des zweiten Grades mit
mittelbar mittelſt der Kettenbrüche
löſen läßt, wozu folgende vorläufig
lich iſt. Sey $\frac{p}{q}$ ein Bruch, und d
gend einer Größe x ſey $= \pm \frac{\delta}{q^2}$.
gung finden, unter welcher $\frac{p}{q}$ einer
des die Größe x darſtellenden Kette
Ende denke man ſich $\frac{p}{q}$ in einen K
Die Quotienten ſeyen

elben Nenner aus der Entwickelung von x in einen tenbruch hervorgehen. Sey dies der Fall, und also

$$x = \alpha + \frac{1}{\beta + \ldots + \frac{1}{\mu + \frac{1}{y}}}$$

zlich $x = \frac{py + p^0}{qy + q^0}$ (Kettenbruch. 5.) $x - \frac{p}{q} = \frac{\pm 1}{q(qy + q^0)}$ (Kettenbruch. 6.). Dies muß $\pm \frac{\delta}{q^2}$, und folglich das Zeichen von $p^0q - pq^0$ ei- ei mit dem Vorzeichen dieses Bruchs seyn. Dies läßt aber immer annehmen. Man kann nämlich immer vor- etzen, daß $\mu > 1$, weil für $\mu = 1$ das Ende des Ketten- bs für $\frac{p}{q}$, $= \frac{1}{\lambda + \frac{1}{\mu}} = \frac{1}{\lambda + 1}$ wäre, wo $\lambda + 1 > 1$.

ekehrt kann man sich also auch die Reihe der Nenner Näherungswerthe des Kettenbruchs für $\frac{p}{q}$ auf fol- e zwei Arten beendigt denken:

$\ldots \lambda, \mu$; oder $\ldots \lambda, \mu - 1, 1$

$\ldots \frac{m}{n}, \frac{p}{q}$; $\ldots \frac{m}{n}, \frac{p - m}{q - n}, \frac{p}{q}$

n letzten Falle

$$\frac{p}{q} = \frac{p^0 \cdot 1 + m}{q^0 \cdot 1 + n}, \frac{p^0}{q^0} = \frac{p - m}{p - n}$$

muß, wenn $\frac{p^0}{q^0}$ den vor $\frac{p}{q}$ vorausgehenden Näher- swerth bezeichnet. Bezeichnet nun $\frac{p^0}{q^0}$ in beiden Fäl- diesen vorletzten Näherungswerth; so kann man also eder $p^0 = m$, $q^0 = n$, oder $p^0 = p - m$, q^0 $1 - n$ setzen. Im ersten Falle ist $pq^0 - p^0q =$ $- qm$, im andern $= p(q - n) - q(p - m) =$ $-pn - pq + qm = -(pn - qm)$, also der Werth $pq^0 - p^0q$ in beiden Fällen von verschiedenem Zeichen, so olglich auch der Differenz $p^0q - pq^0$ ein beliebiges, also r einerlei Zeichen mit $\pm \frac{\delta}{q^2}$ gegeben werden kann, und also nach dem Obigen ohne Zweideutigkeit

$$\frac{1}{q(qy + q^0)} = \frac{\delta}{q^2}, \quad \delta = \frac{q}{qy + q^0}$$

und entwickelt hieraus den Werth t
mer einen Werth erhalten, welch
Für $y = 1$ erhält man

$$x = \alpha + \frac{1}{\beta + \ldots + \frac{1}{}}$$

Für $y > 1$ kann man ſetzen

$$y = \mu' + \frac{1}{\mu'' + \frac{1}{\mu''' + \ldots}}$$

folglich

$$x = \alpha + \frac{1}{\beta + \ldots + \frac{1}{\mu + }}$$

ſo daß alſo $\frac{P}{q}$ immer unter den G
vorkommen muß, wobei für den F
merken, daß man dann den letzten
cher ſich als eine ganze Zahl darbiet
legen muß. Nimmt man dieſe Z
iſt auch $\frac{P}{q}$ nicht unter den Näher

p, q auflösbar; so muß $\frac{p}{q}$ unter den Näherungsbrüchen zu $\sqrt{A}$ enthalten seyn. Es ist

$$p^2 - Aq^2 = \mp B,$$

$$(p + q\sqrt{A})(p - q\sqrt{A}) = \mp B,$$

$$\frac{p}{q} - \sqrt{A} = \frac{\mp B}{q(p + q\sqrt{A})},$$

$$\sqrt{A} - \frac{p}{q} = \frac{\pm B}{q(p + q\sqrt{A})},$$

oder, für $\sqrt{A} - \frac{p}{q} = \frac{\pm\delta}{q^2}$

$$\frac{\pm\delta}{q^2} = \frac{\pm B}{q(p + q\sqrt{A})}, \quad \delta = \frac{Bq}{p + q\sqrt{A}}.$$

Sey nun $\frac{p^0}{q^0}$ der vor $\frac{p}{q}$ vorausgehende Näherungsbruch zu $\frac{p}{q}$ so kann $\frac{p^0}{q^0}$ immer so bestimmt werden, daß δ mit B einerlei Zeichen hat, und es ist also nur noch zu zeigen, daß

$$\frac{Bq}{p + q\sqrt{A}} < \frac{q}{q + q^0}, \quad B(q + q^0) < p + q\sqrt{A}$$

ist. Setzt man $p = q\sqrt{A} \mp \frac{\delta}{q}$; so verwandelt sich diese Bedingung in

$$(q + q^0)(\sqrt{A} - B) + (q - q^0)\sqrt{A} \mp \frac{\delta}{q} > 0.$$

Da $\sqrt{A} > B$, $q > q^0$, und $(q - q^0)\sqrt{A}$ mindestens $= \sqrt{A}$, welches $> \frac{\delta}{q}$, das ein echter Bruch ist; so erhellet, daß obige Bedingung unmittelbar erfüllt ist, und $\frac{p}{q}$ also unter den Näherungsbrüchen zu $\sqrt{A}$ vorkommt.

(49.). Da nun (37.) überhaupt

$$\mp P_{n+1} = p_n p_n - q_n q_n A$$

in dortiger Bezeichnung; so berechne man die Größen P, P′, P″, u. s. f. (36.). Kommt unter diesen Größen eine P_{n+1} vor, welche $= B$; so giebt $\frac{p_n}{q_n}$ eine Auflösung der Gleichung

$$x^2 - Ay^2 = \mp B,$$

in Bezug auf das obere oder untere Zeichen, jenachdem $\frac{p_n}{q_n} <$ oder $> \sqrt{A}$.

$$\frac{q_{i-1}}{q_{i-2}} = a_{i-1} + \frac{q_{i-3}}{q_{i-2}},$$

$$\frac{q_{i-2}}{q_{i-3}} = a_{i-2} + \frac{q_{i-4}}{q_{i-3}},$$

$$\frac{q_{i-3}}{q_{i-4}} = a_{i-3} + \frac{q_{i-5}}{q_{i-4}},$$

. . . . . .

$$\frac{q'''}{q''} = a''' + \frac{q'}{q''},$$

$$\frac{q''}{q'} = a'' + \frac{1}{q'},$$

$$q' = a',$$

woraus durch ſucceſſive Subſtitut

$$\frac{q_{i-2}}{q_{i-1}} = \frac{1}{a_{i-1} + \frac{1}{a_{i-2} + \ldots}}$$

erhalten wird. Folglich nach dem

$$\frac{1}{a' + \frac{1}{a'' + \frac{1}{\ldots + \frac{1}{\ldots}}}}$$

ntriſch ſeyn müſſen. Daher iſt immer die Reihe der Glie- der Periode, ohne das letzte Glied, einerlei mit der ngekehrten Reihe dieſer Glieder, oder die Reihe der Glie- der Periode iſt ſymmetriſch. Bei $\sqrt{45}$ iſt die Periode ne das letzte Glied: 1, 2, 2, 2, 1. Das letzte Glied $= 12 = 2.6$, und 6 die in $\sqrt{45}$ enthaltene gan- Zahl.

43. Da nun (39.) für den Endpunkt irgend einer eriode

$$Q_i + Q_{i+1} = a_i P_i$$

ıd $a_i = 2a$ (41.), Q_i, Q_{i+1}, P_i aber ganze poſitive Zah- n ſind, deren zwei erſtere nie $> a$ werden können (38.).); ſo iſt klar, daß $Q_i = Q_{i+1} = a$, und $P_i = 1$ yn muß. Aber (37.)

$$\mp P_i = p_{i-1}p_{i-1} - q_{i-1}q_{i-1}A;$$

ſo $p_{i-1}p_{i-1} - q_{i-1}q_{i-1}A = \mp 1$, wo das obere oder ntere Zeichen gilt, jenachdem $i-1$ gerade oder ungera- : iſt, d. i. jenachdem i ungerade oder gerade iſt, oder

$$p_{i-1}p_{i-1} - q_{i-1}q_{i-1}A = \pm 1,$$

nachdem $\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}} >$ oder $< \sqrt{A}$ iſt.

44. Sey nun die unbeſtimmte Gleichung des zweiten Grades $x^2 - Ay^2 = \mp 1$, wo A eine ganze Zahl iſt, n ganzen Zahlen aufzulöſen. Es erhellet zunächſt, daß nicht negativ ſeyn kann, weil die Gleichung $x^2 + Ay^2 = -1$ offenbar unmöglich, die Gleichung $x^2 + Ay^2 = 1$ aber augenſcheinlich nur die Auflöſungen $x = 1$, $y = 0$ geſtattet. Auch darf A kein vollkommnes Quadrat eyn, indem für $A = a^2$ und $x^2 - Ay^2 = +1$, $(x + ay)(x - ay) = +1$, alſo $x + ay = 1$, $x - ay = 1$ ſeyn müßte, woraus $x = 1$, $y = 0$ als einzige Auflöſung folgte. Für $x^2 - Ay^2 = -1$, hätte man ben ſo $(x + ay)(x - ay) = -1$, alſo $x + ay = 1$, $- ay = -1$, oder $x + ay = -1$, $x - ay = 1$. Im erſten Falle erhielte man $x = 0$, $y = \frac{1}{a}$, im an- ern $x = 0$, $y = -\frac{1}{a}$.

bezeichnen ſoll, ungerade; ſo ſind di
einzelnen Perioden

$$a_{i-1}, a_{2i-1}, a_{3i-1}, a_{4i-1}$$

und es iſt $i-1$ gerade, $2i-1$ u
rade, $4i-1$ ungerade, $5i-1$
ſind (43.) Zähler und Nenner der
a_{4i-1}, a_{6i-1}, u. ſ. f. entſprechende
löſungen unſerer Gleichung in ganze
Nenner der den Nennern a_{i-1}, a_{3i-1}
ſprechenden Partialwerthe dagegen
chung $x^2 - Ay^2 = -1$ in ganze
auch letztere in dem Fall, wenn die
ner einzelnen Periode des Kettenbr
rade iſt, immer auflösbar iſt.

Hat man z. B. die Gleichung x
ſo iſt

$$\gamma_{31} = 5 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}}}}}$$

Für $x^2 - 53y^2 = \pm 1$ hat man

$$\sqrt{53} = 7 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{14 + \ldots}}}}}$$

die Periode hat 5 Glieder, also eine ungerade Anzahl. der 5te Partialwerth ist $= \frac{182}{25}$, und es ist wirklich $182^2 - 53.25^2 = -1$, der 10te Partialwerth ist $= \frac{66249}{9100}$, und es ist wirklich $66249^2 - 53.9100^2 = +1$. Eben so sind nun der 15te, 25ste, 35ste u. s. Partialwerth Auflösungen von $x^2 - 53y^2 = -1$, der 20ste, 30ste, 40ste u. s. f. aber Auflösungen von $x^2 - 53y^2 = +1$.

46. Man hat auch Tafeln der einfachsten Werthe von x, y, welche die Gleichung $x^2 - Ay^2 = +1$ in ganzen rationalen Zahlen auflösen, für die einzelnen Werthe von A berechnet. Euler (Algebra. II. §. 111.) giebt eine Tafel für $A = 2$ bis $A = 99$. Die vollständigste Tafel ist: Canon Pellianus, sive tabula simplicissimam aequationis celeb. $y^2 = ax^2 + 1$ solutionem, pro singulis numeri dati valoribus ab usque ad 1000 in numeris rat. iisdemque integris exhibens. Autore C. F. Degen. Hafniae. 1817. Man nennt nämlich die Aufgabe auch Pells Aufgabe (S. diesen Art.). Legendre (Théorie des nombres; am Ende), giebt eine Tafel bis $A = 135$, welche die einfachsten Auflösungen von $x^2 - Ay^2 = \pm 1$ enthält.

47. Hat man nur eine Auflösung der Gleichung $x^2 - Ay^2 = \pm 1$, so ist es leicht, mehrere zu finden. Sey zuerst die Anzahl der Glieder der Periode des Kettenbruchs für $\sqrt{A}$ gerade; so ist nur $x^2 - Ay^2 = +1$ in ganzen Zahlen auflösbar (45.). Der erste Näherungsbruch, welcher eine Auflösung giebt, sey $= \frac{p}{q}$, also $p^2 - Aq^2 = +1$. Irgend eine andere Auflösung sey P, Q, also auch $P^2 - AQ^2 = +1$; so ist

$$(p^2 - Aq^2)(P^2 - AQ^2) = +1$$
$$= p^2P^2 + A^2q^2Q^2 - Ap^2Q^2 - Aq^2P^2$$

u. ſ. f. u. ſ.

wodurch man nach und nach mehr
Independente Ausdrücke erhält mar

$$x \pm y\sqrt{A} = pP \pm qP\sqrt{A} \pm p($$
$$= (p \pm q\sqrt{A})(P \pm Q\sqrt{A});$$

alſo kann man auch ſetzen:

$$P \pm q\sqrt{A} = p \pm q\sqrt{A}$$
$$P' \pm q'\sqrt{A} = (p \pm q\sqrt{A}$$
$$P'' \pm q''\sqrt{A} = (p \pm q\sqrt{A}$$
$$P''' \pm q'''\sqrt{A} = (p \pm q\sqrt{A}$$

u. ſ. f. u. ſ. f.

Folglich überhaupt

$$x \pm y\sqrt{A} = (p \pm q\sqrt{A}$$
$$x = \frac{(p + q\sqrt{A})^n + (p \cdot}{2}$$
$$y = \frac{(p + q\sqrt{A})^n - (p \cdot}{2\sqrt{A}}$$

für jedes ganze poſitive n. Daß di
nale Zahlen giebt, erhellet leicht, i
binomiſchen Lehrſatzes erhält:

$$x = p^n + \frac{n(n-1)}{1.2} Ap^{n-}$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-}{}$$

Zusätzen zu Eulers Algebra. 75. zeigt, daß man auf diese Art alle möglichen Auflösungen in ganzen Zahlen erhält.

48. Ist die Anzahl der Glieder der Periode des Kettenbruchs für $\sqrt{A}$ ungerade; so sind die Gleichungen $x^2 - Ay^2 = +1$ und $x^2 - Ay^2 = -1$ beide auflösbar (45.). Man habe, wenn $\frac{p}{q}$ der einfachste Näherungsbruch ist, welcher die Gleichung $x^2 - Ay^2 = \pm 1$ auflöset,

$$\begin{aligned} p^2 - Aq^2 &= -1, \\ p'^2 - Aq'^2 &= +1, \\ p''^2 - Aq''^2 &= -1, \\ p'''^2 - Aq'''^2 &= +1, \\ &\text{u. s. f.} \qquad \text{u. s. f.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (p^2 - Aq^2)(p^2 - Aq^2) &= +1, \\ (p^2 - Aq^2)(p'^2 - Aq'^2) &= -1, \\ (p^2 - Aq^2)(p''^2 - Aq''^2) &= +1, \\ (p^2 - Aq^2)(p'''^2 - Aq'''^2) &= -1, \\ &\text{u. s. f.} \qquad \text{u. s. f.} \end{aligned}$$

Folglich sind (47.)

$$\begin{array}{ll} p, & q; \\ p^2 + Aq^2, & 2pq; \\ pp' + Aqq', & pq' + p'q; \\ pp'' + Aqq'', & pq'' + p''q; \\ pp''' + Aqq''', & pq''' + p'''q; \\ \text{u. s. f.} & \text{u. s. f.} \end{array}$$

abwechselnd Auflösungen der Gleichung $x^2 - Ay^2 = -1$, und $x^2 - Ay^2 = +1$.

Wie vorher (47.) hat man nun wieder

$$x \pm y\sqrt{A} = (p \pm q\sqrt{A})(P \pm Q\sqrt{A})$$

woraus leicht

$$x^2 - Ay^2 = (p^2 - Aq^2)(P^2 - AQ^2) = -1.(\pm 1) = \mp 1,$$

so daß also $x^2 - Ay^2 = \mp 1$, jenachdem $P^2 - AQ^2 = \pm 1$ ist. Also kann man setzen:

$$\begin{aligned} p \pm q\sqrt{A} &= p \pm q\sqrt{A}, \\ p' \pm q'\sqrt{A} &= (p \pm q\sqrt{A})^2, \\ p'' \pm q''\sqrt{A} &= (p \pm q\sqrt{A})^3, \\ p''' \pm q'''\sqrt{A} &= (p \pm q\sqrt{A})^4, \\ &\text{u. s. f.} \qquad \text{u. s. f.} \end{aligned}$$

und entwickelt hieraus den Werth
mer einen Werth erhalten, wel
Für $y = 1$ erhält man

$$x = \alpha + \frac{1}{\beta + \ldots +}$$

Für $y > 1$ kann man ſetzen

$$y = \mu' + \frac{1}{\mu'' + \frac{1}{\mu''' +}}$$

folglich

$$x = \alpha + \frac{1}{\beta + \ldots + \frac{1}{\mu +}}$$

ſo daß alſo $\frac{P}{q}$ immer unter den
vorkommen muß, wobei für den
merken, daß man dann den letzte
cher ſich als eine ganze Zahl darbiet
legen muß. Nimmt man dieſe
iſt auch $\frac{P}{q}$ nicht unter den Näher

p, q auflösbar; so muß $\frac{p}{q}$ unter den Näherungsbrüchen zu $\sqrt{A}$ enthalten seyn. Es ist

$$p^2 - Aq^2 = \mp B,$$

$$(p + q\sqrt{A})(p - q\sqrt{A}) = \mp B,$$

$$\frac{p}{q} - \sqrt{A} = \frac{\mp B}{q(p + q\sqrt{A})},$$

$$\sqrt{A} - \frac{p}{q} = \frac{\pm B}{q(p + q\sqrt{A})},$$

oder, für $\sqrt{A} - \frac{p}{q} = \frac{\pm \delta}{q^2}$

$$\frac{\pm \delta}{q^2} = \frac{\pm B}{q(p + q\sqrt{A})}, \quad \delta = \frac{Bq}{p + q\sqrt{A}}.$$

Sey nun $\frac{p^0}{q^0}$ der vor $\frac{p}{q}$ vorausgehende Näherungsbruch zu $\frac{p}{q}$ so kann $\frac{p^0}{q^0}$ immer so bestimmt werden, daß δ mit B einerlei Zeichen hat, und es ist also nur noch zu zeigen, daß

$$\frac{Bq}{p + q\sqrt{A}} < \frac{q}{q + q^0}, \; B(q + q^0) < p + q\sqrt{A}$$

ist. Setzt man $p = q\sqrt{A} \mp \frac{\delta}{q}$; so verwandelt sich diese Bedingung in

$$(q + q^0)(\sqrt{A} - B) + (q - q^0)\sqrt{A} \mp \frac{\delta}{q} > 0.$$

Da $\sqrt{A} > B$, $q > q^0$, und $(q - q^0)\sqrt{A}$ mindestens $= \sqrt{A}$, welches $> \frac{\delta}{q}$, das ein echter Bruch ist; so erhellet, daß obige Bedingung unmittelbar erfüllt ist, und $\frac{p}{q}$ also unter den Näherungsbrüchen zu $\sqrt{A}$ vorkommt. (49.). Da nun (37.) überhaupt

$$\mp P_{n+1} = p_n p_n - q_n q_n A$$

in dortiger Bezeichnung; so berechne man die Größen P, P', P'', u. s. f. (36.). Kommt unter diesen Größen eine P_{n+1} vor, welche $= B$; so giebt $\frac{p_n}{q_n}$ eine Auflösung der Gleichung

$$x^2 - Ay^2 = \mp B,$$

in Bezug auf das obere oder untere Zeichen, jenachdem $\frac{p_n}{q_n} <$ oder $> \sqrt{A}$.

genügende Zahlen; ſo hat man

$$(p^2 - Aq^2)(t^2 - Au^2) =$$
$$(pt \pm Aqu)^2 - A(pu \pm q$$

ſo daß alſo auch

$$x = pt \pm Aqu\,, \quad y = pu$$

Auflöſungen von $x^2 - Ay^2 =$

51. Was ferner über die Aufl
Gleichungen des zweiten Grades z
hier nur in einer kurzen Ueberſicht
die quadratiſche Gleichung

$$ax^2 - 2\alpha x = \varkappa$$

gegeben, wo a, α, $\varkappa$ ganze Zahlen
wenn der Coefficient des zweiten G
wäre, dies leicht durch beiderſei
Gleichung mit 2 erreicht werden kö

$$x = \frac{\alpha \pm \sqrt{a\varkappa + \alpha}}{a}$$

Sind nun die Wurzeln möglich, a
den ſie ſich nach einer ganz ähnlichen
in einen Kettenbruch verwandeln la

$$x = \frac{pz + p^0}{qz + q^0}, \quad z = \frac{q^0 x - p^0}{p - qx},$$

woraus, wenn man den Werth von x substituirt:

$$z = \frac{q^0\alpha - p^0 a \pm q^0\sqrt{ax + \alpha^2}}{pa - q\alpha \mp q\sqrt{ax + \alpha^2}},$$

und wenn Zähler und Nenner mit

$$pa - q\alpha \pm q\sqrt{ax + \alpha^2}$$

multiplicirt wird:

$$z = \frac{\pm(pq^0 - p^0q)\sqrt{ax + \alpha^2} + (pq^0 + p^0q)\alpha - pp^0a + qq^0x}{ap^2 - 2\alpha pq - xq^2}.$$

Setzen wir für $ax + \alpha^2 = A$:

$$z = \frac{\pm\sqrt{A} + Q}{P} = \frac{\pm(pq^0 - p^0q)\sqrt{A} + (pq^0 - p^0q)Q}{(pq^0 - p^0q)P};$$

so ist

$$A = ax + \alpha^2,$$
$$(pq^0 - p^0q)Q = (pq^0 + p^0q)\alpha - pp^0a + qq^0x$$
$$(pq^0 - p^0q)P = ap^2 - 2\alpha pq - xq^2.$$

52. Fassen wir nun der Kürze wegen bloß die letzte Gleichung ins Auge; so ist klar, daß, wegen $pq^0 - p^0q = \pm 1$; p, q die Gleichung

$$ax^2 - 2\alpha xy - xy^2 = \pm P$$

in ganzen Zahlen auflösen, wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen, jenachdem $\frac{p}{q} >$ oder $<$ als der Werth des ganzen Kettenbruchs ist. Giebt es mehrere vollständige Quotienten z, die den Nenner P haben, wie dies immer der Fall ist, wenn z in die Periode des Kettenbruchs fällt; so giebt es auch mehrere Auflösungen obiger Gleichung. Giebt man in Bezug auf die zweite Wurzel der quadratischen Gleichung dem vollständigen Quotienten die Form

$$z = \frac{\sqrt{A} - Q}{-P} = \frac{\sqrt{A} + Q'}{P'};$$

so ist

$$ax^2 - 2\alpha xy - xy^2 = \mp P',$$

unter denselben Bedingungen für $\frac{p}{q}$.

53. Sey nun überhaupt die Gleichung:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = L$$

in ganzen Zahlen aufzulösen. Man kann offenbar immer

folglich muß aL ein vollkommnes
Auflösung möglich seyn soll. Ist nun

$$ax + by = K,$$

eine Gleichung des ersten Grades m
ganzen Zahlen aufzulösen (1.). S
positiv und negativ nehmen kann, i

2) Ist $b^2 - ac < o$, =
leicht:

$$(ax + by)^2 + dy^2 =$$

oder, für $ax + by = t$:

$$t^2 + dy^2 = aL.$$

Also muß L, wenn die Gleichung a
tiv seyn. Man setze nun $y = 1$
behalte für y nur die Werthe, für
sitiv, und ein vollkommenes Quad
hält man eine Reihe Werthe für t.
Werthen von y, t behält man dan
welche $x = \frac{t - by}{a}$ eine ganze Zal

3) Ist $b^2 - ac$ ein vollkom
nnd positiv; so hat man

$$(ax + by)^2 - l^2y^2 =$$
$$|ax + (b + l)y||ax + (b -$$

Formeln y, x, und behalte die Werthe, welche ganze Zahlen ſind.

4) Iſt endlich $b^2 - ac$ poſitiv und keine vollkommne Quadratzahl; ſo ſetze man $a = a$, $b = -\alpha$, $c = -\varkappa$; ſo wird die gegebene Gleichung:

$$ax^2 - 2\alpha xy - \varkappa y^2 = L.$$

Da $a\varkappa + \alpha^2 = b^2 - ac$ poſitiv und eine unvollkommne Quadratzahl iſt; ſo ſind die Wurzeln der quadratiſchen Gleichung

$$ax^2 - 2\alpha x - \varkappa = 0$$

möglich und irrational (51.). Daher entwickele man dieſe Wurzeln in Kettenbrüche, und beſtimme die vollſtändigen Quotienten z (51.). Für jeden Nenner P eines ſolchen vollſtändigen Quotienten iſt nun, wenn $\frac{p}{q}$ der entſprechende Näherungswerth iſt:

$$ap^2 - 2\alpha pq - \varkappa q^2 = \pm P,$$
$$ap^2 + 2bpq + cq^2 = \pm P.$$

Sind nun in irgend einem Falle bei dieſer Entwickelung die Größen auf der rechten Seite der Gleichungen

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = L,$$
$$ap^2 + 2bpq + cq^2 = \pm P,$$

mit einander übereinſtimmend; ſo geben p, q eine Auflöſung der gegebenen Gleichung

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = L.$$

Hat man z. B. die Gleichung

$$2x^2 - 14xy + 17y^2 = 5;$$

ſo iſt, für

$$2x^2 - 14x + 17 = 0,\ x = \frac{7 \pm \sqrt{15}}{2}.$$

Die Entwickelung der kleinern Wurzel in einen Kettenbruch giebt:

$$x = \frac{7 - \sqrt{15}}{2} = 1 + \frac{1}{x'};$$
$$x' = \frac{2}{5 - \sqrt{15}} = \frac{5 + \sqrt{15}}{5} = 1 + \frac{1}{x''};$$
$$x'' = \frac{5}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{3} = 1 + \frac{1}{x'''}$$

Der Divisor des vollständigen Qu

5. Der entsprechende Partialwer

ist, da hier $\frac{p}{q} < x$ ist (52.):

$$2.1^2 - 14.1.1 + 17.1$$

so daß also 1, 1 eine Auflösung ur

Für $2x^2 - 14xy + 17y^2 =$

Entwickelung der größern Wurzel

$$2x^2 - 14x + 17 =$$

in einen Kettenbruch

$$x = \frac{\sqrt{15} + 7}{2} = 5 +$$

$$x' = \frac{2}{\sqrt{15} - 3} = \frac{\sqrt{15} +}{3}$$

$$x'' = \frac{3}{\sqrt{15} - 3} = \frac{\sqrt{15} +}{2}$$

$$x''' = \frac{2}{\sqrt{15} - 3} = \frac{\sqrt{15} +}{3}$$

u. s. f. u. s.

$$x = 5 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}}}$$

Die Periode ist 2. 3. Die Wurz

$$2.299^2 - 14.299.55 + 17.55^2 = -3,$$

u. ſ. f. u. ſ. f.

ür $2x^2 - 14xy + 17y^2 = 3$ findet man keine Auf-
ſung in ganzen Zahlen, und für $2x^2 - 14xy + 17y^2 = 2$ die Auflöſungen 1, 11, 87, 685, 5393,..., oder
, 3, 25, 197, 1551,... mit 0, 2, 16, 126, 992,...

54. Iſt nun die allgemeinere Gleichung

$$ay^2 + 2bxy + cx^2 + dy + ex + f = o$$

ufzulöſen, wo durch Multiplication mit 2 der Coefficient
u xy immer zu einer geraden Zahl gemacht werden kann;
ſetze man

$$y = \varkappa y' + \alpha, \quad x = \lambda x' + \beta,$$

nd ſuche die Gleichung, um ſie auf dieſelbe Form wie in
53.) zu bringen, von den Gliedern der erſten Dimenſion
i befreien. Macht man die Subſtitution; ſo ſind die
oefficienten von y', x':

$$(2a\alpha + 2b\beta + d)\varkappa, \quad (2\beta c + 2\alpha b + e)\lambda.$$

Nan ſetze alſo

$$2a\alpha + 2b\beta + d = o, \quad 2\beta c + 2\alpha b + e = o;$$

$$\alpha = \frac{cd - be}{2(b^2 - ac)}, \quad \beta = \frac{ae - bd}{2(b^2 - ac)}.$$

erner ſetze man $\varkappa = \lambda = \frac{1}{2(b^2 - ac)}$; ſo wird

$$y = \frac{y' + cd - be}{2(b^2 - ac)}, \quad x = \frac{x' + ae - bd}{2(b^2 - ac)}.$$

Dies ſind zwei Gleichungen des erſten Grades mit zwei Un-
ekannten, aus denen man y, x durch y', x' nach bekann-
en Methoden, wenn es möglich iſt, ſo beſtimmen kann,
aß y, x ganze Zahlen werden (1.). Multiplicirt man
un die beiden obigen $= o$ geſetzten Größen mit α, β,
nd addirt; ſo erhält man leicht:

$$-(a\alpha^2 + 2b\alpha\beta + c\beta^2) = \frac{d\alpha + e\beta}{2} = \frac{ae^2 - 2bed + cd^2}{4(b^2 - ac)},$$

nd hieraus, wenn man den letzten Bruch $= \frac{M}{4N}$ ſetzt, und
ie Subſtitutionen in der gegebenen Gleichung wirklich
usführt:

$$ay'^2 + 2bx'y' + cx'^2 + 4N^2f + MN = o,$$

$< o$. Sie kann folglich nach (5.
Man erhält $y' = \pm 0, \pm 2;$ x
$y = 2, 2, 4, 0;\ x = 2, -$

Iſt $b^2 - ac = o$; ſo iſt ob
wendbar. Man multiplicire in t
Gleichung mit a, und addire auf t
$ac)x^2$; ſo erhält man

$$(ay + bx)^2 + a\,dy + aex$$

Alſo für $ay + bx = z$:

$$z^2 + a\,dy + b\,dx + aex - b$$
$$z^2 + d(ay + bx) + (ae - bd$$
$$z^2 + dz + (ae - bd)\,x + af$$

Dies iſt eine Gleichung mit zu
eine den erſten Grad nicht überſteig
Gleichung in ganzen Zahlen auflöſ

$$y = \frac{z - bx}{a};$$

ſo ſetzt man für x, z nur die Wer
eine ganze Zahl wird, wodurch da

55. Ueber den zweiten Grad
allgemeine Methoden zur Auflöſun
chungen, wie die vorhergehenden.
bis jetzt von den Mathematikern b

Zeitraum von 200 v. Ch. bis 400 v. Ch. Einige machen ihn zu einem Zeitgenossen des Nero, Bombelli läßt ihn zur Zeit des Kaisers Antoninus Pius, und Abulpharagius unter dem Kaiser Julianus Apostata leben; aber alle diese Angaben sind sehr unbestimmt und zweideutig, worüber mit Mehrerem die sehr schätzbare Vorrede zu: Diophantus von Alexandria arithm. Aufgaben. A. d. Griech. von Otto Schulz Berlin. 1822. nachzusehen ist. Dieses berühmte Werk des Diophantus enthält eine treffliche Sammlung algebraischer, vorzüglich unbestimmter, Aufgaben, die zu Exempeln der obigen allgemeinen Methoden sehr geeignet sind. Indeß ist nach O. Schulz (a. a. O. S. XXIII.) Diophantus nicht Erfinder dieses Theils der Analysis, sondern bloß Sammler des schon früher Entdeckten, und sein Verdienst besteht vorzüglich in einer faßlichen Darstellung. Die erste Uebersetzung veranstaltete W. Xylander oder Holzmann von Augsburg (Basileae. 1575. fol.), die erste Ausgabe des Textes Claudius Caspar Bachet, Herr von Meziriac (Lutetiae Paris. 1691. fol.), wovon Tolosae. 1760. fol. eine neue mit vielen Anmerkungen Fermats bereicherte, von Samuel Fermat, dem Sohne, veranstaltete Ausgabe erschien. Die neueste Uebersetzung ist die schon oben angeführte deutsche v. O. Schulz, ein sehr verdienstliches Unternehmen. Das Werk enthält einen wahren Schatz sehr scharfsinnig aufgelöster Aufgaben, und ist daher zur Uebung in der unbestimmten Analytik sehr zu empfehlen. Das letzte, sechste, Buch beschäftigt sich allein mit Aufgaben über sogenannte rationale Dreiecke (Vergl. Trig. 34.), und angehängt ist der deutschen Uebersetzung eine früher schon von Poselger (Lpzg. 1810.) übersetzte Schrift über die Polygonalzahlen. Auch die Indier haben die Auflösung der unbestimmten Gleichungen des ersten Grades gekannt; die Commentatoren des Bhasker oder Bhascara-Acharya (1150; aus der Stadt Bidder) legen diese Erfindung dem Arya-Batta, den man für einen Zeitgenossen des Diophant hält, bei. M. s. Algebra, with Arithmetic and Mensuration, from the Sans-

jetzt Legendre die Theorie der Z
einzig und allein mit der Unterſuch
ten der ganzen Zahlen beſchäftigt, wor
von dem eigentlich rechnenden Theile
ſcheidet. Fermat hat z. B. gefunden,
der Form $4n+1$ die Summe zweier
daſſelbe iſt, als wenn man ſagte, d
chung $a = x^2 + y^2$ iſt, wenn a ei
Form $4n+1$ bezeichnet, immer in ga
Daher braucht man die Ausdrücke
und Theorie der Zahlen jetzt gewöhnli
und wenn in dieſem Wörterbuche der
würdigen Eigenſchaften der ganzen Z
verwieſen worden iſt; ſo iſt dies n
um vorliegenden Artikel nicht zu ſeh
weil es zweckmäßig ſchien, jene Eige
im Zuſammenhange beiſammen zu ha
kann aber ſehr zur Ergänzung des geg

58. Nach Diophant ward die
tik nur erſt wieder durch Vieta,
chet durch ſeinen Commentar zum D
Schrift: Problèmes plaisans et d
nombres. Lyon. 1612. gefördert,

g in ganzen Zahlen vor. Lord Brounker gab eine ſung, die ſich in Wallis Werken (Algebra. Cap. III.), Eulers Algebra (Thl. II. Kap. VII.), und Ozanams Algebra, wo ſie Fermat beigelegt wird, det. Indeß ſcheint Fermat nie eine Auflöſung gege- ju haben, und an Brounkers Auflöſung möchte glich auszuſetzen ſeyn, daß ſie nicht auf eine ganz deut- Art zeigt, daß die Aufgabe immer möglich iſt. Die (35. ff.) mitgetheilte Auflöſung mittelſt der Ketten- e gab Lagrange (Mélanges de Turin. T. IV. i. de Berlin. 1767.), und ſie genügt gewiß allen An- rungen. Nach Fermat iſt, nebſt Euler, Lagrange Mathematiker, welchem die unbeſtimmte Analytik of- r am Meiſten verdankt; und trat er auch in Eulers apfen, ſo hat er doch allein die Methoden, welche oft inem bloßen Probiren beruheten, zu völliger Allge- eit und Beſtimmtheit erhoben. Eulers und La- ges Abhandlungen findet man ziemlich ausführ- verzeichnet in Reuss Repertorium Commen- num a Societat. litt. editarum, T. VII. Gott. . p. 107. sqq. worauf wir hier der Kürze wegen ver- i. Im zweiten Theile ſeiner Algebra lieferte Euler rſten einigermaßen vollſtändigen Lehrbegriff dieſer nſchaft, deſſen Brauchbarkeit durch Lagrange's e außerordentlich gewann. Als die beſte Ausgabe empfehlen: Élémens d'Algèbre par L. Euler, de l'All. Nouv. éd. revue et augmentée de no- par Garnier. T. I. II. Paris. 1807. Die Zuſätze agrange T. II. p. 281 — 485. Den vollſtändig- ehrbegriff lieferte Legendre (Essai sur la Théo- es nombres. 2ième éd. Paris. 1808. 4.), welcher bloß die Methoden der unbeſtimmten Analytik, ſon- auch eine große Menge der merkwürdigſten Eigen- n der Zahlen enthält. Auch Trembley, Lagny, e, Fontana und Kausler haben ſich nicht ohne g dieſen Unterſuchungen gewidmet. Ihre Arbeiten ei Reuß a. a. O. verzeichnet. Kausler hat die e von Lagrange zu Eulers Algebra beſonders

Folglich (Zusatz, gerade 10.):

$$t = \frac{a' - a}{1 + aa'}.$$

Sind nun x', y' die Coordinaten v

$$y' = ax', \quad y' = a'(x' - a), \quad t$$

und, wenn man a, a' eliminirt:

$$x'^2 + y'^2 - ax' - \frac{ay'}{t} =$$

$$\left.\begin{aligned} &x'^2 - 2.\frac{a}{2}x' + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\ &+ y'^2 - 2.\frac{a}{2t}y' + \left(\frac{a}{2t}\right)^2 \end{aligned}\right\} =$$

$$\left(x' - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y' - \frac{a}{2t}\right)^2 = \frac{a}{4}$$

d. i. für

$$x' - \frac{a}{2} = x, \quad y' - \frac{a}{2t} = y, \quad \frac{a}{2}$$

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

die Gleichung des Kreises. Also i
der Spitzen aller Winkel, welche de
Kreis, wie auch sogleich aus Eucl.

3. Einen Kreis zu beschreiben,
Kreise berührt.

$$x^2 + y^2 = (r + \varrho)^2 = r^2 + 2r\varrho + \varrho^2,$$
$$(a - x)^2 + y^2 = (r' + \varrho)^2 = r'^2 + 2r'\varrho + \varrho^2;$$

woraus durch Subtraction:

$$2ax - a^2 = r^2 - r'^2 + 2(r - r')\varrho,$$
$$\varrho = \frac{2ax - a^2 - r^2 + r'^2}{2(r - r')}.$$

Setzt man dies in die erste Gleichung; so erhält man nach einigen Reductionen:

$$y^2 = \frac{|(2x - a)^2 - (r - r')^2||a^2 - (r - r')^2|}{4(r - r')^2},$$

welches die Gleichung des Orts des Mittelpunktes des gesuchten Kreises ist. Für die Punkte, in welchen die Curve die Abscissenaxe schneidet, muß seyn:

$$(2x - a)^2 = (r - r')^2, \quad 2x - a = \pm(r - r');$$
$$x = \frac{a \pm r \mp r'}{2}.$$

Also schneidet die Curve die Abscissenaxe in zwei Punkten A, B, für welche

$$AX = \frac{a - r + r'}{2}, \quad AB = \frac{a + r - r'}{2};$$
$$XB = r - r'$$

ist. Da

$$DX = r + \frac{a - r + r'}{2} = \frac{a + r + r'}{2} = \tfrac{1}{2}DE;$$

$$FB = -r + \frac{a + r - r'}{2} = \frac{a - r - r'}{2} = \tfrac{1}{2}FG,$$

ist; so findet man die Punkte A und B, wenn man die Linien DE und FG halbirt. Ist C der Mittelpunkt von AB, und $CP = x'$; so ist

$$x = AX + XC + CP = \frac{a - r + r'}{2} + \frac{r - r'}{2} + x',$$

d. i. $x = \frac{1}{2}a + x'$, woraus auch zugleich erhellet, daß $AC = \frac{1}{2}a$, und folglich C die Mitte von AB ist. Setzt man nun $2x - a = 2x'$ in die gefundene Gleichung; so wird

$$y^2 = \frac{a^2 - (r - r')^2}{(r - r')^2}\left\{x'^2 - \left(\frac{r - r'}{2}\right)^2\right\},$$

und der Ort ist folglich eine Hyperbel, deren Hauptaxe $= r - r'$, Nebenaxe $= \sqrt{a^2 - (r - r')^2}$, Scheitel

ſchreiben, welcher einen gegeben
durch einen gegebenen Punkt geht;

$$y^2 = \frac{a^2 - r^2}{r^2} \Big| x'^2 -$$

die Gleichung der Hyperbel

4. Einen Kreis zu beſchreiber
gerade Linie berührt, und durch
hindurch geht.

Sey (Fig. 90.) P der gegeben
Linie. Man ſetze AP = a, nehme AI
Ordinatenaxe an, ſo daß alſo AB
PC = BC = x; ſo erhellet aug
der Gleichung

$$x^2 = y^2 + (x - a)^2 = y^2 +$$
$$o = y^2 - 2ax + a^2, \quad y^2 =$$

welches die Gleichung des Orts de
ſuchten Kreiſes iſt. y wird = (
$x = \frac{1}{2}a$, ſo daß alſo, wenn E d
E ein Punkt der Curve iſt. Nim
der Abſciſſen x'; ſo iſt $x = \frac{1}{2}a$ ·
und folglich $y^2 = 2ax'$ die Gleich
alſo eine Parabel iſt, deren Schei
= 2a. Da EP = $\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}$.

telpunkt des gesuchten Kreises, $AB = a$, $CP = x$, $BP = y$; so ist

$$AC^2 = AD^2 + CD^2, \quad (r + x)^2 = (a - x)^2 + y^2,$$

woraus man leicht erhält:

$$y^2 = 2(a + r)x - (a^2 - r^2)$$
$$= 2(a + r)\left\{x - \frac{a - r}{2}\right\}.$$

y wird $= o$ für $x = \frac{a - r}{2}$, so daß also, wenn F der Mittelpunkt von BE ist, dieser Punkt der Curve angehören wird. Nimmt man F als Anfang der Abscissen x'; so ist

$$x = \frac{a - r}{2} + x',$$

und folglich $y^2 = 2(a + r)x'$, der Ort also eine Parabel, deren Scheitel F, Parameter $= 2(a + r)$. Die Entfernung des Brennpunktes vom Scheitel ist $= \frac{2(a + r)}{4} = \frac{a + r}{2}$, und der Focus wird also gefunden, wenn man die Linie GB halbirt.

6. Die Grundlinie eines Dreiecks, und der Unterschied der Winkel an derselben sind gegeben; man soll den Ort der Spitze finden.

Sey AC (Fig. 92.) $= a$ in D halbirt, $A - C = \delta$, und D der Anfang der Coordinaten, $DP = x$, $BP = y$; so ist $AP = \frac{1}{2}a - x$, $CP = \frac{1}{2}a + x$. Also

$$\text{tang } A = \frac{y}{\frac{1}{2}a - x} = \frac{2y}{a - 2x}, \quad \text{tang } C = \frac{y}{\frac{1}{2}a + x} = \frac{2y}{a + 2x};$$

$$\text{tang}(A - C) = \text{tang } \delta = \frac{2xy}{\frac{1}{4}a^2 - x^2 + y^2},$$

woraus:

$$y^2 - 2xy \cot \delta - x^2 + \tfrac{1}{4}a^2 = o.$$

Um nun zu irgend einem andern rechtwinkligen Coordinatensysteme, ohne den Anfang zu verlegen, überzugehen, muß man, wie leicht aus dem Art. Coordinate gefunden wird, allgemein

$$x = mu + nt, \quad y = nu - mt$$

setzen, wodurch man erhält:

Coordinate leicht geſchloſſen wird, i
naten ſenkrecht auf einander ſind, r
nach obiger Bedingung $n^2 - m^2 =$
wird, wenn man den Unterſchied de

$$4m^2n^2\operatorname{cosec}\delta^2 = 1, \quad 2mn\cos$$

Die Gleichung der Hyperbel aber wir

$$2tu\,|\,2mn + 2mn\cot\delta^2\,| =$$

oder $4mntu\operatorname{cosec}\delta^2 = \frac{1}{4}a^2$,
$2mn\operatorname{cosec}\delta = +1$ ſetzt,

$$2tu\operatorname{cosec}\delta = \tfrac{1}{4}a^2, \quad tu = \tfrac{1}{8}$$

Iſt α der Winkel der Axe der t mit d
Seite der negativen y; ſo iſt $m =$
alſo

$$2\sin\alpha\cos\alpha\operatorname{cosec}\delta = 1, \quad \sin$$

$\alpha = \frac{1}{2}\delta$. Dadurch iſt die Lage der
Man mache nämlich den Winkel AI
richte auf EF durch D das Perpendik
GH die Aſymptoten der Hyperbel, we
aus der Gleichung $tu = \frac{1}{8}a^2\sin\delta$,
$\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}\delta$, $u = \pm\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}\delta$ ſe
durch A und C gehen muß, leicht beſ
Setzte man $2mn\operatorname{cosec}\delta = -1$;
ganz ähnliche Art $\sin 2\alpha = -\sin\delta$

stimmter Länge, so daß ihre Endpunkte immer die Schenkel des Winkels berühren. Man sucht den Ort eines in der Linie MN gegebenen Punktes K, für welchen MK = m, NK = n ist.

Nimmt man A als Anfang, AC als Axe der Abscissen, α als Coordinatenwinkel an, und setzt AL = x, LK = y; so ist

$$m : m + n = x : AN\,,\ AN = \frac{(m+n)x}{m}\,;$$

$$n : m + n = y : AM\,,\ AM = \frac{(m+n)y}{n}\,;$$

$$MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2AM.AN.\cos\alpha$$

(Trigonometrie. 7.). Also, wenn man mit m + n = MN aufhebt:

$$1 = \left(\frac{x}{m}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2 - 2.\frac{x}{m}\frac{y}{n}\cos\alpha,$$

oder, für $x' = \frac{x}{m}$, $y' = \frac{y}{n}$:

$$1 = x'^2 + y'^2 - 2x'y'\cos\alpha$$

die Gleichung der gesuchten Curve, woraus man leicht erhält:

$$y' = x'\cos\alpha \pm \sqrt{1 - x'^2\sin\alpha^2}.$$

Für $x'\sin\alpha > 1$ wird y' imaginär, und für $x'\sin\alpha = 1$, $x' = \operatorname{cosec}\alpha$, ist also die Ordinate eine Berührende, da sie nur den einen Werth $y' = x'\cos\alpha = \operatorname{cosec}\alpha\cos\alpha = \cot\alpha$ hat. Sey nun

$$AE = x = m\operatorname{cosec}\alpha,\ EF = y = n\cot\alpha,$$

wo EF der Ordinatenaxe parallel ist. Man ziehe AF, nehme diese Linie als Axe der Abscissen an, und setze AF = $\varkappa$, AD = x'', DK = y''; so ist

$$AE : AL = AF : AD,\ AE : EF = AL : LD;$$

$$m\operatorname{cosec}\alpha : x = \varkappa : x'',\ x = \frac{mx''\operatorname{cosec}\alpha}{\varkappa}\,;$$

$$m\operatorname{cosec}\alpha : n\cot\alpha = x : LD,\ LD = \frac{nx\cos\alpha}{m}\,.$$

Da nun LD + y'' = y; so hat man:

$$x = \frac{mx''\operatorname{cosec}\alpha}{\varkappa},\ y = y'' + \frac{nx''\cot\alpha}{\varkappa}\,;$$

Ellipſe immer beſchreiben läßt.

8. Durch zwei gegebene Pu
zwei Linien MP, M′P zu ziehen,
Winkel MPM′ = α einſchließen.

Die Coordinaten der Punkte
c; a′, b′, c′; x, y, z; die Gle
M′P (Linie, gerade. 20.):

$$y = Ax + \mathfrak{A}, \quad z =$$
$$y = A'x + \mathfrak{A}', \quad z =$$

Da dieſe Linien aber durch M, M

$$b = Aa + \mathfrak{A}, \quad c =$$
$$b' = A'a' + \mathfrak{A}', \quad c' =$$
$$y - b = A(x - a), \quad z -$$
$$y - b' = A'(x - a'), \quad z -$$

Alſo (Linie, gerade. 32.):

$$\cos\alpha = \frac{1 + AA'}{\sqrt{(1 + A^2 + B^2)(}}$$

Nimmt man aber der Kürze wegen
ordinaten, MM′ als Axe der z
= 0, a′ = b′ = 0. Alſo

$$y = Ax, \quad z = Bx;$$
$$y = A'x, \quad z - c' =$$

Beſtimmt man nun hieraus A . 1

die man leicht mittelſt bekannter goniometriſcher Formeln findet, und ſetzt in letztern die gefundenen Werthe von A, B, A′, B′; ſo erhält man:

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{c'\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2 + z^2 - c'z},$$

$$(x^2 + y^2 + z^2 - c'z)^2 = \frac{c'^2}{\text{tang}\,\alpha^2}(x^2 + y^2),$$

ſo daß alſo der Ort des Punktes P eine Fläche des zweiten Grades iſt.

Durch eine einfache geometriſche Betrachtung überzeugt man ſich ſogleich, daß dieſe Fläche erzeugt werden muß, wenn ſich ein über der Linie $MM' = c'$ als Sehne beſchriebener, des Winkels α fähiger, Kreisabſchnitt um ſeine Sehne bewegt, welches ſich auch leicht aus der gefundenen Gleichung ableiten läßt. Denkt man ſich nämlich durch MM′ und P eine Ebene gelegt, und in derſelben auf die Axe des z ein Perpendikel u von P gefällt; ſo iſt klar, daß $u^2 = x^2 + y^2$, alſo

$$(u^2 + z^2 - c'z)^2 = \frac{c'^2}{\text{tang}\,\alpha^2}u^2,$$

$$u^2 + z^2 - c'z = \pm\frac{c'u}{\text{tang}\,\alpha},$$

woraus, verglichen mit (2.), das Geſagte erhellet.

9. Seyen mehrere Punkte im Raume gegeben; man ſoll die Lage einer Ebene beſtimmen, ſo daß die Summen der von den gegebenen Punkten auf die Ebene gefällten Perpendikel auf beiden Seiten derſelben einander gleich ſeyen.

Die Anzahl der gegebenen Punkte ſey $= n$, und

$$x', y', z'; x'', y'', z''; x''', y''', z'''; \ldots$$

ihre Coordinaten. Die Gleichung der Ebene ſey (Krumme Fläche. 4.):

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

oder der Kürze wegen

$$z = ax + by + c.$$

Folglich die von den gegebenen Punkten auf dieſe Ebene gefällten Perpendikel (Linie und Ebene. 51. 52.):

... Methoden zum Stud
den, da die Methoden dem S
von demſelben ohne größere S
hier erlaubte, nicht Gebrauch
Werk muß ganz und im Zu
Es geht übrigens von ganz
pien aus. S. Zahl.

Unbeſtimmte Aufg

ganz unbeſtimmte Anzahl von
Aufgabe, welche auf eine E
führt, kann, wenn alle Wur
auf vier verſchiedene Arten
deſſenungeachtet doch eine beſti
zahl der möglichen Auflöſunge
ſtimmte Aufgabe führt imme
als unbekannte Größen zu beſt
Art. Unbeſtimmte Analytik we
den iſt, worauf wir überha
löſung unbeſtimmter arithme
Gegenwärtiger Artikel ſoll d
ſtimmten geometriſchen Probl

1. Zwiſchen den Schenke

$$PQ = x - PQ'.\cos\alpha,\quad y = PQ'.\sin\alpha;$$
$$= x - y\cot\alpha,\ PQ' = y\operatorname{cosec}\alpha,$$
$$x + y(\operatorname{cosec}\alpha - \cot\alpha) = a,$$
$$x + y.\frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha} = a,$$

woraus leicht

$$x = a - y\tan\tfrac{1}{2}\alpha.$$

Dies iſt eine Gleichung zwiſchen zwei unbekannten Größen. Eine dieſer Größen läßt ſich alſo immer willkührlich annehmen, und beſtimmt man dann nur die andere Coordinate mittelſt der gefundenen Gleichung; ſo wird immer der durch dieſe beiden Coordinaten beſtimmte Punkt der Aufgabe Genüge leiſten. Man ſieht alſo, daß es unendlich viele Auflöſungen unſerer Aufgabe giebt, und dieſe alſo zu den unbeſtimmten gehört. Bekanntlich (ſ. Krumme Linie) ſtellt jede Gleichung zwiſchen zwei veränderlichen Größen eine Curve von einfacher Krümmung dar. Alle Punkte dieſer Curve erfüllen alſo die Bedingungen der Aufgabe, und dieſe Curve iſt folglich der geometriſche Ort (ſ. dieſen Art.) dieſer Punkte. In unſerm Falle ſtellt die Gleichung eine gerade Linie dar (Linie, gerade. 13.), welche conſtruirt wird, wenn man $AD = a$, und den Winkel $\gamma = 90^0 - \frac{1}{2}\alpha$ macht, wo dann jeder Punkt in DE der Aufgabe Genüge leiſtet. Denn die Gleichung dieſer Linie iſt:

$$y = x\tan(180^\circ - \gamma) + A = x\tan(90^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha) + A$$
$$= -x\cot\tfrac{1}{2}\alpha + A.$$

Da nun $x = a$ für $y = 0$; ſo erhält man leicht $A = a\cot\frac{1}{2}\alpha$, und folglich, wenn man auf beiden Seiten mit $\tan\frac{1}{2}\alpha$ multiplicirt:

$$y\tan\tfrac{1}{2}\alpha = -x + a,\quad x = a - y\tan\tfrac{1}{2}\alpha,$$

die obige Gleichung, ſo daß alſo DE der geometriſche Ort des geſuchten Punktes iſt.

Ueberhaupt ſind alle Aufgaben über geometriſche Oerter unbeſtimmte Aufgaben, und dieſer und jener Artikel werden ſich alſo gegenſeitig ergänzen. Hier haben wir es indeß immer bloß mit der analytiſchen Auflöſung zu thun.

2. Durch zwei gegebene Punkte A, B (Fig. 88.) zwei

Folglich (Linie, gerade. 16.):

$$t = \frac{a' - a}{1 + aa'}.$$

Sind nun x', y' die Coordinaten von

$$y' = ax', \quad y' = a'(x' - a), \quad t =$$

und, wenn man a, a' eliminirt:

$$x'^2 + y'^2 - ax' - \frac{ay'}{t} = 0;$$

$$\left.\begin{aligned} x'^2 - 2.\frac{a}{2}x' + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\ + y'^2 - 2.\frac{a}{2t}y' + \left(\frac{a}{2t}\right)^2 \end{aligned}\right\} = \left($$

$$\left(x' - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y' - \frac{a}{2t}\right)^2 = \frac{a^2}{4}\left(1\right.$$

d. i. für

$$x' - \frac{a}{2} = x, \; y' - \frac{a}{2t} = y, \; \frac{a}{2}\gamma$$

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

die Gleichung des Kreises. Also ist t
der Spitzen aller Winkel, welche der A
Kreis, wie auch sogleich aus Eucl. El

3. Einen Kreis zu beschreiben, w
Kreise berührt.

$$x^2 + y^2 = (r + \varrho)^2 = r^2 + 2r\varrho + \varrho^2,$$
$$(a - x)^2 + y^2 = (r' + \varrho)^2 = r'^2 + 2r'\varrho + \varrho^2;$$

woraus durch Subtraction:

$$2ax - a^2 = r^2 - r'^2 + 2(r - r')\varrho,$$
$$\varrho = \frac{2ax - a^2 - r^2 + r'^2}{2(r - r')}.$$

Setzt man dies in die erste Gleichung; so erhält man nach einigen Reductionen:

$$y^2 = \frac{\{(2x - a)^2 - (r - r')^2\}\{a^2 - (r - r')^2\}}{4(r - r')^2},$$

welches die Gleichung des Orts des Mittelpunktes des gesuchten Kreises ist. Für die Punkte, in welchen die Curve die Abscissenaxe schneidet, muß seyn:

$$(2x - a)^2 = (r - r')^2, \quad 2x - a = \pm(r - r');$$
$$x = \frac{a \pm r \mp r'}{2}.$$

Also schneidet die Curve die Abscissenaxe in zwei Punkten A, B, für welche

$$AX = \frac{a - r + r'}{2}, \quad AB = \frac{a + r - r'}{2};$$
$$XB = r - r'$$

ist. Da

$$DX = r + \frac{a - r + r'}{2} = \frac{a + r + r'}{2} = \tfrac{1}{2}DE;$$

$$FB = -r + \frac{a + r - r'}{2} = \frac{a - r - r'}{2} = \tfrac{1}{2}FG,$$

ist; so findet man die Punkte A und B, wenn man die Linien DE und FG halbirt. Ist C der Mittelpunkt von AB, und $CP = x'$; so ist

$$x = AX + XC + CP = \frac{a - r + r'}{2} + \frac{r - r'}{2} + x',$$

d. i. $x = \frac{1}{2}a + x'$, woraus auch zugleich erhellet, daß $AC = \frac{1}{2}a$, und folglich C die Mitte von AB ist. Setzt man nun $2x - a = 2x'$ in die gefundene Gleichung; so wird

$$y^2 = \frac{a^2 - (r - r')^2}{(r - r')^2}\left\{x'^2 - \left(\frac{r - r'}{2}\right)^2\right\},$$

und der Ort ist folglich eine Hyperbel, deren Hauptaxe $= r - r'$, Nebenaxe $= \sqrt{a^2 - (r - r')^2}$, Scheitel

schreiben, welcher einen gegebenen
durch einen gegebenen Punkt geht; so

$$y^2 = \frac{a^2 - r^2}{r^2}\Big\} x'^2 - \left(\frac{r}{2}\right.$$

die Gleichung der Hyperbel

4. Einen Kreis zu beschreiben, d
gerade Linie berührt, und durch ein
hindurch geht.

Sey (Fig. 90.) P der gegebene P
Linie. Man setze AP = a, nehme AP al
Ordinatenaxe an, so daß also AB =
PC = BC = x; so erhellet augenb
der Gleichung

$$x^2 = y^2 + (x - a)^2 = y^2 + x^2$$
$$o = y^2 - 2ax + a^2, \quad y^2 = a(2$$

welches die Gleichung des Orts des A
suchten Kreises ist. y wird = o,
$x = \frac{1}{2}a$, so daß also, wenn E der
E ein Punkt der Curve ist. Nimm
der Abscissen x'; so ist $x = \frac{1}{2}a +$
und folglich $y^2 = 2ax'$ die Gleichun
also eine Parabel ist, deren Scheitel
= 2a. Da EP = $\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}.2a$;

telpunkt des gesuchten Kreises, $AB = a$, $CP = x$, $BP = y$; so ist

$$AC^2 = AD^2 + CD^2, \quad (r + x)^2 = (a - x)^2 + y^2,$$

woraus man leicht erhält:

$$y^2 = 2(a + r)x - (a^2 - r^2)$$
$$= 2(a + r)\left\{x - \frac{a - r}{2}\right\}.$$

y wird $= o$ für $x = \frac{a - r}{2}$, so daß also, wenn F der Mittelpunkt von BE ist, dieser Punkt der Curve angehören wird. Nimmt man F als Anfang der Abscissen x'; so ist

$$x = \frac{a - r}{2} + x',$$

und folglich $y^2 = 2(a + r)x'$, der Ort also eine Parabel, deren Scheitel F, Parameter $= 2(a + r)$. Die Entfernung des Brennpunktes vom Scheitel ist $= \frac{2(a + r)}{4} = \frac{a + r}{2}$, und der Focus wird also gefunden, wenn man die Linie GB halbirt.

6. Die Grundlinie eines Dreiecks, und der Unterschied der Winkel an derselben sind gegeben; man soll den Ort der Spitze finden.

Sey AC (Fig. 92.) $= a$ in D halbirt, $A - C = \delta$, und D der Anfang der Coordinaten, $DP = x$, $BP = y$; so ist $AP = \frac{1}{2}a - x$, $CP = \frac{1}{2}a + x$. Also

$$\text{tang } A = \frac{y}{\frac{1}{2}a - x} = \frac{2y}{a - 2x}, \quad \text{tang } C = \frac{y}{\frac{1}{2}a + x} = \frac{2y}{a + 2x};$$

$$\text{tang}(A - C) = \text{tang } \delta = \frac{2xy}{\frac{1}{4}a^2 - x^2 + y^2},$$

woraus:

$$y^2 - 2xy \cot \delta - x^2 + \tfrac{1}{4}a^2 = o.$$

Um nun zu irgend einem andern rechtwinkligen Coordinatensysteme, ohne den Anfang zu verlegen, überzugehen, muß man, wie leicht aus dem Art. Coordinate gefunden wird, allgemein

$$x = mu + nt, \quad y = nu - mt$$

setzen, wodurch man erhält:

Coordinate leicht geſchloſſen wird,
naten ſenkrecht auf einander ſind,
nach obiger Bedingung $n^2 - m^2$
wird, wenn man den Unterſchied t

$$4m^2n^2\operatorname{cosec}\delta^2 = 1, \quad 2mn\,co$$

Die Gleichung der Hyperbel aber w

$$2tu\{2mn + 2mn\cot\delta^2\} =$$

oder $4mntu\operatorname{cosec}\delta^2 = \frac{1}{4}a^2$
$2mn\operatorname{cosec}\delta = +1$ ſetzt,

$$2tu\operatorname{cosec}\delta = \tfrac{1}{4}a^2, \quad tu =$$

Iſt α der Winkel der Axe der t mit
Seite der negativen y; ſo iſt m =
alſo

$$2\sin\alpha\cos\alpha\operatorname{cosec}\delta = 1, \quad si$$

$\alpha = \frac{1}{2}\delta$. Dadurch iſt die Lage der
Man mache nämlich den Winkel A
richte auf EF durch D das Perpend
GH die Aſymptoten der Hyperbel, r
aus der Gleichung $tu = \frac{1}{8}a^2\sin\delta$
$\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}\delta$, $u = \pm\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}\delta$
durch A und C gehen muß, leicht be
Setzte man $2mn\operatorname{cosec}\delta = -1$;
ganz ähnliche Art ein

stimmter Länge, so daß ihre Endpunkte immer die Schenkel des Winkels berühren. Man sucht den Ort eines in der Linie MN gegebenen Punktes K, für welchen MK = m, NK = n ist.

Nimmt man A als Anfang, AC als Axe der Abscissen, α als Coordinatenwinkel an, und setzt AL = x, LK = y; so ist

$$m : m + n = x : AN, \quad AN = \frac{(m+n)x}{m};$$

$$n : m + n = y : AM, \quad AM = \frac{(m+n)y}{n};$$

$$MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2AM.AN.\cos\alpha$$

(Trigonometrie. 7.). Also, wenn man mit m + n = MN aufhebt:

$$1 = \left(\frac{x}{m}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2 - 2.\frac{x}{m}\frac{y}{n}\cos\alpha,$$

oder, für $x' = \frac{x}{m}$, $y' = \frac{y}{n}$:

$$1 = x'^2 + y'^2 - 2x'y'\cos\alpha$$

die Gleichung der gesuchten Curve, woraus man leicht erhält:

$$y' = x'\cos\alpha \pm \sqrt{1 - x'^2\sin\alpha^2}.$$

Für $x'\sin\alpha > 1$ wird y' imaginär, und für $x'\sin\alpha = 1$, $x' = \operatorname{cosec}\alpha$, ist also die Ordinate eine Berührende, da sie nur den einen Werth $y' = x'\cos\alpha = \operatorname{cosec}\alpha\cos\alpha = \cot\alpha$ hat. Sey nun

$$AE = x = m\operatorname{cosec}\alpha, \quad EF = y = n\cot\alpha,$$

wo EF der Ordinatenaxe parallel ist. Man ziehe AF, nehme diese Linie als Axe der Abscissen an, und setze AF = $\varkappa$, AD = x'', DK = y''; so ist

$$AE : AL = AF : AD, \quad AE : EF = AL : LD;$$

$$m\operatorname{cosec}\alpha : x = \varkappa : x'', \quad x = \frac{mx''\operatorname{cosec}\alpha}{\varkappa};$$

$$m\operatorname{cosec}\alpha : n\cot\alpha = x : LD, \quad LD = \frac{nx\cos\alpha}{m}.$$

Da nun LD + y'' = y; so hat man:

$$x = \frac{mx''\operatorname{cosec}\alpha}{\varkappa}, \quad y = y'' + \frac{nx''\cot\alpha}{\varkappa};$$

Ellipſe immer beſchreiben läßt.

8. Durch zwei gegebene Pu
zwei Linien MP, M′P zu ziehen,
Winkel MPM′ = α einſchließen.

Die Coordinaten der Punkte
c; a′, b′, c′; x, y, z; die Gle
M′P (Linie, gerade. 20.):

$$y = Ax + \mathfrak{A}, \quad z =$$
$$y = A'x + \mathfrak{A}', \quad z =$$

Da dieſe Linien aber durch M, M

$$b = Aa + \mathfrak{A}, \quad c =$$
$$b' = A'a' + \mathfrak{A}', \quad c' =$$
$$y - b = A(x - a), \quad z -$$
$$y - b' = A'(x - a'), \quad z -$$

Alſo (Linie, gerade. 32.):

$$\cos\alpha = \frac{1 + AA'}{\sqrt{(1 + A^2 + B^2)(}}$$

Nimmt man aber der Kürze wegen
ordinaten, MM′ als Axe der z
= 0, a′ = b′ = 0. Alſo

$$y = Ax, \quad z = Bx;$$
$$y = A'x, \quad z - c' =$$

die man leicht mittelst bekannter goniometrischer Formeln findet, und setzt in letztern die gefundenen Werthe von A, B, A′, B′; so erhält man:

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{c'\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2 + z^2 - c'z},$$

$$(x^2 + y^2 + z^2 - c'z)^2 = \frac{c'^2}{\text{tang}\,\alpha^2}(x^2 + y^2),$$

so daß also der Ort des Punktes P eine Fläche des zweiten Grades ist.

Durch eine einfache geometrische Betrachtung überzeugt man sich sogleich, daß diese Fläche erzeugt werden muß, wenn sich ein über der Linie $MM' = c'$ als Sehne beschriebener, des Winkels α fähiger, Kreisabschnitt um seine Sehne bewegt, welches sich auch leicht aus der gefundenen Gleichung ableiten läßt. Denkt man sich nämlich durch MM′ und P eine Ebene gelegt, und in derselben auf die Axe des z ein Perpendikel u von P gefällt; so ist klar, daß $u^2 = x^2 + y^2$, also

$$(u^2 + z^2 - c'z)^2 = \frac{c'^2}{\text{tang}\,\alpha^2}u^2,$$

$$u^2 + z^2 - c'z = \pm\frac{c'u}{\text{tang}\,\alpha},$$

woraus, verglichen mit (2.), das Gesagte erhellet.

9. Seyen mehrere Punkte im Raume gegeben; man soll die Lage einer Ebene bestimmen, so daß die Summen der von den gegebenen Punkten auf die Ebene gefällten Perpendikel auf beiden Seiten derselben einander gleich seyen.

Die Anzahl der gegebenen Punkte sey $= n$, und

$$x', y', z'; x'', y'', z''; x''', y''', z'''; \ldots$$

ihre Coordinaten. Die Gleichung der Ebene sey (Krumme Fläche. 4.):

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

oder der Kürze wegen

$$z = ax + by + c.$$

Folglich die von den gegebenen Punkten auf diese Ebene gefällten Perpendikel (Linie und Ebene. 51. 52.):

$$+z - ax - by -$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$c = \frac{-a(x'+x''+x'''+\ldots)-b(y'}{}$$

woraus ſich zwiſchen a, b, c,
Gleichung der Ebene, alſo nu
ſo daß es alſo auch unzählige
gabe genügen, und dieſelbe al
man den erhaltenen Werth von

$$z = ax + by +$$

ſo wird dieſelbe:

$$z - \frac{z'+z''+z'''+\ldots}{n} = a\left\{x - \frac{x'+x''+x'}{n}\right.$$

welches offenbar die Gleichung
den, durch die Coordinaten

$$\frac{x'+x''+x'''+\ldots}{n}, \frac{y'+y''+y'''}{n}$$

beſtimmten Punkt geht, ſo daß
gehenden Ebenen der Aufgabe ge
aber der Punkt der mittlern En
Punkte (Vergl. Vieleck. 10.).

10. Seyen mehrere Punkte
ſoll einen Punkt von ſolcher Beſ

Entfernungen deſſelben von dem gegebenen Punkten ſeyen
e', e'', e''', ...; ſo iſt, wie leicht aus dem Art. Linie und
Ebene (50.) geſchloſſen wird:

$$e'^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2,$$
$$e''^2 = (x - x'')^2 + (y - y'')^2 + (z - z'')^2,$$
$$e'''^2 = (x - x''')^2 + (y - y''')^2 + (z - z''')^2,$$
$$\text{ꝛc.} \qquad \text{ꝛc.}$$

Folglich, wenn man die Quadrate entwickelt, und der
Kürze wegen $x' + x'' + x''' + \ldots$ durch $\Sigma x'$, $x'^2 +$
$x''^2 + x'''^2 + \ldots$ durch $\Sigma x'^2$ bezeichnet, die Anzahl der
gegebenen Punkte aber $= n$ ſetzt:

$$p^2 = nx^2 + ny^2 + nz^2 - 2x\Sigma x' - 2y\Sigma y' - 2z\Sigma z' + \Sigma x'^2 + \Sigma y'^2 + \Sigma z'^2$$
$$o = x^2 + y^2 + z^2 - \frac{2}{n}\left\{x\Sigma x' + y\Sigma y' + z\Sigma z'\right\} .$$
$$- \frac{1}{n}\left\{p^2 - (\Sigma x'^2 + \Sigma y'^2 + \Sigma z'^2)\right\} .$$

Verlegt man nun den Anfang der Coordinaten in einen
Punkt, deſſen primitive Coordinaten

$$\frac{1}{n}\Sigma x', \frac{1}{n}\Sigma y', \frac{1}{n}\Sigma z'$$

ſind; ſo muß man, wenn übrigens beide Syſteme als pa-
rallel angenommen werden, indem man die neuen Coordi-
naten durch x_1, y_1, z_1 bezeichnet,

$$x = x_1 + \frac{1}{n}\Sigma x', \quad y = y_1 + \frac{1}{n}\Sigma y', \quad z = z_1 + \frac{1}{n}\Sigma z'$$

ſetzen, wodurch man erhält:

$$o = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + \frac{2}{n}\left\{x_1\Sigma x' + y_1\Sigma y' + z_1\Sigma z'\right\}$$
$$+ \frac{1}{n^2}\left\{(\Sigma x')^2 + (\Sigma y')^2 + (\Sigma z')^2\right\} - \frac{2}{n}\left\{x_1\Sigma x' + y_1\Sigma y' + z_1\Sigma z'\right\}$$
$$- \frac{2}{n^2}\left\{(\Sigma x')^2 + (\Sigma y')^2 + (\Sigma z')^2\right\} - \frac{1}{n}\left\{p^2 - (\Sigma x'^2 + \Sigma y'^2 + \Sigma z'^2)\right\}$$
$$= x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$$
$$- \frac{1}{n}\left\{p^2 - (\Sigma x'^2 + \Sigma y'^2 + \Sigma z'^2)\right\} - \frac{1}{n^2}\left\{(\Sigma x')^2 + (\Sigma y')^2 + (\Sigma z')^2\right\}.$$

Setzt man nun die conſtante Größe

$$\left\{p^2 - (\Sigma x'^2 + \Sigma y'^2 + \Sigma z'^2)\right\} + \frac{1}{n^2}\left\{(\Sigma x')^2 + (\Sigma y')^2 + (\Sigma z')^2\right\} = r^2;$$

wird unſere Gleichung

$$o = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - r^2, \quad r^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$$

offenbar die Gleichung einer Kugelfläche iſ
unkt der Anfang der Coordinaten iſt, u
itiven Coordinaten

$$\frac{1}{n}\Sigma x', \frac{1}{n}\Sigma y', \frac{1}{n}\Sigma z'$$

t wird (Krumme Fläche. 40.). Der H
. Unſere Aufgabe iſt alſo eine unbeſtimm
des geſuchten Punktes die ſo eben beſtim
.

Der Mittelpunkt der Kugel iſt wieder de
tlern Entfernungen der gegebenen Punkte
ieraus folgenden merkwürdigen Satz:

nn aus dem Punkte der mittlern Entfernu
Punkte im Raume, welcher durch die Coo

$$\frac{1}{n}\Sigma x', \frac{1}{n}\Sigma y', \frac{1}{n}\Sigma z'$$

t wird, mit einem willkührlichen Radiu
eſchrieben wird; ſo iſt die Summe der
n irgend einem Punkte in ihrer Oberfläch
en Punkte gezogenen geraden Linien eine

ben, welche auf höhere Curven führen, haben wir hier cht mitgetheilt, weil die Ableitung der Gleichung einer urve aus einer Eigenſchaft derſelben alle Mal ein hierher hörendes Beiſpiel liefert, und in dieſer Beziehung alſo e einzelnen Artikel dieſes Wörterbuchs, welche ſpecielle ormen der Curven betreffen, nachgeſehen werden können.

Unbeſtimmte Axe einer Curve (Axis curvae indeterminatus) heißt zuweilen die Axe einer Curve, wenn urch die Natur derſelben bloß die Lage, nicht die Länge r Axe beſtimmt wird, wie z. B. bei der Parabel. Die Axen r Ellipſe ſind beſtimmt, da beide von der Ellipſe in zwei unkten geſchnitten wird. Bei der Hyperbel heißt zuwei- n die zweite Axe die unbeſtimmte Axe, weil ſie von der yperbel nicht geſchnitten, und ihre Länge, wie bekannt, gentlich nur fingirt wird.

Unbeſtimmte Coefficienten, Coefficientes fi- ti oder assumti, ſind überhaupt, wenn eine gegebene unction unter einer andern beſtimmten Form dargeſtellt erden ſoll, die noch unbeſtimmten Coefficienten der Po- enzen der veränderlichen Größen der Function in dem all- emeinen ſymboliſchen Ausdruck der geſuchten Form, und erden zuerſt, als noch unbeſtimmte oder geſuchte Größen, urch willkührliche allgemeine Zeichen bezeichnet, dann ber der Natur der gegebenen Function und den durch die Form, auf welche dieſelbe gebracht werden ſoll, gegebenen Bedingungen gemäß beſtimmt. Durch zweckmäßige Bei- ſpiele wird dieſe Methode, welche man gewöhnlich die Me- thode der unbeſtimmten Coefficienten nennt, am beſten rläutert, und in völliges Licht geſetzt. Zur Bezeichnung er unbeſtimmten Coefficienten bedient man ſich gewöhn- ich der lateiniſchen Verſal-Buchſtaben; in der combinato- iſchen Analyſis dagegen nach der Hindenburgiſchen Cha- akteriſtik, werden ſie immer durch willkührliche Buchſta- en mit darüber geſetzten Punkten wie z. B. $\dot{a}$, $\dot{b}$, $\dot{c}$, $\dot{d}$,...; $\dot{A}$, $\dot{B}$, $\dot{C}$, $\dot{D}$,...; $\dot{a}$, $\dot{b}$, $\dot{c}$, $\dot{d}$,...; u. ſ. f. von den ge-

ſchreiben, welcher einen gegeben
durch einen gegebenen Punkt geht;

$$y^2 = \frac{a^2 - r^2}{r^2}\Big\} x'^2 - ($$

die Gleichung der Hyperbel

4. Einen Kreis zu beſchreiben
gerade Linie berührt, und durch
hindurch geht.

Sey (Fig. 90.) P der gegebene
Linie. Man ſetze AP = a, nehme AP
Ordinatenaxe an, ſo daß alſo AB =
PC = BC = x; ſo erhellet auge
der Gleichung

$$x^2 = y^2 + (x - a)^2 = y^2 +$$
$$o = y^2 - 2ax + a^2, \quad y^2 = a$$

welches die Gleichung des Orts des
ſuchten Kreiſes iſt. y wird = o,
$x = \frac{1}{2}a$, ſo daß alſo, wenn E der
E ein Punkt der Curve iſt. Nimm
der Abſciſſen x'; ſo iſt $x = \frac{1}{2}a +$
und folglich $y^2 =$ [illegible]

telpunkt des gesuchten Kreises, $AB = a$, $CP = x$, $BP = y$; so ist

$$AC^2 = AD^2 + CD^2, \quad (r + x)^2 = (a - x)^2 + y^2,$$

woraus man leicht erhält:

$$y^2 = 2(a + r)x - (a^2 - r^2)$$
$$= 2(a + r)\left\{x - \frac{a - r}{2}\right\}.$$

y wird $= o$ für $x = \frac{a - r}{2}$, so daß also, wenn F der Mittelpunkt von BE ist, dieser Punkt der Curve angehören wird. Nimmt man F als Anfang der Abscissen x'; so ist

$$x = \frac{a - r}{2} + x',$$

und folglich $y^2 = 2(a + r)x'$, der Ort also eine Parabel, deren Scheitel F, Parameter $= 2(a + r)$. Die Entfernung des Brennpunktes vom Scheitel ist $= \frac{2(a + r)}{4} = \frac{a + r}{2}$, und der Focus wird also gefunden, wenn man die Linie GB halbirt.

6. Die Grundlinie eines Dreiecks, und der Unterschied der Winkel an derselben sind gegeben; man soll den Ort der Spitze finden.

Sey AC (Fig. 92.) $= a$ in D halbirt, $A - C = \delta$, und D der Anfang der Coordinaten, $DP = x$, $BP = y$; so ist $AP = \frac{1}{2}a - x$, $CP = \frac{1}{2}a + x$. Also

$$\text{tang } A = \frac{y}{\frac{1}{2}a - x} = \frac{2y}{a - 2x}, \quad \text{tang } C = \frac{y}{\frac{1}{2}a + x} = \frac{2y}{a + 2x};$$

$$\text{tang}(A - C) = \text{tang } \delta = \frac{2xy}{\frac{1}{4}a^2 - x^2 + y^2},$$

woraus:

$$y^2 - 2xy \cot \delta - x^2 + \tfrac{1}{4}a^2 = o.$$

Um nun zu irgend einem andern rechtwinkligen Coordinatensysteme, ohne den Anfang zu verlegen, überzugehen, muß man, wie leicht aus dem Art. Coordinate gefunden wird, allgemein

$$x = mu + nt, \quad y = nu - mt$$

setzen, wodurch man erhält:

Coordinate leicht geſchloſſen wird, indem
naten ſenkrecht auf einander ſind, $n^2 +$
nach obiger Bedingung $n^2 - m^2 = 2n$
wird, wenn man den Unterſchied der Qua

$$4m^2n^2\operatorname{cosec}\delta^2 = 1, \quad 2mn\operatorname{cosec}\delta =$$

Die Gleichung der Hyperbel aber wird:

$$2tu\{2mn + 2mn\cot\delta^2\} = \tfrac{1}{4}a^2,$$

oder $4mntu\operatorname{cosec}\delta^2 = \frac{1}{4}a^2$, d.
$2mn\operatorname{cosec}\delta = +1$ ſetzt,

$$2tu\operatorname{cosec}\delta = \tfrac{1}{4}a^2, \quad tu = \tfrac{1}{8}a^2\sin\delta$$

Iſt α der Winkel der Axe der t mit der Ax
Seite der negativen y; ſo iſt $m = \sin\alpha$
alſo

$$2\sin\alpha\cos\alpha\operatorname{cosec}\delta = 1, \quad \sin 2\alpha =$$

$\alpha = \frac{1}{2}\delta$. Dadurch iſt die Lage der Aſymp
Man mache nämlich den Winkel ADE =
richte auf EF durch D das Perpendikel GH
GH die Aſymptoten der Hyperbel, welche n
aus der Gleichung $tu = \frac{1}{8}a^2\sin\delta$, wenn
$\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}\delta$, $u = \pm\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}\delta$ ſetzt,
durch A und C gehen muß. leicht beſchrieb

stimmter Länge, so daß ihre Endpunkte immer die Schenkel des Winkels berühren. Man sucht den Ort eines in der Linie MN gegebenen Punktes K, für welchen MK = m, NK = n ist.

Nimmt man A als Anfang, AC als Axe der Abscissen, α als Coordinatenwinkel an, und setzt AL = x, LK = y; so ist

$$m : m + n = x : AN, \quad AN = \frac{(m+n)x}{m};$$

$$n : m + n = y : AM, \quad AM = \frac{(m+n)y}{n};$$

$$MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2AM.AN.\cos\alpha$$

(Trigonometrie. 7.). Also, wenn man mit m + n = MN aufhebt:

$$1 = \left(\frac{x}{m}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2 - 2.\frac{x}{m}\frac{y}{n}\cos\alpha,$$

oder, für $x' = \frac{x}{m}$, $y' = \frac{y}{n}$:

$$1 = x'^2 + y'^2 - 2x'y'\cos\alpha$$

die Gleichung der gesuchten Curve, woraus man leicht erhält:

$$y' = x'\cos\alpha \pm \sqrt{1 - x'^2\sin\alpha^2}.$$

Für $x'\sin\alpha > 1$ wird y' imaginär, und für $x'\sin\alpha = 1$, $x' = \operatorname{cosec}\alpha$, ist also die Ordinate eine Berührende, da sie nur den einen Werth $y' = x'\cos\alpha = \operatorname{cosec}\alpha\cos\alpha = \cot\alpha$ hat. Sey nun

$$AE = x = m\operatorname{cosec}\alpha, \quad EF = y = n\cot\alpha,$$

wo EF der Ordinatenaxe parallel ist. Man ziehe AF, nehme diese Linie als Axe der Abscissen an, und setze AF = $\varkappa$, AD = x'', DK = y''; so ist

$$AE : AL = AF : AD, \quad AE : EF = AL : LD;$$

$$m\operatorname{cosec}\alpha : x = \varkappa : x'', \quad x = \frac{mx''\operatorname{cosec}\alpha}{\varkappa};$$

$$m\operatorname{cosec}\alpha : n\cot\alpha = x : LD, \quad LD = \frac{nx\cos\alpha}{m}.$$

Da nun LD + y'' = y; so hat man:

$$x = \frac{mx''\operatorname{cosec}\alpha}{\varkappa}, \quad y = y'' + \frac{nx''\cot\alpha}{\varkappa};$$

Ellipſe immer beſchreiben läßt.

8. Durch zwei gegebene Punkte M zwei Linien MP, M′P zu ziehen, welc Winkel MPM′ = α einſchließen.

Die Coordinaten der Punkte M, M c; a′, b′, c′; x, y, z; die Gleichung M′P (Linie, gerade. 20.):

$$y = Ax + \mathfrak{A}, \quad z = Bx + \mathfrak{B}$$
$$y = A'x + \mathfrak{A}', \quad z = B'x + \mathfrak{B}'$$

Da dieſe Linien aber durch M, M′ gehe

$$b = Aa + \mathfrak{A}, \quad c = Ba + \mathfrak{B}$$
$$b' = A'a' + \mathfrak{A}', \quad c' = B'a' + \mathfrak{B}'$$
$$y - b = A(x - a), \quad z - c = B$$
$$y - b' = A'(x - a'), \quad z - c' = B'$$

Alſo (Linie, gerade. 32.):

$$\cos\alpha = \frac{1 + AA' + BB'}{\sqrt{(1 + A^2 + B^2)(1 + A'^2}}$$

Nimmt man aber der Kürze wegen M al ordinaten, MM′ als Axe der z an; ſo = o, a′ = b′ = o. Alſo

$$y = Ax, \quad z = Bx;$$

die man leicht mittelst bekannter goniometrischer Formeln findet, und setzt in letztern die gefundenen Werthe von A, B, A′, B′; so erhält man:

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{c'\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+z^2-c'z},$$

$$(x^2+y^2+z^2-c'z)^2 = \frac{c'^2}{\text{tang}\,\alpha^2}(x^2+y^2),$$

so daß also der Ort des Punktes P eine Fläche des zweiten Grades ist.

Durch eine einfache geometrische Betrachtung überzeugt man sich sogleich, daß diese Fläche erzeugt werden muß, wenn sich ein über der Linie $MM' = c'$ als Sehne beschriebener, des Winkels α fähiger, Kreisabschnitt um seine Sehne bewegt, welches sich auch leicht aus der gefundenen Gleichung ableiten läßt. Denkt man sich nämlich durch MM′ und P eine Ebene gelegt, und in derselben auf die Axe des z ein Perpendikel u von P gefällt; so ist klar, daß $u^2 = x^2 + y^2$, also

$$(u^2+z^2-c'z)^2 = \frac{c'^2}{\text{tang}\,\alpha^2}u^2,$$

$$u^2+z^2-c'z = \pm\frac{c'u}{\text{tang}\,\alpha},$$

woraus, verglichen mit (2.), das Gesagte erhellet.

9. Seyen mehrere Punkte im Raume gegeben; man soll die Lage einer Ebene bestimmen, so daß die Summen der von den gegebenen Punkten auf die Ebene gefällten Perpendikel auf beiden Seiten derselben einander gleich seyen.

Die Anzahl der gegebenen Punkte sey $= n$, und

$$x', y', z'; x'', y'', z''; x''', y''', z'''; \ldots$$

ihre Coordinaten. Die Gleichung der Ebene sey (Krumme Fläche. 4.):

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

oder der Kürze wegen

$$z = ax + by + c.$$

Folglich die von den gegebenen Punkten auf diese Ebene gefällten Perpendikel (Linie und Ebene. 51. 52.):

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots \Big)$$

$$c = \frac{-a(x'+x''+x'''+\ldots) - b(y'+y''+y'''+\ldots}{n}$$

woraus ſich zwiſchen a, b, c, den Coe
Gleichung der Ebene, alſo nur eine E
ſo daß es alſo auch unzählige Ebenen gie
gabe genügen, und dieſelbe alſo unbeſti
man den erhaltenen Werth von c in die E

$$z = ax + by + c;$$

ſo wird dieſelbe:

$$z - \frac{z'+z''+z'''+\ldots}{n} = a\left\{x - \frac{x'+x''+x'''+\ldots}{n}\right\} + b\Big\{$$

welches offenbar die Gleichung einer Ebe
den, durch die Coordinaten

$$\frac{x'+x''+x'''+\ldots}{n}, \quad \frac{y'+y''+y'''+\ldots}{n}, \quad \frac{z'}{}$$

beſtimmten Punkt geht, ſo daß alſo alle du
gehenden Ebenen der Aufgabe genügen.
aber der Punkt der mittlern Entfernunge
Punkte (Vergl. Vieleck. 10.).

10. Seyen mehrere Punkte im Raum

Entfernungen deſſelben von dem gegebenen Punkten ſeyen e', e'', e''', ...; ſo iſt, wie leicht aus dem Art. Linie und Ebene (50.) geſchloſſen wird:

$$e'^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2,$$
$$e''^2 = (x - x'')^2 + (y - y'')^2 + (z - z'')^2,$$
$$e'''^2 = (x - x''')^2 + (y - y''')^2 + (z - z''')^2,$$
$$\text{ꝛc.} \qquad \text{ꝛc.}$$

Folglich, wenn man die Quadrate entwickelt, und der Kürze wegen $x' + x'' + x''' + \ldots$ durch $\Sigma x'$, $x'^2 + x''^2 + x'''^2 + \ldots$ durch $\Sigma x'^2$ bezeichnet, die Anzahl der gegebenen Punkte aber $= n$ ſetzt:

$$p^2 = nx^2 + ny^2 + nz^2 - 2x\Sigma x' - 2y\Sigma y' - 2z\Sigma z' + \Sigma x'^2 + \Sigma y'^2 + \Sigma z'^2$$
$$o = x^2 + y^2 + z^2 - \frac{2}{n}\left\{x\Sigma x' + y\Sigma y' + z\Sigma z'\right\} .$$
$$- \frac{1}{n}\left\{p^2 - (\Sigma x'^2 + \Sigma y'^2 + \Sigma z'^2)\right\} .$$

Verlegt man nun den Anfang der Coordinaten in einen Punkt, deſſen primitive Coordinaten

$$\frac{1}{n}\Sigma x', \frac{1}{n}\Sigma y', \frac{1}{n}\Sigma z'$$

ſind; ſo muß man, wenn übrigens beide Syſteme als parallel angenommen werden, indem man die neuen Coordinaten durch x_1, y_1, z_1 bezeichnet,

$$x = x_1 + \frac{1}{n}\Sigma x', \quad y = y_1 + \frac{1}{n}\Sigma y', \quad z = z_1 + \frac{1}{n}\Sigma z'$$

ſetzen, wodurch man erhält:

$$o = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + \frac{2}{n}\left\{x_1\Sigma x' + y_1\Sigma y' + z_1\Sigma z'\right\}$$
$$+ \frac{1}{n^2}\left\{(\Sigma x')^2 + (\Sigma y')^2 + (\Sigma z')^2\right\} - \frac{2}{n}\left\{x_1\Sigma x' + y_1\Sigma y' + z_1\Sigma z'\right\}$$
$$- \frac{2}{n^2}\left\{(\Sigma x')^2 + (\Sigma y')^2 + (\Sigma z')^2\right\} - \frac{1}{n}\left\{p^2 - (\Sigma x'^2 + \Sigma y'^2 + \Sigma z'^2)\right\}$$
$$= x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$$
$$- \frac{1}{n}\left\{p^2 - (\Sigma x'^2 + \Sigma y'^2 + \Sigma z'^2)\right\} - \frac{1}{n^2}\left\{(\Sigma x')^2 + (\Sigma y')^2 + (\Sigma z')^2\right\}.$$

Setzt man nun die conſtante Größe

$$\frac{1}{n}\left\{p^2 - (\Sigma x'^2 + \Sigma y'^2 + \Sigma z'^2)\right\} + \frac{1}{n^2}\left\{(\Sigma x')^2 + (\Sigma y')^2 + (\Sigma z')^2\right\} = r^2;$$

ſo wird unſere Gleichung

$$o = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - r^2, \quad r^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$$

11. Der Mittelpunkt der Kugel iſt
der mittlern Entfernungen der gegebene
erhält hieraus folgenden merkwürdigen

Wenn aus dem Punkte der mittlern
gebener Punkte im Raume, welcher dur

$$\frac{1}{n}\Sigma x', \frac{1}{n}\Sigma y', \frac{1}{n}\Sigma z'$$

beſtimmt wird, mit einem willkührlich
Kugel beſchrieben wird; ſo iſt die Sun
aller von irgend einem Punkte in ihrer
gegebenen Punkte gezogenen geraden Lin
Größe, und zwar, wie aus dem Obiger

$$p^2 = nr^2+\Sigma x'^2+\Sigma y'^2+\Sigma z'^2-\frac{1}{n}\left\{(\Sigma x')^2+(\Sigma$$

12. Dies mag hinreichen, die Na
geometriſcher Aufgaben zu erläutern.
Ort giebt ein Beiſpiel einer ſolchen Aufg
hiermit dieſer Artikel zu vergleichen iſt, ſo w
ſche Behandlung der in dem großen Werke
über die ebenen Oerter enthaltenen Aufga
Uebung ſeyn wird. Außerdem findet ma

gaben, welche auf höhere Curven führen, haben wir hier nicht mitgetheilt, weil die Ableitung der Gleichung einer Curve aus einer Eigenſchaft derſelben alle Mal ein hierher gehörendes Beiſpiel liefert, und in dieſer Beziehung alſo die einzelnen Artikel dieſes Wörterbuchs, welche ſpecielle Formen der Curven betreffen, nachgeſehen werden können.

Unbeſtimmte Axe einer Curve (Axis curvae indeterminatus) heißt zuweilen die Axe einer Curve, wenn durch die Natur derſelben bloß die Lage, nicht die Länge der Axe beſtimmt wird, wie z. B. bei der Parabel. Die Axen der Ellipſe ſind beſtimmt, da beide von der Ellipſe in zwei Punkten geſchnitten wird. Bei der Hyperbel heißt zuweilen die zweite Axe die unbeſtimmte Axe, weil ſie von der Hyperbel nicht geſchnitten, und ihre Länge, wie bekannt, eigentlich nur fingirt wird.

Unbeſtimmte Coefficienten, Coefficientes ficti oder assumti, ſind überhaupt, wenn eine gegebene Function unter einer andern beſtimmten Form dargeſtellt werden ſoll, die noch unbeſtimmten Coefficienten der Potenzen der veränderlichen Größen der Function in dem allgemeinen ſymboliſchen Ausdruck der geſuchten Form, und werden zuerſt, als noch unbeſtimmte oder geſuchte Größen, durch willkührliche allgemeine Zeichen bezeichnet, dann aber der Natur der gegebenen Function und den durch die Form, auf welche dieſelbe gebracht werden ſoll, gegebenen Bedingungen gemäß beſtimmt. Durch zweckmäßige Beiſpiele wird dieſe Methode, welche man gewöhnlich die Methode der unbeſtimmten Coefficienten nennt, am beſten erläutert, und in völliges Licht geſetzt. Zur Bezeichnung der unbeſtimmten Coefficienten bedient man ſich gewöhnlich der lateiniſchen Verſal-Buchſtaben; in der combinatoriſchen Analyſis dagegen nach der Hindenburgiſchen Charakteriſtik, werden ſie immer durch willkührliche Buchſtaben mit darüber geſetzten Punkten wie z. B. $\dot{a}$, $\dot{b}$, $\dot{c}$, $\dot{d}$,...; $\dot{A}$, $\dot{B}$, $\dot{C}$, $\dot{D}$,...; $\dot{a}$, $\dot{b}$, $\dot{c}$, $\dot{d}$,...; u. ſ. f. von den ge-

in zwei einfache Brüche mit den Nennern zu zerlegen; so setze man

$$\frac{\alpha x+\gamma}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = \frac{(A+B)x}{(x-}$$

und die Aufgabe ist aufgelöst, wenn A, werden, daß für jedes x

$$\alpha x + \gamma = (A+B)x - (Ab + Ba$$

ist, welcher Bedingung offenbar genügt B so bestimmt werden, daß

$$A + B = \alpha, \; Ab + Ba = -\gamma$$

Löset man nun diese beiden Gleichungen n so erhält man:

$$A = -\frac{\alpha a+\gamma}{b-a}, \quad B = \frac{\alpha b+\gamma}{b-a}$$

wodurch also A, B den Bedingungen der bestimmt sind.

2. Kann die gegebene Function nicht a Form gebracht werden; so wird dies die immer anzeigen. Für

$$\frac{1}{x(a^2-x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{a^2-x^2}$$

erhielte man, wenn die beiden Brüche auf nung gebracht werden:

$$\frac{1}{x(a^2-x^2)} = \frac{1}{x(a-x)(a+x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{a-x} + \frac{C}{a+x}$$

so erhält man leicht:

$$\frac{1}{x(a^2-x^2)} = \frac{Aa^2 + a(B+C)x + (B-A-C)x^2}{x(a-x)(a+x)},$$

$$1 = Aa^2 + a(B+C)x + (B-A-C)x^2,$$

$$Aa^2 = 1,\ a(B+C) = 0,\ B-A-C = 0;$$

woraus, wenn diese drei Gleichungen nach A, B, C aufgelöst werden:

$$A = \frac{1}{a^2},\ B = \frac{1}{2a^2},\ C = -\frac{1}{2a^2},$$

so daß sich also nun der angenommenen Form genügen läßt. Für

$$\frac{x^3+x^2+2}{x(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x-1)^2} + \frac{E}{x-1}$$

erhält man nach einem ganz ähnlichen Verfahren:

$$A = 2,\ B = -\tfrac{1}{2},\ C = -\tfrac{1}{4},\ D = 1,\ E = -\tfrac{3}{4}.$$

Allgemeinere Untersuchungen über diesen Gegenstand s. im Art. Function a. a. O.

3. Auch bei der Summirung der Reihen wird diese Methode zuweilen mit Vortheil angewandt. Sey z. B. die Summe der Potenzen der natürlichen Zahlen zu finden. Man bezeichne die Summe

$$1^n + 2^n + 3^n + 4^n + \ldots + x^n$$

überhaupt durch Sx^n, und setze, da diese Summe für $x = 0$ offenbar verschwindet,

$$Sx^n = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots;$$

also

$$S(x+1)^n = A(x+1) + B(x+1)^2 + C(x+1)^3 + D(x+1)^4 + \ldots$$

$$S(x+1)^n - Sx^n = (x+1)^n = A\{(x+1) - x\} + B\{(x+1)^2 - x^2\}$$
$$+ C\{(x+1)^3 - x^3\} + D\{(x+1)^4 - x^4\} + \ldots\ldots$$

Die unbestimmten Coefficienten A, B, C, D, ... müssen nun so bestimmt werden, daß dieser Gleichung ganz allgemein für jedes x genügt wird. Ist dies möglich; so ist, wie angenommen wurde, wirklich

$$Sx^n = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots,$$

weil, wegen jener Gleichung, indem für x die natürlichen Zahlen nach der Ordnung von 0 an gesetzt werden:

multiplicirt, für jedes x,

$$S(x+1)^n = A(x+1) + B(x+1)^2 +$$

und folglich auch

$$Sx^n = Ax + Bx^2 + Cx^3 .$$

wie behauptet wurde. Nach
kungen ſey, für die Summe de
türlichen Zahlen, zuerſt $n = 1$;

$$1 + x = A\{(1+x) - x\} + B\{(1+x)^2 -$$

welcher für jedes x genügt werde
Theil dieſer Gleichung nur zwei
man die Coefficienten aller Glied
welchen höhere Potenzen von x
$= 0$ ſetzen, woraus

$$1 + x = A\{(1 + x) - x\} + B\{(1 +$$

Um dieſer Gleichung für jedes x
ſo A, B aus den Gleichungen

$$A + B = 1, \quad 2B$$

zu beſtimmen, woraus $A = B$

$$Sx = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}x^2 =$$

wie bekannt.

Für $n = 2$ hat man:

und A, B, C müſſen nun ſo beſtimmt werden, daß ſie den drei Gleichungen

$$A + B + C = 1,\quad 2B + 3C = 2,\quad 3C = 1$$

genügen. Dies giebt

$$A = \tfrac{1}{6},\quad B = \tfrac{1}{2},\quad C = \tfrac{1}{3};$$

$$Sx^2 = \tfrac{1}{6}x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 = \frac{x(x+1)(2x+1)}{1.2.3}.$$

Für die Summe der Cubikzahlen erhält man auf ähnliche Art:

$$1 + 3x + 3x^2 + x^3 =$$
$$A + B + C + D + (2B + 3C + 4D)x + (3C + 6D)x^2 + 4Dx^3,$$

und die Coefficienten müſſen ſo beſtimmt werden, daß ſie den vier Gleichungen

$$A + B + C + D = 1,\ 2B + 3C + 4D = 3,$$
$$3C + 6D = 3,\ 4D = 1$$

genügen, woraus

$$A = 0,\quad B = \tfrac{1}{4},\quad C = \tfrac{1}{4},\quad D = \tfrac{1}{4};$$

$$Sx^3 = \tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{4}x^3 + \tfrac{1}{4}x^4 = \left\{\frac{x(x+1)}{1.2}\right\}^2.$$

Für die Summe der Biquadratzahlen erhält man eben ſo:

$$Sx^4 = -\tfrac{1}{30}x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 = \frac{x(x+1)(2x+1)(3x^2+3x-1)}{1.2.3.5}.$$

Dies wird zur Erläuterung der Methode hinreichen. Wie man weiter gehen kann, fällt in die Augen. In dem Art. Potenz. III. iſt ausführlich von dieſem Gegenſtande gehandelt, dabei aber ein anderer Weg eingeſchlagen worden.

4. Mit ganz beſonderm Vortheil wird aber dieſe Methode angewandt, wenn eine Function in eine nach Potenzen ihrer veränderlichen Größe fortſchreitende Reihe entwickelt werden ſoll, und ſie erhält in dieſer Beziehung vorzugsweiſe den Namen der Methode der unbeſtimmten Coefficienten. Um mit ganz einfachen Beiſpielen anzufangen; ſo ſey der Bruch $\frac{1}{1-ax}$ in eine nach den poſitiven ganzen Potenzen von x fortſchreitende Reihe zu entwickeln, und man ſetze daher:

$$\frac{1}{1-ax} = A + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + \ldots$$

Die Coefficienten A, A_1, A_2, A_3, ... ſind nun ſo zu be-

erfüllt wird. Iſt dieſe Beſtimmung ausführ
auch die Entwickelung des gegebenen Bruchs
von obiger Form möglich ſeyn. Führte aber
mung auf widerſprechende Reſultate; ſo müſ
nahme gefehlt, und die Entwickelung unſ
eine Reihe von obiger Form demnach ur
Obige Gleichung wird aber für jedes x erfi
unbeſtimmten Coefficienten ſo beſtimmt w
folgender Reihe von Gleichungen genügen:

$$\begin{aligned} A &= 1, \\ A_1 - \alpha A &= 0, \\ A_2 - \alpha A_1 &= 0, \\ A_3 - \alpha A_2 &= 0, \\ A_4 - \alpha A_3 &= 0, \\ \text{u. ſ. f.} \qquad & \text{u. ſ. f.} \end{aligned}$$

eine Beſtimmung, welche offenbar immer n
dem ſich aus denſelben unmittelbar folgen
Coefficienten ergeben:

$$A = 1,\ A_1 = \alpha,\ A_2 = \alpha^2,\ A_3 = \alpha^3,\ A_4 =$$

wo auch das Geſetz ganz deutlich erhellet.

$$\frac{1}{\quad} = 1 + \alpha x + \alpha^2 x^2 + \alpha^3 x^3 + \alpha^4 x$$

$$\frac{1}{1 - \alpha x + \gamma x^2} = A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \ldots,$$

und bestimme wieder die Coefficienten so, daß sie dieser Gleichung für jedes x genügen. Diese Gleichung ist aber eine unmittelbare Folge aus der Gleichung

$$1 = (1 - \alpha x + \gamma x^2)(A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots)$$
$$= A + A_1 \left\{ \begin{matrix} x + A_2 \\ - \alpha A \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} x^2 + A_3 \\ - \alpha A_1 \\ + \gamma A \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} x^3 + \ldots \\ - \alpha A_2 \\ + \gamma A_1 \end{matrix} \right\}$$

so daß also der ersten Gleichung für jedes x genügt seyn wird, wenn die Coefficienten der zweiten gemäß bestimmt werden. Dies giebt die Gleichungen:

$$\begin{aligned} A &= 1, \\ A_1 - \alpha A &= 0, \\ A_2 - \alpha A_1 + \gamma A &= 0, \\ A_3 - \alpha A_2 + \gamma A_1 &= 0, \\ A_4 - \alpha A_3 + \gamma A_2 &= 0, \end{aligned}$$

u. s. f. u. s. f.

also

$$\begin{aligned} A &= 1, \\ A_1 &= \alpha A, \\ A_2 &= \alpha A_1 - \gamma A, \\ A_3 &= \alpha A_2 - \gamma A_1, \\ A_4 &= \alpha A_3 - \gamma A_2, \end{aligned}$$

u. s. f.

und daß diesen Gleichungen durch eine successive Bestimmung der Coefficienten immer genügt werden kann, die Entwickelung des gegebenen Bruchs in eine Reihe von obiger Form also möglich ist, fällt sogleich in die Augen. Man erhält

$$\begin{aligned} A &= 1, \\ A_1 &= \alpha, \\ A_2 &= \alpha^2 - \gamma, \\ A_3 &= \alpha^3 - 2\alpha\gamma, \\ A_4 &= \alpha^4 - 3\alpha^2\gamma + \gamma^2, \\ A_5 &= \alpha^5 - 4\alpha^3\gamma + 3\alpha\gamma^2, \\ A_6 &= \alpha^6 - 5\alpha^4\gamma + 6\alpha^2\gamma^2 - \gamma^3, \\ A_7 &= \alpha^7 - 6\alpha^5\gamma + 10\alpha^3\gamma^2 - 4\alpha\gamma^3, \\ A_8 &= \alpha^8 - 7\alpha^6\gamma + 15\alpha^4\gamma^2 - 10\alpha^2\gamma^3 + \gamma^4, \end{aligned}$$

u. s. f. u. s. f.

$$+ \frac{}{1.2}\alpha^{\cdot}\gamma^{n-}$$

$$A_{2n+1} = \alpha^{2n+1} - \frac{2n}{1}\alpha^{2n-1}\gamma$$

$$+ \frac{(2n-1)(2n-}{1.2.3}$$

$$- \frac{(2n-2)(2n-}{1.2.}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\mp \frac{(n+2)(n+1)}{1.2.3}$$

6. Nicht immer ist die Anwend einfach, wie in den vorigen Beispie besondere Kunstgriffe. Von beson die Form der Reihe richtig anzune entweder gar keine Bestimmung d oder zu widersprechenden Resultaten ein Zeichen ist, daß die Entwickelu ction in eine Reihe von der angenom ist. Es wird daher nicht unnütz seyn Beispielen übergehen, einige allgem dieser Beziehung vorauszuschicken.

7. Die einfachste, am häufigsten

einer Function φx, welchen sie erhält, wenn man $x = 0$ setzt, soll durch $\varphi 0$ bezeichnet werden.

8. Unter einer Function einer veränderlichen Größe versteht man bekanntlich jede von derselben auf irgend eine Art abhängende Größe, so daß verschiedenen bestimmten Werthen der veränderlichen Größe auch gewisse bestimmte Werthe der Function entsprechen, worüber der Art. Function mit Mehrerem zu vergleichen.

Sey nun φx das allgemeine Symbol irgend einer Function von x, und man setze, da die Entwickelung dieser Function in eine nach den positiven ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe verlangt wird,

$$\varphi x = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots,$$

wo es nun auf die Bestimmung der Coefficienten A, B, C, D, E,.... ankommt. Setzt man $x = 0$; so erhält man sogleich

$$A = \varphi 0;$$
$$\varphi x = \varphi 0 + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots;$$
$$\frac{\varphi x - \varphi 0}{x} = B + Cx + Dx^2 + Ex^3 + \ldots;$$

wo offenbar $\frac{\varphi x - \varphi 0}{x}$ wieder eine Function von x ist, die wir durch $\varphi_1 x$ bezeichnen wollen, so daß also

$$\varphi_1 x = B + Cx + Dx^2 + Ex^3 + Fx^4 + \ldots,$$

woraus, wenn man $x = 0$ setzt, wie vorher:

$$B = \varphi_1 0;$$
$$\varphi_1 x = \varphi_1 0 + Cx + Dx^2 + Ex^3 + Fx^4 + \ldots,$$
$$\frac{\varphi_1 x - \varphi_1 0}{x} = C + Dx + Ex^2 + Fx^3 + \ldots;$$

wo wiederum $\frac{\varphi_1 x - \varphi_1 0}{x}$ eine Function von x ist, die durch $\varphi_2 x$ bezeichnet werden soll, so daß

$$\varphi_2 x = C + Dx + Ex^2 + Fx^3 + Gx^4 + \ldots,$$

woraus, wenn man $x = 0$ setzt, ferner

$$C = \varphi_2 0;$$
$$\varphi_2 x = \varphi_2 0 + Dx + Ex^2 + Fx^3 + Gx^4 + \ldots,$$
$$\frac{\varphi_2 x - \varphi_2 0}{x} = D + Ex + Fx^2 + Gx^3 + \ldots;$$

wo die Function $\frac{\varphi_2 x - \varphi_2 0}{x} = \varphi_3 x$ gesetzt werden soll.

$$\varphi_2 x = \frac{\varphi_1 x - \varphi_1}{x}$$

$$\varphi_3 x = \frac{\varphi_2 x - \varphi_2}{x}$$

$$\varphi_4 x = \frac{\varphi_3 x - \varphi_3}{x}$$

. . . . . .

$$\varphi_{n+1} x = \frac{\varphi_n x - \varphi_n}{x}$$

. . . . . .

und die Coefficienten sind:

$$A = \varphi_0,\ B = \varphi_1 0,\ C =$$

die gesuchte Reihe also

$$\varphi x = \varphi_0 + \varphi_1 0 . x + \varphi_2 0 . x^2 +$$

9. Ueber diese Bestimmung t
folgende Bemerkungen zu mache
heben. Betrachtet man nämlich

$$\varphi x = \frac{\varphi_{n-1} x - \varphi_{n-1} 0}{x},$$

näher; so ist klar, daß die Bes
auf die Bestimmung des besonde
gründet. Setzt man aber in der
veränderliche Größe = 0; so erh

$$\varphi_n 0 = \frac{\varphi_{n-1} 0 - \varphi_{n-1}}$$

offenbar eine Function von x ist, und daß folglich, nach dem oben (8.) von Neuem festgestellten allgemeinen Begriffe der Function, nothwendig jedem bestimmten Werthe von x, also auch dem Werthe $x = 0$, ein bestimmter Werth von $\varphi_n x$ entsprechen muß; so fällt leicht in die Augen, daß obige Unbestimmtheit nur scheinbar, und bloß durch die ganz allgemeine Form der Function $\varphi_n x$ herbeigeführt ist, indem es keinem Zweifel unterworfen ist, daß dem bestimmten Werthe $x = 0$ auch ein bestimmter Werth von $\varphi_n x$ entsprechen muß, wenn er sich auch unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ darstellt, welches ja überhaupt nicht selten der Fall ist. So wird z. B. der Bruch

$$\frac{x^3 - ax^2 - a^2x + a^3}{x^2 - a^2} = \frac{0}{0},$$

wenn man $x = a$ setzt. Bemerkt man aber, daß so wohl der Zähler, als auch der Nenner, sich in Factoren zerlegen läßt, wodurch

$$\frac{x^3 - ax^2 - a^2x + a^3}{x^2 - a^2} = \frac{(x-a)^2(x+a)}{(x-a)(x+a)},$$

d. i., wenn man die gleichen Factoren aufhebt, $= x - a$ wird; so ist klar, daß für $x = a$ der Werth obigen Bruchs $= 0$ ist, und so in andern Fällen, worüber auch der Art. Function. (50. ff) nachzusehen ist. Es ist also keinem Zweifel unterworfen, daß es für $x = 0$ auch gewisse bestimmte Werthe der durch φ bezeichneten Functionen geben muß, wenn sie sich auch hier unter unbestimmten Formen darstellen. Im Allgemeinen giebt es also auch immer bestimmte Werthe der Coefficienten A, B, C, D, ..., und die Entwickelung der Function φx in eine nach den positiven ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe ist also im Allgemeinen immer möglich, so daß nämlich

$$\varphi x = \varphi 0 + \varphi_1 0 . x + \varphi_2 0 . x^2 + \varphi_3 0 . x^3 + \varphi_4 0 . x^4 + \ldots$$

10. Tritt aber, welches offenbar auch möglich seyn kann, der Fall ein, daß für $x = 0$ der Zähler einer der obigen Functionen einen bestimmten constanten Werth a erhält, der Nenner aber verschwindet; so erhält man immer für irgend einen Coefficienten einen Ausdruck von der Form $\frac{a}{0}$, welches bekanntlich (s. den Art. Unendlich.)

und von Ausdrücken, wie $\frac{\infty}{0}$, be
möglich ist. Nur dann also, wei
Bestimmung der Coefficienten nie
Form $\frac{a}{0}$ kommt, ist die Entwick
in eine nach den positiven ganzen
schreitende Reihe möglich, wobei zu
keit erhellet, in jedem Falle imme
der Coefficienten aufzusuchen, um fi
auch wenn die Reihe bis ins Une
doch nie Ausdrücke von der Form $\frac{a}{0}$

11. Vorhergehende analytische
nun auch leicht in einen synthetische
Sey nämlich φx die gegebene Func
me die Functionen $\varphi_1 x$, $\varphi_2 x$, φ_3
wie aus dem Obigen (9.) erhellet, i
den Gleichungen:

$$\varphi x = \varphi x$$

$$\varphi_1 x = \frac{\varphi x - \varphi}{x}$$

$$\varphi_2 x = \frac{\varphi_1 x - \varphi}{x}$$

der Form $\frac{a}{o}$ kommt, die Function φx immer in eine nach den positiven ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe entwickeln, so daß alle Coefficienten bestimmte numerische Werthe, deren keiner $= \frac{a}{o}$ ist, haben. Denn obige Gleichungen geben:

$$\begin{aligned}
\varphi x - \varphi_1 x . x &= \varphi o, \\
\varphi_1 x - \varphi_2 x . x &= \varphi_1 o, \\
\varphi_2 x - \varphi_3 x . x &= \varphi_2 o, \\
\varphi_3 x - \varphi_4 x . x &= \varphi_3 o, \\
&\cdots\cdots\cdots \\
\varphi_{n-1} x - \varphi_n x . x &= \varphi_{n-1} o, \\
\varphi_n x - \varphi_{n+1} x . x &= \varphi_n o, \\
&\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}
\varphi x - \varphi_1 x . x &= \varphi o, \\
\varphi_1 x . x - \varphi_2 x . x^2 &= \varphi_1 o . x, \\
\varphi_2 x . x^2 - \varphi_3 x . x^3 &= \varphi_2 o . x^2, \\
\varphi_3 x . x^3 - \varphi_4 x . x^4 &= \varphi_3 o . x^3, \\
&\cdots\cdots\cdots \\
\varphi_{n-1} x . x^{n-1} - \varphi_n x . x^n &= \varphi_{n-1} o . x^{n-1}, \\
\varphi_n x . x^n - \varphi_{n+1} x . x^{n+1} &= \varphi_n o . x^n, \\
&\cdots\cdots\cdots ;
\end{aligned}$$

also, wenn man addirt:

$$\varphi x + \varphi_1 x . x + \varphi_2 x . x^2 + \varphi_3 x . x^3 + \ldots + \varphi_n x . x^n + \ldots$$
$$- \left| \varphi_1 x . x + \varphi_2 x . x^2 + \varphi_3 x . x^3 + \varphi_4 x . x^4 + \ldots + \varphi_n x . x^n + \ldots \right|$$
$$= \varphi o + \varphi_1 o . x + \varphi_2 o . x^2 + \varphi_3 o . x^3 + \ldots + \varphi_n o . x^n + \ldots$$

Die beiden unendlichen Reihen auf der linken Seite des Gleichheitszeichens sind offenbar ganz übereinstimmend mit einander, und nur darin unterschieden, daß die erste das Glied φx mehr enthält, so daß also ihr Unterschied eben dieses Glied, und folglich

$$\varphi x = \varphi o + \varphi_1 o . x + \varphi_2 o . x^2 + \varphi_3 o . x^3 + \ldots + \varphi_n o . x^n + \ldots$$

ist. Dies ist aber, wegen der obigen Voraussetzung in Bezug auf φo, $\varphi_1 o$, $\varphi_2 o$, $\varphi_3 o$, ..., eine Reihe von der verlangten Form.

12. Die Möglichkeit der Entwickelung von φx in eine Reihe nach den positiven ganzen Potenzen von x, hängt also davon ab, daß keine der Functionen φx, $\varphi_1 x$, $\varphi_2 x$, $\varphi_3 x$, ... für $x = o$ die Form $\frac{a}{o}$ annimmt. Es fragt

ſtaben unterſchieden wird, um anzuzeigen, d
geſetzt werden muß, weil offenbar nur unter
$\frac{a}{\xi}$ jede Function von x, welche für x =
$\frac{a}{o}$ enthält, repräſentiren kann, und nur
rung dieſes Ausdrucks verſtattet iſt, wo
Werth der Function für x = o ankommt
nun die Richtigkeit folgender Sätze.

14. Wenn $\varphi_n x$, für x = o, =
immer $\varphi_{n+1} x$, für x = o, = $-\frac{a}{o}$.

$$\varphi_{n+1} x = \frac{\varphi_n x - \varphi_n o}{x},$$

oder, da nach der Vorausſetzung $\varphi_n o$

$$\varphi_{n+1} x = \frac{\varphi_n x - \frac{a}{\xi}}{x} = \frac{\xi . \varphi_n x}{\xi}$$

unter der Vorausſetzung, daß x = ξ =
Alſo

$$\varphi_{n+1} o = \frac{-a}{o} = -\frac{a}{o}.$$

ird, da nach der Annahme $\varphi_{n+1}x$, für $x = 0$, $=$; iſt:

$$\frac{a}{\xi} = \frac{\varphi_n x - \varphi_n 0}{x}, \quad a = \varphi_n x - \varphi_n 0,$$

eil ξ an ſich mit x völlig einerlei iſt, nur unter der Vorusſetzung, daß $x = 0$ geſetzt wird. Wäre nun $\varphi_n x$ für $= 0$, nicht $= \frac{a}{0}$, ſondern hätte einen beſtimmten umeriſchen Werth α; ſo folgte aus der Gleichung

$$a = \varphi_n x - \varphi_n 0,$$

enn man, wie erfordert wird, und nach dem Obigen gehehen muß, $x = 0$ ſetzt:

$$a = \varphi_n 0 - \varphi_n 0 = a - a = 0,$$

a doch nach der Vorausſetzung a nicht $= 0$ ſeyn ſoll. lſo iſt es falſch, daß $\varphi_n 0$ nicht $= \frac{a}{0}$ wäre, und es iſt lglich $\varphi_n 0 = \frac{a}{0}$. In der That implicirt, wenn man $0 = \frac{a}{0} = \frac{a}{\xi}$ ſetzt, unter der Bedingung, daß am chluſſe der Rechnung $\xi = 0$ geſetzt wird; die Gleichung

$$a = \varphi_n 0 - \varphi_n 0$$

ne Ungereimtheit, weil dann

$$a = \frac{a}{\xi} - \frac{a}{\xi},$$

er, wenn man mit ξ multiplicirt,

$$a\xi = a - a,$$

o, für ξ, wie erforderlich iſt, $= 0$:

$$0 = a - a.$$

ie Gleichung

$$a = \frac{a}{\xi} - \frac{a}{\xi} = \varphi_n 0 - \varphi_n 0$$

nn als aus der Gleichung

$$a\xi = a - a,$$

er unter der Vorausſetzung, daß $\xi = 0$ geſetzt werden uß, entſtanden gedacht werden.

16. Aus dieſen Sätzen folgt nun:

1, Wenn die gegebene Function φx für $x = 0$, $=$. wird; ſo iſt auch $\varphi_1 x = \frac{a}{0}$, folglich auch $\varphi_2 x =$

positiven ganzen Potenzen von x
unmöglich.

2, Wird irgend eine der ob
$\varphi_{n+1}x = \frac{a}{o}$ für $x = o$; ſo i
alſo auch $\varphi_{n-1}x$, alſo auch φ_{n-}
man ſo weiter geht, auch φx ſelbſ

3, Iſt folglich φx, für $x =$
auch keine der Functionen

$$\varphi_1 x, \varphi_2 x, \varphi_3 x, \varphi_4$$

für dieſen Werth von x, $= \frac{a}{o}$,
gend einer, z. B. $\varphi_{n+1}x$, der
eben Bewieſenen, auch $\varphi x = \frac{a}{o}$
welches gegen die Vorausſetzung i

4, Hieraus ſchließt man nun

Wird $\varphi x = \frac{a}{o}$ für $x = o$;
von φx in eine nach den poſitiven
fortſchreitende Reihe unmöglich;
$\frac{a}{o}$ für $x = o$, ſondern erhält f

Symbol einer veränderlichen Größe betrachtet wird,
ihm keine beſondern Werthe beilegt, einen völlig be-
ı Werth, welcher im Allgemeinen nicht $= \frac{a}{0}$ iſt.
läßt ſich, ſo lange dem x keine beſondern Werthe bei-
erden, $\varphi(x + i)$ immer in eine nach den poſiti-
en Potenzen von i fortſchreitende Reihe entwickeln.
Art. Taylors Lehrſatz. (3.) iſt ein anderer Beweis
r die ganze Analyſis höchſt wichtigen Satzes nach
ıge gegeben worden. Ich habe in den vorherge-
Nummern einen Verſuch gewagt, denſelben auf
leicht genügendere Art zu begründen, und unter-
ieſe Betrachtungen dem nachſichtigen Urtheil der

Jede Belehrung über dieſen ſchwierigen Gegen-
rd mir erwünſcht ſeyn. Auch ſcheint nur auf dieſe
)er Methode der unbeſtimmten Coefficienten ein
:ſtes Fundament untergelegt zu werden, weshalb
:etrachtungen in dieſem Artikel nicht fehlen durften.

Endlich läßt ſich noch im Allgemeinen die Frage
en, wie in dem Falle, wo $\varphi x = \frac{a}{0}$ für $x = 0$,
Entwickelung in eine Reihe nach den poſitiven gan-
enzen von x alſo nicht möglich iſt, die Form der
gefunden werden kann. Allgemeine Vorſchriften
ch offenbar hier nicht geben. Am beſten wird man
ıction φx entweder ſelbſt ſo umzuformen ſuchen,
nicht $= \frac{a}{0}$ wird, für $x = 0$, die transformirte
)n in eine Reihe nach den poſitiven ganzen Potenzen
:ntwickeln, und daraus für φx ſelbſt eine Reihe ab-
ſuchen; oder man verwandelt, welches immer mög-
(17.), $\varphi(x + i)$ in eine Reihe nach den poſitiven
Potenzen von i (am leichteſten freilich mittelſt der
:ntialrechnung. Taylors Lehrſatz. 12.), und ſucht
ür x einen ſolchen beſtimmten Werth einzuführen,
n Coefficient der erhaltenen Reihe $= \frac{a}{0}$ wird. Bei-
)erden dieſes deutlicher machen.

). Noch beruhet die Methode der unbeſtimmten Co-
ıten, wenn ſie mit Leichtigkeit und Sicherheit ange-

ſo gilt ſie auch für $x = o$, woraus

$$A = \mathfrak{A},$$
$$Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots = \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2$$
$$B + Cx + Dx^2 + Ex^3 + \ldots = \mathfrak{B} + \mathfrak{C}x$$

ebenfalls für jedes x, alſo auch für

$$B = \mathfrak{B},$$
$$Cx + Dx^2 + Ex^3 + \ldots = \mathfrak{C}x +$$
$$C + Dx + Ex^2 + \ldots = \mathfrak{C} +$$

für jedes x, alſo auch für $x = o$.
Art weiter gehen kann, erhellet nun

20. Sey, um nun zu Beiſpiele
$\varphi x = (1 + x)^n$, ſo iſt $\varphi o = 1$,
eine nach den poſitiven ganzen Pot
tende Reihe entwickelt werden (16.
rechtigt, zu ſetzen:

$$(1 + x)^n = A + Bx + Cx^2 + Dx$$

oder, da man für $x = o$ ſogleich A

$$(1 + x)^n = 1 + Ax + Bx^2 + Cx$$

Setzt man nun $x + u$ für x; ſo wi

$$= (1+x)^n + A(1+x)^{n-1}u + B(1+x)^{n-2}u^2 + \ldots$$
$$= 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots$$
$$+ A(1+x)^{n-1}u + B(1+x)^{n-2}u^2 + C(1+x)^{n-3}u^3 + \ldots$$

und folglich für jedes u:

$$\{A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + \ldots\}u + \ldots$$
$$= A(1+x)^{n-1}u + B(1+x)^{n-2}u^2 + C(1+x)^{n-3}u^3 + \ldots$$

Alſo nach (19.):

$$A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + \ldots = A(1+x)^{n-1},$$
$$(1+x)\{A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + \ldots\} = A(1+x)^n,$$

d. i. nach der Annahme, wenn man zugleich die Producte entwickelt:

$$\begin{array}{l} A + 2B \\ \quad + A \end{array}\Big\}x + \begin{array}{l} 3C \\ \quad + 2B \end{array}\Big\}x^2 + \begin{array}{l} 4D \\ \quad + 3C \end{array}\Big\}x^3 + \ldots$$
$$= A + AAx + ABx^2 + ACx^3 + \ldots$$

Alſo für jedes x nach (19):

$$A = A \;;\; A = A;$$
$$2B + A = AA;\; B = \frac{A(A-1)}{2};$$
$$3C + 2B = AB;\; C = \frac{B(A-2)}{3};$$
$$4D + 3C = AC;\; D = \frac{C(A-3)}{3}$$
$$5E + 4D = AD;\; E = \frac{D(A-4)}{5};$$

u. ſ. f. u. ſ. f.

und es erhellet aus dieſen Gleichungen ſogleich, daß mittelſt derſelben alle Coefficienten beſtimmt ſind, wenn nur A beſtimmt iſt. Zur Beſtimmung von A gelangt man aber auf folgende Art. Sey $A = f(n)$; ſo iſt

$$(1+x)^n = 1 + f(n).x + \ldots,$$
$$(1+x)^{n+1} = (1+x)\{1 + f(n).x + \ldots\} = 1 + \{f(n)+1\}x + \ldots$$
$$= 1 + f(n+1).x + \ldots,$$

und folglich

$$f(n+1) = f(n) + 1.$$

Nun iſt offenbar für $n = 1$:

$$f(1) = 1; \quad \text{alſo}$$
$$f(2) = f(1) + 1 = 2;$$
$$f(3) = f(2) + 1 = 3;$$
$$f(4) = f(3) + 1 = 4;$$

u. ſ. f. u. ſ. f.

Also $f(-n) + n = 0$, $f(-n) = -$

lich der Exponent ein Bruch $\frac{n}{m}$, wo n und

len sind, m positiv ist, n aber sowohl pos

seyn kann; so ist

$$(1+x)^{\frac{n}{m}} = 1 + f\left(\frac{n}{m}\right).x + \cdot$$

$$(1+x)^n = \left\{1 + f\left(\frac{n}{m}\right).x + \cdot\right.$$

und folglich, weil n, m ganze Zahlen

Vorhergehenden:

$$1 + nx + \ldots = 1 + m\left\{f\left(\frac{n}{m}\right).x + \ldots\right\}$$

$$= 1 + m.f\left(\frac{n}{m}\right).x + \ldots,$$

wo alle folgenden Glieder höhere Potenz

ten. Also

$$n = m.f\left(\frac{n}{m}\right),\ f\left(\frac{n}{m}\right) = \frac{n}{n}$$

Es ist also, wie auch der Exponent n bes

immer

$$f(n) = A = n,$$

$$E = \frac{D(n-4)}{5} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5},$$

u. s. f. u. s. f.

lso

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1.2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}x^4 + \ldots$$

ie bekannt (s. Binomischer Lehrsatz.).

21. Sey ferner $\varphi x = a^x$; so wird, für $x = 0$, $x = a^0 = 1$, also nicht $= \frac{a}{0}$, und man ist folglich rechtigt, zu setzen:

$$a^x = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots$$

Man setze wieder $x + u$ für x; so wird

$$a^{x+u} = 1 + A(x+u) + B(x+u)^2 + C(x+u)^3 + \ldots,$$

$$= 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots + \left|A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + \ldots\right| u + \ldots$$

$$= a^x + \left|A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + \ldots\right| u + \ldots$$

$$= a^x . a^u = a^x \left|1 + Au + Bu^2 + Cu^3 + Du^4 + \ldots\right|$$

$$= a^x + Aa^x u + Ba^x u^2 + Ca^x u^3 + \ldots$$

r jedes u. Also (19.):

$$A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + \ldots$$

$$= Aa^x = A + AAx + ABx^2 + ACx^3 + \ldots$$

r jedes x. Folglich

$$A = A \;;\; A = A;$$

$$2B = AA;\; B = \frac{A^2}{1.2};$$

$$3C = AB;\; C = \frac{A^3}{1.2.3};$$

$$4D = AC;\; D = \frac{A^4}{1.2.3.4};$$

$$5E = AD;\; E = \frac{A^5}{1.2.3.4.5};$$

u. s. f. u. s. f.

, daß also auch hier wieder alle Coefficienten bestimmt nd, wenn nur A bestimmt ist. Es ist folglich:

Reihe entwickelt werden kann, [illegible]
daher, der in (18.) angedeuteten Methode ge
in eine Reihe nach den poſitiven ganzen
und ſetze folglich

$$\log(x + u) = A + Bu + Cu^2 + Du^3 +$$

wo aber jetzt die Coefficienten ſelbſt Functi
Setzt man z für u; ſo wird

$$\log(x + z) = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + E$$

und folglich

$$\log(x + u) - \log(x + z) =$$

$$= B(u - z) + C(u^2 - z^2) + D(u^3 - z^3)$$

$$= \log\frac{x + u}{x + z} = \log\frac{1}{x}\left(x + \frac{x(u}{x}\right.$$

$$= \log\frac{1}{x} + \log\left(x + \frac{x(u - z)}{x + z}\right)$$

$$= A + B\frac{x(u - z)}{x + z} + C\frac{x^2(u - z)^2}{(x + z)^2} + D\frac{x^3}{(}$$

$$- \log x$$

Setzt man aber $u = 0$; ſo erhält n
$\log x = A$, ſo daß dieſe Gleichung ſic
verwandelt:

$$B(u - z) + C(u^2 - z^2) + D(u^3 - z^3) +$$

$$\frac{x^2(u - z)^2}{} \cdot \frac{x^3}{}$$

$$B + 2Cz + 3Dz^2 + 4Ez^3 + 5Fz^4 + \ldots$$
$$= B\frac{x}{x+z} = B\left\{1 - \frac{z}{x} + \frac{z^2}{x^2} - \frac{z^3}{x^3} + \ldots\right\},$$

wie man leicht findet, wenn man den Bruch $\frac{x}{x+z}$ in eine Reihe nach Potenzen von z entwickelt, wozu man sich auch der gemeinen Division bedienen kann. Da nun obige Gleichung für jedes z gilt; so ist

$$B = B; \quad B = B;$$
$$2C = -\frac{B}{x}; \quad C = -\frac{B}{2x};$$
$$3D = \frac{B}{x^2}; \quad D = \frac{B}{3x^3};$$
$$4E = -\frac{B}{x^3}; \quad E = -\frac{B}{4x^4};$$
$$5F = \frac{B}{x^4}; \quad F = \frac{B}{5x^5};$$
$$\text{u. s. f.} \qquad \text{u. s. f.}$$

und folglich, wenn man A für B setzt:

$$\log(x+u) = \log x + A\left\{u - \frac{u^2}{2x} + \frac{u^3}{3x^2} - \frac{u^4}{4x^3} + \ldots\right\}$$

Nach der in (18.) angedeuteten Methode muß man nun für x einen bestimmten Werth setzen; für welchen kein Coefficient einer Potenz von u, $= \frac{u}{o}$ wird. In dieser Beziehung bietet sich sogleich, und am einfachsten, $x = 1$ dar, wodurch:

$$\log(1+u) = A\{u - \tfrac{1}{2}u^2 + \tfrac{1}{3}u^3 - \tfrac{1}{4}u^4 + \ldots\},$$
$$\log(1+x) = A\{x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \ldots\},$$

wo nun natürlich A eine constante Größe ist, die noch bestimmt werden muß.

23. Die Logarithmen, für welche $A = 1$ ist, heißen natürliche oder hyperbolische, und ihre Basis wird durch e bezeichnet. Also ist immer

$$\log\text{nat}(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \ldots.$$

Ueberhaupt ist also

$$\log(1+x) = A\log n(1+x), \quad A = \frac{\log(1+x)}{\log n(1+x)},$$

und folglich, für $1+x = b$, also $\log(1+x) = 1$, da b die Basis:

$$= 1 + (\alpha - \tfrac{1}{2}\alpha^2 + \tfrac{1}{3}\alpha^3 - \tfrac{1}{4}\alpha$$

wie leicht erhellet. Alſo die in (2
Größe

$$= \alpha - \tfrac{1}{2}\alpha^2 + \tfrac{1}{3}\alpha^3 - \tfrac{1}{4}\alpha^4 + \ldots$$
$$= (a-1) - \tfrac{1}{2}(a-1)^2 + \tfrac{1}{3}(a-1$$

d. i. nach dem Obigen

$$A = \log \text{nat}\, a,$$

und folglich, wenn die natürlichen
l bezeichnet werden, nach (21.):

$$a^x = 1 + \frac{x\,la}{1} + \frac{(x\,la)^2}{1.2} +$$

folglich, für $a = e$, $la = le = 1$
natürlichen Logarithmen:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3}$$
$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3}$$

24. Sey ferner $\varphi x = \sin x$,
alſo φx in eine Reihe nach den poſi
von x entwickeln läßt (16. 4.). M

$$= \left\{ A + \tfrac{1}{2}B(x-z) + \tfrac{1}{3}C(x-z)^2 + \tfrac{1}{4}D(x-z)^3 + \ldots \right\} \cos \tfrac{1}{2}(x+z).$$

Folglich, wenn man nun $x = z$ ſetzt:

$$A \cos x = A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + 5Ex^4 + \ldots,$$
$$A \cos z = A + 2Bz + 3Cz^2 + 4Dz^3 + 5Ez^4 + \ldots,$$
$$A(\cos x - \cos z) = 2B(x-z) + 3C(x^2-z^2) + 4D(x^3-z^3) + \ldots$$
$$= -2A \sin \tfrac{1}{2}(x+z) \sin \tfrac{1}{2}(x-z) \text{ (a. a. O.)}$$
$$= -A \left\{ A(x-z) + \tfrac{1}{2}B(x-z)^2 + \tfrac{1}{3}C(x-z)^3 + \ldots \right\} \sin \tfrac{1}{2}(x+z).$$

Alſo, wie vorher:

$$2B + 3C(x+z) + 4D(x^2+xz+z^2) + 5E(x^3+x^2z+xz^2+z^3)$$
$$+ 6F(x^4+x^3z+x^2z^2+xz^3+z^4) + \ldots\ldots$$
$$= -A \left\{ A + \tfrac{1}{2}B(x-z) + \tfrac{1}{3}C(x-z)^2 + \ldots \right\} \sin \tfrac{1}{2}(x+z);$$

und für $x = z$:

$$-A^2 \sin x = 2B + 2.3Cx + 3.4Dx^2 + 4.5Ex^3 + \ldots.$$
$$= -A^2 \left\{ Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + \ldots \right\}.$$

Folglich

$$2B = 0; \qquad B = 0;$$
$$2.3C = -A^2; \qquad C = -\frac{A^2}{1.2.3};$$
$$3.4D = -A^2B; \qquad D = 0;$$
$$4.5E = -A^2C; \qquad E = \frac{A^5}{1.2.3.4.5};$$
$$5.6F = -A^2D; \qquad F = 0;$$
$$6.7G = -A^2E; \qquad G = -\frac{A^7}{1.2\ldots7};$$

u. ſ. f. u. ſ. f.

Alſo

$$\sin x = Ax - \frac{A^3x^3}{1.2.3} + \frac{A^5x^5}{1\ldots5} - \frac{A^7x^7}{1\ldots7} + \ldots.$$

wo nur noch A zu beſtimmen.

Da hiernach

$$\frac{\sin x}{x} = A - \frac{A^3x^2}{1.2.3} + \ldots$$

iſt; ſo erhellet, daß, wenn x abnimmt, dieſes Verhältniß ſich der Größe A immer mehr und mehr nähert, und A alſo die Gränze dieſes Verhältniſſes iſt. Dieſe Gränze iſt aber, wie augenblicklich aus der Natur des Sinus folgt, das Verhältniß der Gleichheit, alſo $= 1$. Folglich $A = 1$, und demnach

der Cotangente in eine ſolche Reihe
Es iſt aber

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1 - \frac{1}{2}x^2 + }{x - \frac{1}{6}x^3 + }$$

$$x \cot x = \frac{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - .}{1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 - .}$$

eine Function, welche, für $x = 0$,
demnach in eine Reihe von obiger
Man iſt alſo berechtigt zu ſetzen:

$$x \cot x = 1 + Ax + Bx^2$$

woraus

$$\cot x = \frac{1}{x} + A + Bx + ($$

Dies ſtimmt überein mit Cyclomet
wirklichen Entwickelung verweilen w

26. Die gegebene Function ſey
ſo wird, wenn wir den kleinſten W
in's Auge faſſen, $x' = 0$ für $x =$
bekanntlich ſein Zeichen zugleich mit
berechtigt, zu ſetzen

$$x' = Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots$$

$$\frac{x'-z'}{x-z} = \frac{x'-z'}{\tang x'-\tang z'} = \frac{(x'-z')\cos x'\cos z'}{\sin(x'-z')}$$
$$= \frac{(x'-z')\cos x'\cos z'}{(x'-z')-\frac{1}{6}(x'-z')^3+\ldots} = \frac{\cos x'\cos z'}{1-\frac{1}{6}(x'-z')^2+\ldots}$$

nd folglich, wenn man auf beiden Seiten in obiger Glei-
ung $x' = z'$, also auch $x = z$ setzt:

$$\cos x'^2 = A + 3Bx^2 + 5Cx^4 + 7Dx^6 + \ldots$$

ber

$$\cos x'^2 = \frac{1}{\sec x'^2} = \frac{1}{1+\tang x'^2}$$
$$= \frac{1}{1+x^2} = 1-x^2+x^4-x^6+\ldots,$$

daß also

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots.$$
$$= A + 3Bx^2 + 5Cx^4 + 7Dx^6 + \ldots,$$

oraus unmittelbar:

$$A = 1,\ B = -\tfrac{1}{3},\ C = \tfrac{1}{5},\ D = -\tfrac{1}{7}, \ldots;$$

lso

$$\text{Arc tang } x = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \ldots.$$

Cyclometrie 10.).

27. Für $y' = \text{Arc sin } y$, $u' = \text{Arc sin } u$ setze
an, wie vorher:

$$y' = Ay + By^3 + Cy^5 + Dy^7 + \ldots,$$
$$u' = Au + Bu^3 + Cu^5 + Du^7 + \ldots,$$

$$\frac{y'-u'}{y-u} = A + B(y^2+yu+u^2) + C(y^4+y^3u+y^2u^2+u^4)$$
$$+ D(y^6+y^5u+y^4u^2+y^3u^3+y^2u^4+yu^5+u^6)+\ldots\ldots$$

$$\frac{y'-u'}{y-u} = \frac{y'-u'}{\sin y'-\sin u'} = \frac{y'-u'}{2\sin\frac{1}{2}(y'-u')\cos\frac{1}{2}(y'+u')}$$
$$= \frac{y'-u'}{\left\{(y'-u')-\frac{1}{24}(y'-u')^3+\ldots\right\}\cos\frac{1}{2}(y'+u')}$$
$$= \frac{1}{\left\{1-\frac{1}{24}(y'-u')^2+\ldots\right\}\cos\frac{1}{2}(y'+u')}.$$

Setzt man nun wieder $y' = u'$, also auch $y = u$;
wird

$$\frac{1}{\cos y} = A + 3By^2 + 5Cy^4 + 7Dy^6 + \ldots.$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin y^2}} = (1-y^2)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= 1 + \tfrac{1}{2}y^2 + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}y^4 + \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}y^6 + \ldots \quad (20.),$$

zu erläutern, und ihre Anwendung
v. m. auch den Art. Umkehrung de
thode ganz besonders ihre Anwendu
mich über dieselbe, wegen ihrer gro
sem Art. etwas weiter verbreiten
der dieser Methode ist Descarte
sie ist aber durch die spätern Mat
vervollkommnet, und auf viele F
Vorzüglich verdankt ihr die Theo
sondere die Entwickelung der Func
Erweiterungen und Vereinfachung

Unbestimmte Größe ist ein
willkührlich angenommen werden ka
unbestimmt seyn, und ihr Werth
anderer Unbestimmten bestimmt w
abhängig seyn, welches bei allen Fu
Größen der Fall ist. In der An
unbestimmte Größe im Allgemeine
dem Ausdruck veränderliche Größe
Was man in der Integralrechnung

ganzen Kreises durch die Formel $r^2 . \pi$ ein einfaches Beispiel einer bestimmten Quadratur einer Curve. Vergl. auch den folgenden Artikel.

Unbestimmte Rectification einer Curve ist die Bestimmung der Länge eines Bogens derselben, welcher einer unbestimmten willkührlichen Abscisse entspricht. So ist es z. B. eine unbestimmte Rectification der Ellipse, wenn überhaupt die Länge eines der unbestimmten Abscisse x entsprechenden Bogens bestimmt wird; die Bestimmung des ganzen oder halben Umfanges der Ellipse, oder der Länge eines elliptischen Quadranten dagegen ist eine bestimmte Rectification der Ellipse. S. z. B. Rectification (11.).

Unbestimmte Werthe der Functionen, s. Function (50. ff.).

Uncia, gleichbedeutend mit Coefficient, vorzüglich unciae binomiales, die Binomial-Coefficienten. Das Wort wird von Oughtred (Clavis mathematica. C. XII. §. 6.) zuerst gebraucht seyn. Aber auch Euler bedient sich desselben in zwei Abhandlungen über die Binomial-Coefficienten. Acta Petropol. 1781. P. I. II.

Undecagonum, Eilfeck, eine ebene geradlinige Figur mit eilf Seiten.

Undeterminirt, s. Unbestimmt.

Unechter Bruch, gleichbedeutend mit uneigentlicher Bruch.

Uneigentlicher Bruch, s. Bruch.

Unendlich. 1. Schon in Stifels Arithmetica integra. Norib. 1544. Appendix libri secundi: De quadratura circuli fol. 224. finden sich folgende drei Sätze: Triangulus est polygoniarum omnium prima. Omnium polygoniarum ultima est circulus.

That ſcheint auch dieſer Begriff zue
ſeiner Nova Stereometria doliorui
Accessit Stereometriae Archimede
Lincii 1615. eigentlich in die Ma
worden zu ſeyn. Um ein Beiſpiel ſei
ben, ſetze ich, da mir das Werk ſelbſt
aus Carnots Betrachtungen üb
Infinitesimalrechnung, übers. vo
Frankfurt 1800. S. 62. den Bewe
circuli dimensione. Prop. I., da
Triangel gleich iſt, deſſen Grundlinie
Höhe aber dem Radius des Kreiſes gl

„Archimedes, ſagt Kepler
bedient ſich des indirecten Beweiſes, t
lichkeit führt, worüber von Vielen
iſt. Mir ſcheint der Sinn der zu ſ
des Kreiſes BG (Fig. 94.) hat eben
Punkte, d. h. unendlich viele, deren
den kann als die Grundlinie eines glei
ecks, deſſen Schenkel der Linie AB
die Kreisfläche unendlich viele Dre
Spitzen alle in den Punkt A zuſam

n der Kreisfläche Ausschnitte, und sie gleiche Grundlinien
3F, EC, und einerlei Höhe BA haben, die auch zu den
Ausschnitten gehört, so werden die Dreiecke EAC, BAF
inander, und jedes wird auch einem Kreisausschnitte
leich seyn, und alle Dreiecke zusammen, deren Grund-
inien in der Linie BC liegen, d. i. das Dreieck BAC, das
us ihnen allen besteht, wird allen Kreisausschnitten, d. h.
er aus allen bestehenden Kreisfläche gleich seyn. Das
will der indirecte Beweis des Archimedes sagen."

Eben so betrachtet Kepler den Kegel als zusammen-
esetzt aus unendlich vielen Pyramiden, welche auf den
nendlich kleinen Dreiecken, in die er die Grundfläche zer-
gt, stehen, und mit dem Kegel eine gemeinschaftliche
Spitze haben; den Cylinder auf ähnliche Weise zusammen-
esetzt aus unendlich vielen kleinen Prismen über einerlei
Grundfläche und von einerlei Höhe.

2. Wie wenig diese Sprache, welche auch in viele
euere Lehrbücher der Geometrie übergegangen ist, wenn
e auch allerdings die Beweise abkürzt, den Verstand be-
riedigt, wie wenig sie der sonst in der Geometrie gewöhn-
chen Evidenz und Strenge gemäß ist, erhellet von selbst;
nd gewiß ist es als ein besonderer Vorzug mehrerer der
neuesten geometrischen Werke, als ein vorzüglicher Fort-
chritt der Lehrmethode zu betrachten, daß jene unwissen-
chaftliche Sprache immer mehr und mehr verbannt, die
Exhaustionsmethode der griechischen Geometer wieder in
hre alten Rechte eingesetzt, oder statt derselben die Me-
hode der Gränzen, welche jener an Strenge nichts nach-
iebt, und dabei in den meisten Fällen kürzer ist, besonders
weil sie leicht auf einige allgemeine Sätze gebracht werden
ann, in die Lehrbücher eingeführt wird. Von der Me-
hode der Gränzen ist im Art. Verhältniß (76. ff.) ein,
die ich glaube, genügender Abriß gegeben. Sehr wichtig
ür die Anwendung in der Geometrie ist der dort in (81.)
ewiesene allgemeine Lehrsatz. Der obige Satz vom Kreise
ann mittelst der Theorie der Gränzen leicht und völlig
reng auf folgende Art bewiesen werden. Inhalt, Umfang
nd (kleiner) Radius irgend eines in den Kreis beschriebenen

ſo wie auch eben ſo leicht, daß Ld.
Lc. $(\varrho : 1) = r : 1$ (Verhältniß. 7
(Verhältniß. 78.); Lc. $(1 : \frac{1}{u}) =$
Lc. $(\varrho : \frac{1}{u}) = r : \frac{1}{p}$ (Ver
$\varrho : \frac{1}{u} = \varrho u : 1$, $r : \frac{1}{p} = rp : 1$
Lc. $(\varrho u : 1) =$
alſo Lc. $\varrho u = rp$, welches au
ohne die obigen Sätze von den V
da, wenn r, p reſpective die Grö
u ſind, offenbar auch rp die G
ϱu iſt. Nun iſt aber immer
$P : \frac{1}{2}\varrho u = 1 : 1$, P :
Alſo auch (Verhältniß. 81.)
Lc. P : Lc. $\varrho u =$
d. i. nach dem Obigen
$K : rp = 1 : 2$, K
welche Formel den zu beweiſenden

3. In noch größerer Ausdeh
ward die Idee des Unendlichen vo
Geometria indivisibilibus con

erſchiedenheit des Ganges, den beide bei den Anwendun- n derſelben Vorſtellungsart genommen haben, darzuthun ſucht. Auch vergl. man Friſi's Elogi di Galileo alilei e di Bonaventura Cavaleri. Milano. 1778.

4. Die Arithmetica infinitorum von Wallis (Jo- nnis Wallisii Opera math., tribus volumin. com- rehensa. Oxonii. T. I. 1665.) enthält die erſten Spuren der Anwendung des algebraiſchen Calculs auf die Quadratur der Räume. Er ſieht die Flächen als aus Li- en beſtehend an, die nach einem beſtimmten Geſetze : oder abnehmen, und findet den Ausdruck für den In- alt der Flächen durch Summirung der Reihen der Linien, us denen ſie zuſammengeſetzt ſind. Seine Methode iſt ne Erweiterung der Cavaleri'ſchen Methode des Untheil- aren. Mehr über dieſes in der Geſchichte der Mathema- ik wichtige Werk ſ. m. im Art. Quadratur (5.)

5. Auch Fontenelle hat Élémens de la Géome- rie de l'infini. Paris. 1727. geſchrieben. Er glaubt, aß die Differentialrechnung nothwendig unendlich große nd unendlich kleine Größen vorausſetze, und ſtellt daher leich zu Anfange den Satz auf, daß man eine jede Größe irklich bis in's Unendliche vermehrt oder vermindert an- ehmen könne, und auf dieſem Satze beruhet das ganze Werk. D'Alembert erklärt ſich in ziemlich ſtarken Aus- rücken gegen dieſes Princip in der Encyclopédie mé- hodique. Art. Infini., ſo wie auch Maclaurin im weiten Theile des Treatise of Fluxions, und Buffon n der Vorrede zu der franzöſiſchen Ueberſetzung von Newtons Methodus fluxionum.

6. Die wichtigſte Erfindung, zu welcher die Idee des Un- ndlichen geleitet hat, iſt die Differentialrechnung, wor- iber ich mich aber hier um ſo eher weiterer Auseinanderſetzun- en, wegen Beſchränktheit des Raumes, enthalten kann, a dieſer Gegenſtand ſchon in den Artt. Differentiale und Differentialrechnung ausführlich behandelt worden iſt, auf elche ich daher, ſo wie auf den Artt. Berührende Linie, ier verweiſe. Wir wollen vielmehr nun, nach dieſen hi- oriſchen Bemerkungen, die wichtigſten Fälle, wo das Un-

lées à l'école polytechniq
simal. Paris. 1823. p. 1
Aufſatz sur les divers ordres
petites in den Exercices de
chy. 6me Livraison. Par
weil uns Cauchy's Darſtellun
ge und Evidenz am meiſten zu

7. Man ſagt, daß eine v
lich klein werde, wenn ih
gränzt abnimmt, ſo daß er k
gegebene noch ſo kleine Größe,
immer mehr und mehr nähert,
Gränze, als Null ſelbſt, geſetzt

Cauchy bemerkt ganz rich
Abnahme wohl von einer fortn
terſcheiden ſey. Die Fläche eines
wenn die Seitenzahl wächſt, f
unbegränzt, da der Kreis die G
aus die genannte veränderliche G
Die Brüche

$\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}$

nehmen fortwährend ab, aber
Einheit die Gränze iſt. Dage

immt, nähert ſich immer mehr und mehr dem Zuſtande es wirklichen Verſchwindens, d. h. der Null, und dieſe iſt ſeine Gränze.

8. Man ſagt, daß eine veränderliche Größe unendlich groß werde, wenn ihr numeriſcher Werth unbegränzt wächſt, und folglich größer werden kann als jede gegebene noch ſo große Größe, wobei wieder ein unbegränztes Wachſen von einem fortwährenden Wachſen wohl zu unterſcheiden iſt. Die Fläche eines in den Kreis beſchriebenen regulären Vielecks wächſt fortwährend, wenn die Seitenzahl zunimmt, aber nicht unbegränzt, da der Kreis die Gränze iſt. Die natürliche Zahlenreihe

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...

wächſt fortwährend und unbegränzt.

Die Gränze einer unbegränzten Abnahme nannten wir vorher Null, und das Symbol dieſer Gränze iſt o; das Symbol der Gränze einer unbegränzten Zunahme iſt ∞, welches ſo wenig, wie jenes, etwas Reelles bezeichnet. Die Zeichen o und ∞ ſcheinen uns völlig in eine Kategorie zu gehören; ſo wenig jenes Schwierigkeit macht, eben ſo wenig wird dieſes Hinderniſſe in den Weg legen. o iſt die Gränze des Abnehmens, ∞ die Gränze des Wachſens.

9. Die alten Metaphyſiker unterſchieden das actuale oder kategorematiſche Unendliche (Infinitum actu) von dem potentialen oder ſynkategorematiſchen Unendlichen (Infinitum potentia), und verſtanden unter dem erſtern das, was wirklich Unendlichkeit in ſich hat, unter dem letztern das, was zwar nicht wirklich unendlich, aber doch eines ins Unendliche, d. h. ohne Ende fortgehenden Wachsthums fähig iſt (Hauff a. a. O. S 105. Chauvini Lexicon philosoph. Leovard. 1713. Art. Infinitum). Den Größen kann hiernach nur potentiale Unendlichkeit zukommen, denn wer will dem Wachſen einer Größe, wenn ſie nicht vielleicht beſondern Bedingungen unterworfen iſt, wie z. B. die Fläche eines in den Kreis beſchriebenen regulären Polygons, ſondern eines unbegränzten Wachsthums fähig iſt, im eigentlichen Sinne

Sache es fordert, nur aus einer geo
abgeleitet werden kann, zurück; so
genommen, nur für den Fall gi
von der gegebenen Linie geschnitten
meinheit der analytischen Rechnun
obiger Gleichung auch die Fälle,
entweder der Abscissen=, oder der O
zu subsumiren. Im ersten Falle
Gesichtspunkt festgehalten, für al
Daher muß, soll dieser Fall auch
dargestellt werden, das erste Glied A
den. Man stellt sich daher vor, d
benen geraden Linie mit der Absc
Winkel, obgleich es in der That eig
chen Winkel giebt, = o oder 180°
sche Tangente also, d. i. A, = o
die allgemeine Gleichnng auf y = B
muß. Ist die gegebene gerade Linie
rallel, so wird letztere nicht mehr vo
und man muß sich also die Linie, dur
wird, in der That als unbegränzt,
und daher nach dem Obigen durch de

$$y = \frac{x}{o} \pm \frac{1}{o} = \frac{o \cdot x \pm 1 \cdot o}{o} = \frac{o \pm o}{o} = \frac{o}{o},$$

das Symbol des Unbestimmten (s. Function 50.), welches ganz der Natur der Sache gemäß ist, da in der That im vorliegenden Fall die Coordinate keinen (geometrisch) bestimmten Werth hat, weil es keinen Durchschnittspunkt der Coordinate mit der gegebenen Linie mehr giebt.

15. Sind die Gleichungen zweier geraden Linien

$$y = Ax + B, \quad y = A'x + B'$$

und diese beide Linien schneiden einander; so erhält man leicht die Coördinaten des Durchschnittspunktes

$$x = -\frac{B - B'}{A - A'}, \quad y = \frac{AB' - BA'}{A - A'}.$$

Sind die beiden Linien einander parallel; so ist $A = A'$, und man erhält

$$x = -\frac{B - B'}{o}, \quad y = \frac{AB' - BA'}{o},$$

d. h. beide Coordinaten $= \infty$, so daß also auch hier dieses Symbol wieder dem Parallelismus der beiden Linien entspricht. Fallen beide Linien zusammen; so ist $A = A'$, $B = B'$, und man erhält $x = y = \frac{o}{o}$, das Symbol des Unbestimmten, wie es erforderlich ist.

16. Die Gleichung der Hyperbel zwischen ihren Asymptoten ist $xy = \frac{1}{2}a^2$, $y = \frac{a^2}{2x}$. Für $x = o$ wird $y = \frac{a^2}{o}$, und man muß sich in der That auch die durch den Mittelpunkt gehende Ordinate, die nothwendig mit in das ganze System der Coordinaten gehört, ein Glied desselben ist, als unbegränzt oder unendlich vorstellen. So kommen auch an vielen andern krummen Linien unendlich große Coordinaten zwischen endlichen vor.

17. Die Gleichung der Ellipse aus den Scheitel ist

$$y^2 = px - \frac{px^2}{2a}.$$

Je größer a wird, desto mehr nimmt das Glied $\frac{px^2}{2a}$ ab, besonders in der Nähe des Scheitels, für kleine x, desto

die Gränze $\frac{}{0}$ wirklich erreicht hätt
That und völlig in die Parabel über
wöhnlich ſagt man, die Parabel ſe
Hauptaxe unendlich iſt. Der wah
drucks iſt aus dem Obigen klar.

18. Man habe zwei aus einerlei
bene Ellipſen, deren Hauptaxen zuſa
Gleichungen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a'^2} + \cdot$$

ſind. Beſtimmt man hieraus die C
ſchnittspunkte dieſer beiden Ellipſen
dieſen Gleichungen:

$$x = aa' \sqrt{\frac{b^2 - b'^2}{a'^2 b^2 - a^2 b'^2}}, \quad y = bb'$$

Sind nun die beiden Ellipſen ein
$a : b = a' : b'$, $a'b = ab'$ iſt; ſo
$y = \frac{a}{0}$, und dieſe Ausdrücke deute
daß die beiden Ellipſen in dieſem Falle
den können, ſondern einander paralle

endlich gedacht werden müssen. Etwas Aehnliches findet statt, wenn man beim Kreise die ihn beschreibende gerade Linie, nachdem sie einen Umlauf vollendet, nicht stille stehen, sondern ihre Umläufe willkührlich oft fortsetzen und wiederholen läßt. In der analytischen Trigonometrie gebraucht man in der That diese Vorstellung durchgängig. Auf ähnliche Art kann man sich auch die Ellipse und jede andere geschlossene Curve als unendlich denken.

20. Die Cycloide und Epicycloide, welche durch Umwälzung eines Kreises entstehen, sind ebenfalls unendliche Größen. Wenn der Kreis seine Umwälzung einmal vollendet hat, muß man ihn nicht stille stehen lassen; man kann die Umwälzung willkührlich oft wiederholen.

21. Eine Reihe, deren Glieder, nach einem bestimmten allgemeinen Gesetze gebildet, nie abbrechen, muß man sich ebenfalls, wenn man sie sich in ihrer Ganzheit, um so zu sagen, vorstellen will, in der That als unendlich denken, und nennt sie daher auch eine unendliche Reihe, welches sich aber hier bloß theils auf das niemalige Abbrechen ihrer Glieder, theils auf das überall in ihr obwaltende Gesetz der Glieder bezieht, dessen allgemeinen analytischen Ausdruck man bekanntlich das allgemeine Glied (terminus generalis) der Reihe nennt. Etwas Aehnliches findet bei den Kettenbrüchen und bei Producten mit unendlich vielen Factoren statt, deren Glieder, ohne jemals abzubrechen, einem bestimmten allgemeinen Gesetze unterworfen sind.

22. Wir gehen nun zu der Erklärung der verschiedenen Ordnungen des Unendlichen, vorzüglich des unendlich Kleinen, über, welches von ganz besonderer Wichtigkeit ist. Ist nämlich i eine unendlich kleine oder unendlich große Größe, d. h. eine veränderliche Größe, welche entweder unbegränzt ab- oder zunimmt (7. 8.); so nennt man die Potenzen

$$i, i^2, i^3, i^4, i^5, \ldots.$$

im ersten Falle unendlich kleine, im zweiten unendlich große Größen der ersten, zweiten, dritten, vierten, fünften Ordnung, u. s. f., welches auf der Vorstellung beruht, daß i^2 gewissermaßen unendlichmal kleiner oder größer als i, i^3 unendlichmal kleiner oder größer als i^2 ist, u. s. f.,

änderliche Zahl bezeichnet; ſo iſt i
kleiner Größen, deſſen Baſis i iſ
$f(i)$ von i eine unendlich kleine G
wenn die Gränze des Bruchs

$$\frac{f(i)}{i^r}$$

für jedes r, welches $< a$, Null
welches $> a$, ∞ iſt.

Um den Sinn dieſer Definiti
wollen wir zeigen, daß der obig
Begriff unendlich kleiner Größen
unter derſelben enthalten iſt. Se
lich kleine Größe; ſo heißt, wen
Zahl iſt, i^n eine unendlich kleine G
und es iſt alſo für dieſen Fall $f(i)$
nun zuerſt $r < n$; ſo iſt

$$\frac{f(i)}{i^r} = \frac{i^n}{i^r} = i^{n-}$$

wo $n - r$ poſitiv iſt, ſo daß ſich
ſich der Gränze o nähert, auch $\frac{f(i)}{i^r}$
Iſt aber $r > n$, ſo iſt

$$\frac{f(i)}{i^r} = \frac{i^a}{i^a} = 1,$$

b erhält alſo einen endlichen beſtimmten Werth. Ueberupt kann für $r = a$ der Bruch

$$\frac{f(i)}{i^r}$$

h jeder beliebigen Gränze, welche endlich, o oder ∞ gn kann, nähern.

Obige allgemeine Definition zum Grunde gelegt, kann an mehrere elegante Theoreme über die unendlich kleinen Größen beweiſen, von denen wir folgende ausheben.

32. Man habe in einem beliebigen Syſteme zwei unendlich kleine Größen verſchiedener Ordnungen, ſo wird, während ſich dieſe beiden Größen der o nähern, diejenige, deren Ordnungszahl am größten iſt, immer endlich einmal beſtändig den kleinſten numeriſchen Werth haben.

Die Baſis des Syſtems ſey i, und $I = f(i)$, $I' = F(i)$ zwei unendlich kleine Größen, die erſte von der Ordnung a, die zweite von der Ordnung b, ſo daß $a < b$. Legt man der veränderlichen Zahl r einen Werth bei, der zwiſchen a und b liegt, d. h. $> a$ und $< b$ iſt; ſo ſind die Gränzen der Brüche $\frac{I}{i^r}$ und $\frac{I'}{i^r}$ nach obiger Definition (22.) reſpective ∞ und o. Folglich iſt die Gränze des Quotienten

$$\frac{I'}{i^r} : \frac{I}{i^r} = \frac{I'}{I},$$

wie leicht erhellet, Null. Alſo muß der numeriſche Werth des Zählers dieſes Bruchs weit ſchneller abnehmen, als der numeriſche Werth des Nenners, und letzterer wird alſo endlich einmal erſtern beſtändig übertreffen.

24. Bezeichnen a, b, c, ... in irgend einem Syſteme die Ordnungszahlen der unendlich kleinen Größen I, I', I'', ..., ſo daß a die kleinſte Ordnungszahl iſt; ſo iſt die Summe

$$I + I' + I'' + \ldots\ldots$$

eine unendlich kleine Größe der aten Ordnung.

Sey immer i die Baſis des angenommenen Syſtems. Da die Gränze eines jeden der Brüche

soll, dieſer Bruch für $r < a$ ſich de
aber ſich der Gränze ∞ nähert, ſo

$$\frac{I + I' + I'' + \ldots}{i^r}$$

für $r < a$ der Gränze o, für r
und die Summe

$$I + I' + I'' + \ldots$$

iſt alſo eine unendlich kleine Größe t

25. In irgend einem Syſteme
unendlich kleine Größen von der Ord
das Product II' eine unendlich klein
nung $a + b$.

Die Brüche

$$\frac{I}{i^r}, \frac{I'}{i^s}$$

nähern ſich für $r < a$, $s < b$ der
$s > b$ dagegen der Gränze ∞. Al
auch das Product

$$\frac{I}{i^r} \cdot \frac{I'}{i^s} = \frac{II'}{i^{r+s}}$$

für $r < a$, $s < b$ der Gränze o,

für $\varrho < a + b$ sich der Gränze o, für $\varrho > a + b$ sich der Gränze ∞ nähert, und folglich Π' eine unendlich kleine Größe von der Ordnung $a + b$ ist.

26. Durch mehrmalige Anwendung dieses Satzes zeigt man leicht, daß, wenn in irgend einem Systeme I, I′, I″, I‴, ... unendlich kleine Größen der aten, bten, cten, dten, ... Ordnung sind, das Product $\Pi' I'' I'''$.... immer eine unendlich kleine Größe von der Ordnung $a + b + c + d + \ldots$ ist.

Wäre ein Factor eine endliche Größe; so wäre offenbar deren Ordnungszahl $= o$ zu setzen.

27. Sind drei unendlich kleine Größen so beschaffen, daß, für die erste als Basis, die zweite von der Ordnung a, für die zweite als Basis, die dritte von der Ordnung b ist; so ist, für die erste als Basis, die dritte von der Ordnung ab.

Die drei unendlich kleinen Größen seyen i, I, I′, so daß also die Brüche

$$\frac{I}{i^r}, \frac{I'}{I^s}$$

für $r < a$, $s < b$ sich der Gränze o, für $r > a$, $s > b$ dagegen sich der Gränze ∞ nähern (22.); so wird offenbar auch das Product

$$\left(\frac{I}{i^r}\right)^s \cdot \frac{I'}{I^s} = \frac{I'}{i^{rs}}$$

für $r < a$, $s < b$ sich der Gränze o, für $r > a$, $s > b$ dagegen sich der Gränze ∞ nähern. Setzt man nun $rs = \varrho$, so ist klar, daß, jenachdem $\varrho <$ oder $>$ ab ist, ϱ immer in zwei Factoren r, s zerlegt werden kann, so daß im ersten Falle $r < a$, $s < b$, im andern $r > a$, $s > b$ ist, woraus also mittelst des Obigen folgt, daß

$$\frac{I'}{i^\varrho}$$

für $\varrho < ab$ sich der Gränze o, für $\varrho > ab$ dagegen sich der Gränze ∞ nähert, und folglich eine unendlich kleine Größe der Ordnung ab ist (22.).

28. Für die Basis i seyen die Ordnungszahlen der unendlich kleinen Größen I, I′ in diesem Systeme a, a′, für eine andere Basis i′ dagegen α, α', und b sey Ord-

eine beſtimmte Baſis, werden
ändert wird, alle in einem be
oder abnehmen.

29. Setzt man in (27.)
$ab = 1$, $b = \frac{1}{a}$. Iſt alſo
die Baſis i; ſo iſt i von der Or
Wenn daher I, als Function vo
Größe der erſten Ordnung iſt; ſ
von I, eine unendlich kleine Grö

30. Seyen I, I′ zwei une
ſolcher Beſchaffenheit, daß, wen
nimmt, die andere von der erſte
wird die Ordnungszahl irgend ei
Syſtemen, welche eine der beide
Größen zur Baſis haben, dieſelbe
I″ von der Ordnung a in Bezug
a′, in Bezug auf I′ als Baſis; ſo
von der erſten Ordnung iſt, nach (

31. Aus den bisherigen Sä
wichtige Sätze von Polynomien ab
folgende ausheben

unendlich kleine Größe der n'ten Ordnung (24.), rd daher, weil $n' > n$, immer einmal fortwährend leinern numerischen Werth haben, als die unendlich Größe ai^n der nten Ordnung (23.), wo denn also is gegebene Polynomium mit seinem ersten Gliede mer einerlei Zeichen haben wird. Die Exponenten n wir hier immer als positive ganze Zahlen an, ob- ich diese Sätze auch noch erweitern lassen würden.

2. Ist in dem Polynom

$$ai^n + bi^{n'} + ci^{n''} + di^{n'''} + \ldots .$$

ponent n' des zweiten Gliedes eine ungerade Zahl;) für sehr kleine i der Werth dieses Polynoms größer leiner als der Werth seines ersten Gliedes seyn, dem die veränderliche Größe i und der Coefficient b oder ungleiche Zeichen haben.

enn für sehr kleine i hängt das Zeichen des Polynoms

$$bi^{n'} + ci^{n''} + di^{n'''} + \ldots .$$

m Gliede $bi^{n'}$ ab (31.), und ist also + oder —, dem i und b gleiche oder ungleiche Zeichen haben, welcher Bedingung also auch

$$ai^n + bi^{n'} + ci^{n''} + di^{n'''} + \ldots . \gtrless ai^n$$

ird. Immer wird angenommen, daß das Polynom steigenden Potenzen von i geordnet sey, welches offen- mmer möglich ist.

3. Ist in dem Polynom

$$ai^n + bi^{n'} + ci^{n''} + di^{n'''} + \ldots .$$

ponent n' des zweiten Gliedes eine gerade Zahl; so sehr kleine Werthe von i der Werth dieses Poly- größer oder kleiner als der Werth seines ersten Glie- jenachdem der Coefficient b des zweiten Gliedes v oder negativ ist.

Denn für sehr kleine Werthe von i hängt das Zeichen

$$bi^{n'} + ci^{n''} + di^{n'''} + \ldots$$

von $bi^{n'}$ ab (31.), und dieses Zeichen ist, weil $i^{n'}$ n des geraden Exponenten n' immer positiv bleib,

dieſe Größe mag poſitiv oder n

$$a < a + bi^{n'} + ci^{n''} -$$

wenn b poſitiv iſt, dagegen imı

$$a > a + bi^{n'} + ci^{n''} +$$

wenn b negativ iſt (33.). Iſt
ſo iſt der partikuläre Werth a d
oder größer als alle benachbarte
d. h. ein **Minimum** oder M
oder **größter** Werth deſſelben
b des zweiten Gliedes poſitiv o
wohl zu merken iſt, daß der pa
Minimum oder Maximum in B
Werthe des Polynoms iſt, wel
i unendlich kleine Werthe beig
veränderliche Größe in der Nähe

Ueberhaupt ſind die obigen
Darſtellung der Lehre von den
ſehr wichtig, wobei wir aber h
dürfen.

35. In Bezug auf die weite
Lehre von den unendlich großen

entwickeln lassen, auch in Bezug auf Polynomien, wenn die unveränderliche Größe unbegränzt wächst. Ist z. B.

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots + hx + k$$

ein nach den fallenden Potenzen von x geordnetes Polynom, wo auch einige Coefficienten = o seyn können; so wird, wenn wir x unbegränzt wachsen lassen, dieses Polynom endlich einmal immer einerlei Zeichen mit seinem höchsten Gliede ax^n behalten. Denn man setze $x = \frac{1}{i}$, wo i unbegränzt abnimmt, so wird obiges Polynom

$$= a\frac{1}{i^n} + b\frac{1}{i^{n-1}} + c\frac{1}{i^{n-2}} + \ldots + h\frac{1}{i} + k$$

$$= \frac{a}{i^n}\left(1 + \frac{b}{a}i + \frac{c}{a}i^2 + \ldots + \frac{h}{a}i^{n-1} + \frac{k}{a}i^n\right).$$

Da nun für sehr kleine i der Factor

$$1 + \frac{b}{a}i + \frac{c}{a}i^2 + \ldots + \frac{h}{a}i^{n-1} + \frac{k}{a}i^n$$

immer mit dem ersten Gliede 1 einerlei Zeichen behält (31.), d. i. positiv bleibt; so wird für sehr kleine i, oder sehr große x, obiges Product, d. i. das gegebene Polynom, mit dem Factor $\frac{a}{i^n} = a\left(\frac{1}{i}\right)^n = ax^n$, oder dem ersten Gliede des gegebenen Polynoms, immer einerlei Zeichen behalten.

Ganz auf ähnliche Weise lassen sich auch andere Sätze von den unendlich großen Größen auf die Lehre von den unendlich kleinen Größen zurückführen.

36. Noch haben wir den bei den ältern Infinitesimalisten, namentlich bei Leibnitz, welcher ihn zuerst gebraucht und in die Mathematik eingeführt hat, durchgängig vorkommenden Satz, wenn ich diese Benennung gebrauchen darf: „daß eine unendlich kleine Größe gegen eine end„liche, eine unendlich kleine Größe einer höhern Ordnung „gegen eine unendlich kleine Größe einer niedrigern Ord„nung verschwinde" aufzuklären und zu erläutern, wozu einige aus den Gründen der Differentialrechnung hergenommene Beispiele am geeignetsten zu seyn scheinen. Zuerst bemerken wir über den Begriff des Differentialquotienten Folgendes.

ist. Setzt man nun $\Delta x = i$, der Gränze o unbegränzt nähern, möglich ist; so wird

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) -}{i}$$

wo sowohl der Zähler als der N endlich kleine Größen sind, d. h gränzt nähern. Dessen ungeachte hältniß selbst sich einer bestimmten schiedenen, Größe nähern, wie si zeigen läßt. Ist z. B. $f(x) = x$ mischen Lehrsatze

$$\frac{f(x+i)-f(x)}{i} = nx^{n-1} + \frac{n(n-}{1.}$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}$$

und das Verhältniß $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nähert sich wenn i sich der o nähert, der Grö stimmten endlichen, von o verschi Gränze nun, welcher sich $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nähe

wird durch $\frac{\partial y}{\partial x}$ bezeichnet, welches aber hier nicht als ein getrenntes, sondern als ein einfaches Zeichen zu betrachten ist. Es ist aber immer

$$f'(x) = \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Setzt man $i = \alpha \Delta x$, wo, indem Δx eine endliche bestimmte Größe bezeichnet, α sich der Gränze o unbegränzt nähert; so wird

$$\frac{f(x+i) - f(x)}{i} = \frac{f(x+\alpha\Delta x) - f(x)}{\alpha \Delta x},$$

$$\frac{f(x+\alpha\Delta x) - f(x)}{\alpha} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i} \Delta x,$$

und die Gränze, welcher der erste Bruch sich nähert, wenn α sich der o unbegränzt nähert, heißt das Differential von $y = f(x)$, und wird durch ∂y bezeichnet. Nimmt man nun, Δx als eine beständige endliche Größe betrachtend, auf beiden Seiten obiger Gleichung die Gränzen; so erhält man mittelst obiger Bezeichnungen augenblicklich

$$\partial y = \partial f(x) = f'(x) . \Delta x = \frac{\partial y}{\partial x} \Delta x,$$

oder, wenn man $\Delta x = \partial x$ setzt, immer aber wohl bemerkt, daß ∂x eine endliche bestimmte Größe, und $\frac{\partial y}{\partial x}$ ein einfaches Zeichen ist, welches nicht getrennt werden darf:

$$\partial y = \partial f(x) = f'(x) . \partial x = \frac{\partial y}{\partial x} \partial x.$$

38. Sey nun z. B. der Differentialquotient des Products pq zweier Functionen p und q zu bestimmen; so hat man

$$\Delta . pq = (p+\Delta p)(q+\Delta q) - pq = p\Delta q + q\Delta p + \Delta p . \Delta q$$

$$\frac{\Delta . pq}{\Delta x} = p \frac{\Delta q}{\Delta x} + q \frac{\Delta p}{\Delta x} + \Delta p . \frac{\Delta q}{\Delta x},$$

oder, wenn man Δx unendlich klein setzt, d. h. der Gränze o sich unbegränzt nähern läßt:

$$\frac{\Delta . pq}{i} = p \frac{\Delta q}{i} + q \frac{\Delta p}{i} + \Delta p \frac{\Delta q}{i}.$$

Nimmt man nun, um den Differentialquotienten zu finden, auf beiden Seiten die Gränzen; so ist nach dem Obigen

und daher als conſtant zu betr
$\frac{\Delta q}{i}$ zwar der endlichen Gränze $\frac{\partial q}{\partial x}$
unbegränzt der Gränze o nähert;
Glied $\Delta p \frac{\Delta q}{i}$ ſelbſt unbegränzt
alſo

$$\text{Lim.} \frac{\Delta . pq}{i} = p \text{ Lim.} \frac{\Delta}{i}$$

d. i.

$$\frac{\partial . pq}{\partial x} = p \frac{\partial q}{\partial x} + q \frac{\partial}{\partial}$$

und hieraus folgt nach dem Obig

$$\frac{\partial . pq}{\partial x} \partial x = p \frac{\partial q}{\partial x} \partial x$$

$$\partial . pq = p \partial q + q \partial p$$

39. In der ältern Infiniteſi
Schlüſſe auf folgende Weiſe abg
Glied $\Delta p \frac{\Delta q}{i}$ iſt eine unendlich
daher gegen die übrigen endlic
$=$ o geſetzt werden. Der wahre
rer als folgender: wenn i ſich
nähert, nähert obiges Glied ſich
und braucht alſo bei Beſtimmung

$$\frac{\partial.pq}{\partial x} = p\frac{\partial q}{\partial x} + q\frac{\partial p}{\partial x},$$
$$\partial.pq = p\partial q + q\partial p$$

erhält.

40. In der That ist aber die eigentliche Sprache der Infinitesimalisten noch ungenauer, als die, welche wir so eben geführt haben. Aendert sich x um Δx, so wird, wie oben,

$$\Delta.pq = p\Delta q + q\Delta p + \Delta p.\Delta q.$$

Setzt man nun Δx unendlich klein, so gehen, da die Differentiale als unendlich kleine Differenzen betrachtet werden, die obigen Differenzen in die Differentiale über, und die Gleichung verwandelt sich in:

$$\partial.pq = p\partial q + q\partial p + \partial p.\partial q,$$

wo $p\partial q$, $q\partial p$ unendlich kleine Größen erster Ordnung sind, $\partial p.\partial q$ aber eine unendlich kleine Größe zweiter Ordnung ist, welche gegen jene vernächlässigt, $= o$ gesetzt werden kann. Dies giebt

$$\partial.pq = p\partial q + q\partial p.$$

Daß diese Sprache, wenn sie auch zu einem richtigen Resultate führt, einer eignen Interpretation bedürfe, die in den beiden vorhergehenden Nummern vollständig gegeben ist, wird gewiß Niemand in Abrede stellen. Daß aber jede Sprache, welche nicht völliges Licht über die Sache verbreitet, aus der Mathematik zu verbannen sey, scheint eben so gewiß zu seyn, und ich kann wenigstens den Mathematikern nicht beipflichten, welche in neuerer Zeit dieser Sprache wieder das Wort geredet haben, obgleich auf der andern Seite allerdings die z. B. von Carnot und v. Busse gemachten Versuche, eben diese an sich gewiß unrichtige Sprache aufzuklären, und zu zeigen, wie man dennoch dadurch zu so vielen richtigen Resultaten, welche auf die ganze Wissenschaft einen so bedeutenden Einfluß gehabt haben, gelangen konnte, in vieler Rücksicht wichtig und interessant sind, und den Scharfsinn ihrer Verfasser beurkunden. Durch die Methode der Gränzen wird Alles deutlich und klar, und hat man derselben auch nicht mit Unrecht den Vorwurf gemacht, daß sie oft zu großer Weitläufigkeit führe, tritt uns dieselbe auch in der That in dem ersten und wichtigsten

Subtang $= \frac{y\partial_1}{\partial y}$

Nicht viel weitläufiger iſt der Be
der Gränzen. Man laſſe ſich x
ändert ſich y um Δy, und, wenn
Durchſchnittspunktes der durch die
ten y und $y + \Delta y$ gehenden Seh
von der Ordinate bezeichnet; ſo ha

$$v : y = \Delta x : \Delta y, \quad v$$

oder, wenn Δx ſich der o unbegrä

$$v = \frac{y}{\frac{\Delta y}{i}}.$$

Dann nähert ſich aber die Sehne de
ſich der Subtangente, und $\frac{\Delta y}{i}$ der
man die Gränzen nimmt:

Subtang $= \frac{y}{\frac{\partial y}{\partial x}}$

welches man abgekürzt gewöhnlich S

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{\partial y}{\partial x},$$

woraus ferner unmittelbar obiger Ausdruck für die Subtangente folgt.

Endlich kann man auch so schließen. Die Gleichung der mehrgenannten Sehne sey

$$Y = aX + b;$$

so hat man, wenn x, y die Coordinaten des Berührungspunktes sind:

$$y = ax + b,$$
$$y + \Delta y = a(x + \Delta x) + b,$$

woraus durch Elimination

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x},\quad b = y - x\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

und folglich, zugleich unter der Voraussetzung, daß Δx sich der Gränze o nähert:

$$Y = \frac{\Delta y}{i}X + y - x\frac{\Delta y}{i}.$$

Dann nähert sich aber die Sehne der Berührenden, folglich auch die constanten Größen in der Gleichung der Sehne den constanten Größen in der Gleichung der Berührenden, und letztere wird aus erstere erhalten, wenn man die Gränzen der constanten (von X, Y unabhängigen) Größen nimmt. Dies giebt als Gleichung der Berührenden:

$$Y = X\frac{\partial y}{\partial x} + y - x\frac{\partial y}{\partial x},$$

welches man gewöhnlich so schreibt:

$$Y = X\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{y\partial x - x\partial y}{\partial x},$$

wo dann auch ∂x, ∂y die Differentiale selbst (37.) bezeichnen können.

43. Diese einfachen Beispiele mögen hinreichen, den eigentlichen Sinn der Ausdrücke der Infinitesimalrechnung zu zeigen. Sie lassen sich in allen Fällen auf die strenge Betrachtung der Gränzen zurückführen. Außer den mehrmals genannten neuern Abhandlungen von Cauchy, und den meisten ältern Werken über höhere Analysis, suche man weitere Belehrung in folgenden Schriften:

Karſtens Abhandlung vom
lichen, mit Rückſicht auf eine im J
Preisfrage (vergl. Thl. I. S. 81
in ſeinen Mathematiſchen Abhand
S. 1., und deſſen übrige bekannte

Exposition élémentaire de
culs superieurs par L'Huilie

Deſſen Principiorum calc. di
elementaris. Tub. 1795. Cap. I
vocant) mathematico.

Betrachtungen über die Th
malrechnung von Carnot. U
Frankfurt. 1800.

v. Busse: Bündige und re
wahrhaften Infinitesimal-Calcu
den. 1825.

Krafftii Dissertatio de inf

Ein Aufſatz von Raymond
Soc. acad. de Savoie. T. II. p. 1
geometriſche Bedeutung des Sym
S. auch Bulletin

Gerdil: De l'infini absolu considere dans la grandeur. Miscell. Soc. Taurinensis. T. II. p. 1.

Euler: De infinities infinitis gradibus tam infinite magnorum quam infinite parvorum. Acta Petrop. 1778. P. I. p. 102.

Martin: Mémoire sur la maniere de demontrer, par les methodes des anciens, les hypotheses de Leibnitz dans le calcul differentiel. Mém. de Toulouse. T. I. p. 43.

Ej. Mémoire contenant l'application des principes tirés de la Méthode des limites aux diverses parties du calcul de l'infini. Mém. de Toulouse. T. III. p. 29.

Unendliche Reihen (Series infinitae) sind solche, deren Glieder nach einem bestimmten, allen gemeinschaftlichen, Gesetze in's Unendliche fortlaufen, ohne jemals abzubrechen. Ueber ihre verschiedenen Formen, Summirung, Umkehrung und Umformung s. m. die Artikel Reihe, summirbare Reihe, Summirung der Reihen, Umkehrung der Reihen, Umformung der Reihen. Auch vergl. man Unendlich (22.) An diesen Orten findet man auch die nöthigen historischen und literarischen Notizen in hinreichender Ausführlichkeit.

Unendlicher Kettenbruch ist ein solcher, dessen Glieder nach einem bestimmten allgemeinen Gesetze, ohne jemals abzubrechen, in's Unendliche fortlaufen. Beispiele finden sich im Art. Kettenbruch (39. ff.), so wie Logarithmus (164. ff.), und Quadratur (58. ff.) mehrere.

Unermeßlich, s. Incommensurabel.

Ungerade Zahl (numerus impar) ist jede ganze Zahl von der Form $2n - 1$ oder $2n + 1$. Die Zahl $2n - 1$ ist die nte ungerade Zahl in der Reihe 1, 3, 5, 7, 9, ... derselben, $2n + 1$ dagegen die $(n+1)$te. Da $(2n + 1) + 2r = 2(n + r) + 1$, $(2n + 1) - 2r = 2(n - r) + 1$, $(2n + 1) + (2r + 1) = 2(n + r + 1)$,

jede Zahl von der Form (2n
$4mn + 2(m + n) + 1$.

Gerad-ungerade Zahl
impar) dagegen ist eine Zahl,
Zahl theilbar ist, und zum Quoti
giebt; also alle Zahlen von der F

Ungereimt, s. Absurd.

Ungeschickte Vierung,

Ungleich ist, was in Ans
für einander gesetzt werden darf.

1. Sind a und b zwei ungleich
$a > b$ oder $b <$
wenn die Differenz $a - b$ positiv

Diese von Cauchy (Cours
royale polytechnique. Paris. 1
rende Erklärung gilt für positive
Läßt man eine positive Größe nach

Erklärung, aus der wir nun einige Sätze ableiten wollen, enthalten.

2. Wenn

$$a > b,\ a' > b',\ a'' > b'',\ a''' > b''', \ldots.$$

ist; so ist auch

$$a + a' + a'' + a''' + \ldots > b + b' + b'' + b''' + \ldots.$$

Denn die Differenzen

$$a - b,\ a' - b',\ a'' - b'',\ a''' - b''', \ldots.$$

sind positiv; folglich offenbar auch deren Summe

$$(a-b) + (a'-b') + (a''-b'') + (a'''-b''') + \ldots$$
$$= a + a' + a'' + a''' + \ldots - (b + b' + b'' + b''' + \ldots).$$

3. Ist nun

$$\alpha = \beta,\ \alpha' = \beta',\ \alpha'' = \beta'',\ \alpha''' = \beta''', \ldots;$$

so sind die Differenzen

$$\alpha - \beta,\ \alpha' - \beta',\ \alpha'' - \beta'',\ \alpha''' - \beta''', \ldots.$$

alle $= 0$, und folglich offenbar auch

$$a + a' + a'' + a''' + \ldots + \alpha + \alpha' + \alpha'' + \alpha''' + \ldots$$
$$> b + b' + b'' + b''' + \ldots + \beta + \beta' + \beta'' + \beta''' + \ldots$$

4. Wenn $a > b$, $a' > b'$ ist; so ist

$$a - b' > b - a'.$$

Denn es ist

$$a > b,\ a' > b',\ -a' - b' = -a' - b'.$$

Also (3.):

$$a + a' - a' - b' > b + b' - a' - b',$$

d. i.

$$a - b' > b - a'.$$

5. Wenn alle Größen positiv sind, und

$$a > b,\ a' > b',\ a'' > b'',\ a''' > b''', \ldots.$$

ist; so ist auch

$$a\ a'\ a''\ a'''\ \ldots. > b\ b'\ b''\ b'''\ \ldots.$$

Die Differenzen

$$a - b,\ a' - b',\ a'' - b'',\ a''' - b''', \ldots.$$

sind nach der Voraussetzung positiv; folglich sind auch, da alle Größen positiv seyn sollen, in Bezug auf fünf Größen z. B., alle folgenden Producte positiv:

$$(a - b)\,a'\,a''\,a'''\,a'''' = a\,a'\,a''\,a'''\,a'''' - b\,a'\,a''\,a'''\,a'''',$$
$$(a' - b')\,b\,a''\,a'''\,a'''' = b\,a'\,a''\,a'''\,a'''' - b\,b'\,a''\,a'''\,a'''',$$

$(n-1)\,Q >$

Aber $A^2 = Q + 2B$, $(n-1$

$2\,(n-1)\,B$. Folglich

$(n-1)\,A^2 + (n-1)\,Q > (n-$

d. i. $(n-1)\,A^2 > 2nB$, w. z.

13. Sind a und b willkühr
ßen, und n eine positive ganze Z

$$na^n + b^n > a^n +$$

Die Differenz dieser beiden Aus

$$= na^n + b^n - a^n - na^{n-1}\,b$$
$$= na^{n-1}\,(a-b) - (a^n - b^n)$$
$$= (a-b)\left\{na^{n-1} - a^{n-1} - a^{n-2}\,b\right.$$

Ist nun $a > b$; so ist offenbar

$$na^{n-1} > a^{n-1} + a^{n-2}\,b + ..$$

und eben so, wenn $a < b$ ist:

$$na^{n-1} < a^{n-1} + a^{n-2}\,b + ..$$

Folglich sind die beiden Factoren
zugleich positiv und negativ, die
sitiv, und demnach immer

$$na^n + b^n > a^n +$$

15. Wenn a, a′, a″, ... willkührliche Größen sind, an der Zahl n; so ist immer der absolute Werth der Summe

$$a + a' + a'' + \ldots.$$

kleiner als das Product

$$\sqrt{n} \cdot \sqrt{(a^2 + a'^2 + a''^2 \ldots.)},$$

vorausgesetzt, daß die Größen a, a′, a″, ... nicht alle unter einander gleich sind.

Denn es ist offenbar

$$\begin{aligned}
&(a + a' + a'' + a''' + \ldots.)^2 \\
&+ (a-a')^2 + (a-a'')^2 + (a-a''')^2 + (a-a'''')^2 + \ldots. \\
&\quad + (a'-a'')^2 + (a'-a''')^2 + (a'-a'''')^2 + \ldots. \\
&\quad\quad + (a''-a''')^2 + (a''-a'''')^2 + \ldots. \\
&\quad\quad\quad + (a'''-a'''')^2 + \ldots. \\
&\quad\quad\quad\quad \ldots\ldots \\
&= n(a^2 + a'^2 + a''^2 + a'''^2 + \ldots.),
\end{aligned}$$

und demnach, wenn die Differenzen a — a′, a — a″, a — a‴, u. s. f. nicht alle = 0, d. i. die gegebenen Größen nicht alle einander gleich sind, weil ein Quadrat immer positiv ist, offenbar:

$$(a + a' + a'' + \ldots)^2 < n(a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots),$$
$$a + a' + a'' + \ldots < \sqrt{n} \cdot \sqrt{(a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots)},$$

wo es aber natürlich bloß auf den absoluten Werth der Summe $a + a' + a'' + \ldots$ ankommt.

16. Durch Division mit n erhält man hieraus unmittelbar:

$$\frac{a + a' + a'' + \ldots.}{n} < \sqrt{\frac{a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots}{n}},$$

so daß also das arithmetische Mittel zwischen a, a′, a″, ... immer kleiner als diese Quadratwurzel ist.

17. Sind die gegebenen Größen alle einander gleich; so folgt aus (15.) unmittelbar, daß

$$a + a' + a'' + \ldots = \sqrt{n} \cdot \sqrt{(a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots)} = na,$$

immer bloß in Bezug auf den absoluten Werth der Summe.

18. Wenn a, a′, a″, ...; α, α′, α″, ... willkührliche Größen sind, und jede dieser Reihen n Glieder enthält; so ist, wenn die Brüche

$$+(a''\alpha''$$

$$= (a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots)(\alpha^2$$

Folglich, wenn nicht alle gleich, alſo auch nicht alle Differenze $a\alpha''' - a'''\alpha$, u. ſ. f. $= 0$ ſind,

$$(a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + a'$$
$$< (a^2 + a'^2 + a''^2 \ldots)(\alpha^2 +$$
$$a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + a'''$$
$$< r(a^2 + a'^2 + a''^2 \ldots) . r($$

natürlich bloß in Bezug auf den Summe.

19. Dividirt man durch n; blicklich

$$\frac{a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + a''}{n}$$
$$< r\frac{a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots}{n} . r$$

woraus ſich wieder ein leicht in D Satz vom arithmetiſchen Mittel erg

ebenfalls bloß in Bezug auf den absoluten Werth ersterer Summe.

21. Setzt man in (18.) $n = 2$, $n = 3$; so erhält man aus der dortigen Hauptgleichung die besonderen, an sich merkwürdigen, Gleichungen:

$$(a\alpha + a'\alpha')^2 + (a\alpha' - a'\alpha)^2 = (a^2 + a'^2)(\alpha^2 + \alpha'^2),$$

$$(a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'')^2 + (a\alpha' - a'\alpha)^2 + (a\alpha'' - a''\alpha)^2 + (a'\alpha'' - a''\alpha')^2 = (a^2 + a'^2 + a''^2)(\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2),$$

$$(a\alpha' - a'\alpha)^2 + (a\alpha'' - a''\alpha)^2 + (a'\alpha'' - a''\alpha')^2 = (a^2 + a'^2 + a''^2)(\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2) - (a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'')^2.$$

22. Sind die Größen a, b, c, d, ..., an der Zahl n, alle positiv; so ist immer

$$\sqrt[n]{abcd\ldots.} < \frac{a+b+c+d+\ldots.}{n}.$$

Für $n = 2$ ist

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2, < \left(\frac{a+b}{2}\right)^2;$$

$$\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}.$$

Also ist

$$ab < \left(\frac{a+b}{2}\right)^2,\ cd < \left(\frac{c+d}{2}\right)^2;$$

$$abcd < \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{c+d}{2}\right)^2 < \left\{\frac{a+b}{2} \cdot \frac{c+d}{2}\right\}^2;$$

$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{c+d}{2} < \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2;$$

$$abcd < \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4;$$

$$\sqrt[4]{abcd} < \frac{a+b+c+d}{4}.$$

Eben so ist ferner

$$abcd < \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4,\ efgh < \left(\frac{e+f+g+h}{4}\right)^4;$$

$$abcdefgh < \left\{\frac{a+b+c+d}{4} \cdot \frac{e+f+g+h}{4}\right\}^4;$$

$$\frac{a+b+c+d}{4} \cdot \frac{e+f+g+h}{4} < \left(\frac{a+b+c+d+e+f+g+h}{8}\right)^2;$$

$$abcdefgh < \left(\frac{a+b+c+d+e+f+g+h}{8}\right)^8.$$

Hieraus erhellet schon, wie man weiter gehen kann, und der Satz gilt also überhaupt, wenn n von der

2^m

b. i. abcd . . . . a^2

abcd . . . . $a^{2^m} < a^{2^m+n}$, s

abcd . . . . $< \left(\frac{a+b+}{}\right.$

w. z. b. w.

Folglich ist auch immer

$$\sqrt[n]{abcde....} < \frac{a+b+c+d+e+...}{}$$

Für $n = 2$ z. B. ist $\sqrt{ab}$ <

lere geometrische Proportionale immer kleiner als ihr arithmetisch

$$\sqrt[3]{abc} < \frac{a+b+}{3}$$

$$\sqrt[4]{abcd} < \frac{a+b+}{4}$$

$$\sqrt[5]{abcde} < \frac{a+b+}{}$$

u. s. f u.

23. Aus diesem Satze lassen sich verschiedene Folgerungen ziehen. Sind z. B. a, b zwei willkührliche ungleiche positive Größen, und m, n zwei positive ganze Zahlen; so ist, da in der Summe

$$na^{m+n} + mb^{m+n}$$

die Potenz a^{m+n} nmal, b^{m+n} dagegen mmal vorkommt, nach vorigem Satze:

$$\frac{na^{m+n} + mb^{m+n}}{m+n} > \sqrt[m+n]{(a^{m+n})^n \cdot (b^{m+n})^m}$$

$$> \sqrt[m+n]{(a^n)^{m+n} \cdot (b^m)^{m+n}} > \sqrt[m+n]{(a^n b^m)^{m+n}};$$

d. i. $$\frac{na^{m+n} + mb^{m+n}}{m+n} > a^n b^m,$$

$$na^{m+n} + mb^{m+n} > (m+n)\, a^n b^m.$$

Für $m = n = 1$ erhält man:

$$a^2 + b^2 > 2ab \quad (11.).$$

Auf den hier bewiesenen allgemeinen Satz hat G. A. Rothe in seinem sehr zu empfehlenden Systematischen Lehrbuche der Arithmetik. Leipzig. 1804. Thl. II. Kap. 15. einen sehr strengen elementaren Vortrag der annähernden Berechnung irrationaler Logarithmen gegründet.

24. Bezeichnet e, wie gewöhnlich, die Basis der natürlichen Logarithmen, und x eine willkührliche reelle, positive oder negative, Größe; so ist immer

$$1 + x < e^x.$$

Da, x mag positiv oder negativ seyn, offenbar e^x immer positiv ist; so ist der Satz, wenn $1 + x$ negativ ist, für sich klar, und also bloß noch der Fall zu betrachten, wenn $1 + x$ positiv ist.

Es ist nämlich (Logarithmus. 31.):

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1...4} + \frac{x^5}{1....5} + \cdots$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2}\left(1 + \frac{x}{3}\right) + \frac{x^4}{2.3.4}\left(1 + \frac{x}{5}\right) + \frac{x^6}{2...6}\left(1 + \frac{x}{7}\right) + \cdots$$

Wenn nun $1 + x$ positiv ist, x selbst mag positiv oder negativ seyn; so sind doch die Größen

$$1 + x,\ 1 + \frac{x}{3},\ 1 + \frac{x}{5},\ 1 + \frac{x}{7},\ \ldots\ldots$$

26. Im Art. Umformung der
zeigt, daß, wenn x eine ganze Zahl
ganze positive k:

$$\log \text{nat}\, x < k\,(\sqrt[k]{x}-1),\ >1$$

27. Sind

$$1+x,\ 1+y,\ 1+z,\ 1+$$

lauter positive Größen; so ist (24.)

$$1+x < e^{x},\ 1+y < e^{y},\ 1+z < e^{z}$$

Also (5.)

$$(1+x)(1+y)(1+z)(1+u)\ldots <$$

eine Relation, die immer statt findet
duct auf der linken Seite bloß positiv

28. Sind $\alpha,\ \alpha',\ \alpha'',\ \ldots$
Größen, und $a,\ a',\ a'',\ \ldots$
Größen, welche respective größer als

$$-\frac{1}{\alpha},\ -\frac{1}{\alpha'},\ -\frac{1}{\alpha''},\ .$$

sind; so folgt aus (27.), wenn man

$$x=a\alpha,\ y=a'\alpha',\ z=a''\alpha'',\ u=$$

$$e^{aa+a'a'+a''a''+\ldots} < e^{\lambda(a+a'+a''+\ldots)},$$

da e positiv und > 1 ist. Also auch immer

$$(1+aa)(1+a'a')(1+a''a'')\ldots. < e^{\lambda(a+a'+a''+\ldots)}.$$

29. Ist x positiv; so folgt aus der Natur des Kreises unmittelbar, daß immer

$$\sin x < x$$

ist, sin x selbst mag positiv oder negativ seyn.

Ist $x < \frac{1}{2}\pi$; so ist offenbar auch immer

$$\text{tang}\, x > x, \text{ d. i. } \frac{\sin x}{\cos x} > x;$$

$$\frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin x^2}} > x, \ \sin x^2 > x^2(1-\sin x^2);$$

$$\sin x^2 > x^2 - x^2 \sin x^2, \ (1+x^2)\sin x^2 > x^2;$$

$$\sin x\sqrt{1+x^2} > x, \ \sin x > \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Also ist, wenn x positiv und $< \frac{1}{2}\pi$ ist, immer

$$\sin x < x, \ \sin x > \frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$$

wodurch der Sinus eines Bogens zwischen zwei Gränzen eingeschlossen wird, die einander offenbar desto näher kommen, je kleiner x ist.

30. Die Zahl dieser Formeln der Ungleichheit würde sich leicht vermehren lassen; die Beschränktheit des Raumes gebietet uns indeß, nur noch Folgendes in der Kürze zu bemerken. Es erhellet nämlich aus den oben (2. bis 7.) bewiesenen Sätzen sogleich, daß sich mit Ausdrücken, welche durch die Zeichen $>$ oder $<$ mit einander verbunden sind, ganz ähnliche Verwandlungen vornehmen lassen, wie mit den gewöhnlichen algebraischen Gleichungen. Die französischen Geometer, und unter ihnen zuerst Fourier im Jahre 1823, obgleich auch Gergonne schon 1811 in den Annales de Math. T. II. p. 195. ähnliche Ideen geäußert hat, haben hierauf einen eignen Calcul gegründet, den sie calcul des inégalités nennen. Dann haben Navier und Cauchy diese Ideen weiter verfolgt, ersterer im Bulletin des sciences de la société philomatique (mai et juin. 1825. p. 66. 81.), letzterer im

daß die gesuchte Zahl größer als
um 1 vermehrt, kleiner als das
daß, wenn man die Zahl um 1
vermehrt, der Quotient jener Di
me $> \frac{4}{7}$ ist. Dies giebt folgende

$$x > 15,\ 3x+1 < 2x+20,$$

$$x > 15,\ x < 19,\ 5x-5$$
$$x > 15,\ x < 19,\ x > 17$$

Ist $x > 17$; so ist es auch $>$
die Bedingungen $x > 17$, $x <$
Zahl zwischen 17 und 19 der
Werden aber bloß ganze Zahlen ve
eine Auflösung, nämlich $x = 18$

33. Eine Zahl zu finden, dere
mindert nicht kleiner als 7, und d
1 nicht größer als 11 plus dem S
Zahl ist. Also

$$3x - 2 \gtreqless 7,\ 10x - 1 \lesseqgtr$$

$$3x \gtreqless 9,\ 10x \lesseqgtr 12 + 6x,$$

nirt man nun die unbekannten Größen, so viel sich deren eliminiren lassen, so wird man eine oder mehrere Gleichungen zwischen den gegebenen und den eingeführten Größen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ erhalten, denen man nun zu genügen suchen muß. Die eingeführten Größen werden immer als positiv angenommen. In Bezug auf das Problem in (33.) hat man z. B. die Gleichungen:

$$3x-2=7+\alpha,\quad 10x-1=11+6x-\beta;$$

$$x=\frac{9+\alpha}{3},\quad x=\frac{12-\beta}{4};\quad \frac{9+\alpha}{3}=\frac{12-\beta}{4};$$

$$36+4\alpha=36-3\beta,\quad 4\alpha=-3\beta.$$

Da α, β positiv sind; so wird letzterer Gleichung nur genügt für $\alpha=\beta=0$. Also $x=\frac{9}{3}=3$.

35. Die Einheit in drei Theile zu theilen, welche ungleich seyn können, aber so beschaffen seyn sollen, daß der größte Theil das Product des kleinsten in die positive Zahl $1+r$ nicht übersteigt.

Dies giebt, wenn man drei positive willkührliche Größen α, β, γ einführt, die Gleichungen:

$$x+y+z=1,$$

$$y=x+\alpha,\quad z=y+\beta,\quad z=(r+1)x-\gamma.$$

Bestimmt man nun aus den drei letzten Gleichungen x, y, z; so erhält man:

$$x=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{r},$$

$$y=x+\alpha=\frac{(r+1)\alpha+\beta+\gamma}{r},$$

$$z=y+\beta=\frac{(r+1)(\alpha+\beta)+\gamma}{r}.$$

Setzt man diese Werthe in die erste Gleichung; so kommt nach einigen Reductionen:

$$(2r+3)\alpha+(r+3)\beta+3\gamma=r.$$

Da nun α, β, γ alle drei positiv sind; so ergiebt sich hieraus zunächst $3\gamma \lessgtr r$, $\gamma \lessgtr \frac{1}{3}r$. Ferner ist

$$(2r+3)\alpha=r-3\gamma-(r+3)\beta;$$

also $$(r+3)\beta \lessgtr r-3\gamma,\quad \beta \lessgtr \frac{r-3\gamma}{r+3}.$$

worden ſind. Es wird hieraus erh
der Auflöſung ähnlicher Aufgaben z
reres ſ. m. in den angeführten Sc
Conſtruction der letzten Aufgabe ha
tin de la société philomatique.
gegeben, die auch im Bulletin de
tiques de Férussac. Janvier
theilt iſt. Beſonders benutzt iſt
ſchon oben (1.) erwähnte Werk v
p. 438. sqq.).

Ueber die Ungleichheit der Verh
Verhältniß.

Ungleiche Vierung, ſ. T

Ungleichſeitig heißen im A
geradlinigen Figuren, deren Seiten
ander gleich ſind, wie z. B. das
(triangulum scalenum). Das
iſt im Allgemeinen auch eine ungle
ein ungleichſeitiges Dreieck, wird a
gleichſchenklich von dem

Ungleich = ungleiche Zahl (numerus inaequaliter inaequalis) ist bei den ältern arithmetischen Schriftstellern eine Flächenzahl mit zwei ungleichen Seiten, d. h. eine Zahl, welche als durch Multiplication zweier ungleichen Factoren in einander entstanden gedacht werden kann, wie z. B. $24 = 3 . 8$, $30 = 5 . 6$. Solche Zahlen werden eigentlich den Quadratzahlen entgegengesetzt, die sich immer in zwei einander gleiche Factoren zerlegen lassen, und daher numeri aequaliter aequales genannt werden.

Ungleich = ungleich = ungleiche Zahl numerus inaequaliter inaequalis inaequaliter) ist eine Körperzahl mit drei ungleichen Seiten, d. h. eine Zahl, welche als durch Multiplication dreier ungleichen Factoren in einander entstanden gedacht wird, wie z. B. $24 = 2 . 3 . 4$, $30 = 2 . 3 . 5$. Die Cubikzahlen heißen zum Gegensatze numeri aequaliter aequales aequaliter.

Ungula, s. Hufförmiger Abschnitt.

Uniform, s. Gleichförmig.

Unionen heißen in der Combinatorischen Analysis bei den Combinationen und Variationen die Complexionen der ersten Klasse, welche nur ein Element enthalten.

Unmögliche Aufgabe ist eine solche, welche die Erfüllung sich widersprechender Bedingungen verlangt, und daher unauflösbar ist. Oft sind Aufgaben nur in gewissen besondern Fällen unmöglich. Die Beurtheilung, ob eine Aufgabe möglich oder unmöglich ist, ist nicht selten mit Schwierigkeiten verknüpft. Die unmöglichen oder imaginären Größen (s. diesen Artikel) leisten aber bei der analytischen (algebraischen) Auflösung der Aufgaben vortreffliche Dienste. Man behandelt nämlich jede vorgelegte Aufgabe ohne Unterschied als möglich, d. i. als wirklich auflösbar. Enthält nun das Endresultat keine imaginären Größen, und wird auch in keinem besondern Falle

dennoch möglich ſeyn würde. Fi
einer Aufgabe auf eine cubiſche G
Fall; ſo erſcheint (Cardans Reg
Wurzel nach der Cardaniſchen Re
ren Form, die Gleichung hat abe
und es giebt alſo drei verſchiedene
Aufgabe.

Die Aufgabe: eine gegebene g
len, daß das Rechteck zwiſchen b
benen Quadrate b^2 gleich ſey, füh
dratiſche Gleichung

$$x(a-x) = b^2, \quad x^2 -$$

ohne für jetzt weiter zu berückſich
möglich oder unmöglich iſt. Löſet m
Gleichung auf; ſo erhält man

$$x = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2}$$

woraus man, da, für $\frac{1}{4}a^2 <$
gativ, $\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$ alſo imagin
daß die Aufgabe nur möglich iſt, n
unmöglich wird, wenn

woraus sogleich erhellet, daß die Aufgabe in allen Fällen möglich ist. Die doppelten Zeichen beziehen sich bei diesen beiden Aufgaben darauf, daß man das bestimmte Stück x sowohl an dem einen als dem andern Endpunkte der gegebenen Linie a von derselben abschneiden, und an sie ansetzen kann.

Ein Dreieck aus drei gegebenen Seiten zu beschreiben, wenn zwei Seiten nicht größer als die dritte sind; einen Kreis zu beschreiben, welcher drei unter einander parallele Linien zugleich berührt, u. s. f., sind ebenfalls einfache Beispiele unmöglicher Aufgaben aus der Geometrie.

Unmögliche Ausdrücke für die goniometrischen Linien, s. Unmögliche Größen (9.), und Differentialformeln (47. ff.).

Unmögliche, eingebildete oder imaginäre Größen nennt man alle solche Ausdrücke, für welche sich keine wirkliche Größe als Werth angeben läßt, wie z. B. Arc sin x, Arc cos x für $x > 1$. Die Werthe solcher Größen, wenn sie den Regeln des Algorithmus unterworfen werden, existiren also bloß symbolisch, und sind nur eingebildet oder imaginär. Dessenungeachtet sind aber solche Größen in der Mathematik von großem Nutzen, und werden oft absichtlich zur Abkürzung in Rechnungen eingeführt, wo sie sich aber im Laufe der Rechnung wieder aufheben, und das Resultat reell oder möglich bleibt. Uebrigens aber rechnet man in der Mathematik mit imaginären Größen, wie mit wirklichen. Jede Aufgabe, einer analytischen Behandlung unterworfen, wird als möglich, d. i. als auflösbar, betrachtet, und unter dieser Annahme behandelt. Enthält aber das Endresultat imaginäre Größen, welche auf keine Weise aus demselben eliminirt werden können; so hat man hierin ein Kriterium, daß die Aufgabe selbst unmöglich ist, d. h. die Erfüllung sich widersprechender Bedingungen verlangt. Jedoch hüte man sich, nicht zu voreilig auf diese Art zu schließen, weil zuweilen durch schickliche Verwandlungen und Re-

imaginären Wurzelgrößen, wenn
Regeln des Algorithmus unterwo
auf zwei Principien. Nach d
muß immer

$$\alpha) \qquad \sqrt[2n]{(r-a)^{2n}} =$$

gesetzt werden. Ferner ist jed
Zerlegung in gleiche Factoren, un
ren ist nie von Einfluß auf die G
wird man

β) auch wenn imaginäre G
einem Product die Wurzeln erhalt
zelzeichen mit demselben Exponente
vorsetzt.

2. Euler hat die imaginären
sehr sinnreiche Art mit der Goni
gesetzt. Dazu ist folgender Sat
nämlich bloß mit Hülfe von (1. α.
niometrischen Formeln, wenn $\sqrt{-}$
zeichnet wird, leicht:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi' +$$

$$(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)(\cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi))$$
$$= \cos(n\varphi - n\varphi) + i\sin(n\varphi - n\varphi) = 1;$$
$$(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)^{-1} = \cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi)$$

. i. nach α):

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-n} = \cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi),$$

ür jedes ganze — n.

γ) Folglich nach α) für jedes ganze positive m:

$$(\cos\tfrac{1}{m}\varphi + i\sin\tfrac{1}{m}\varphi)^m = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

nd nach (α, β) für jedes ganze positive oder negative n:

$$(\cos\tfrac{n}{m}\varphi + i\sin\tfrac{n}{m}\varphi)^m = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n.$$

olglich für jeden positiven oder negativen Bruch $\frac{n}{m}$:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\frac{n}{m}} = \cos\tfrac{n}{m}\varphi + i\sin\tfrac{n}{m}\varphi.$$

olglich für jedes n, wenn man zugleich $-\varphi$ für φ setzt:

$$(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi \pm i\sin n\varphi.$$

3. über diese nach Moivre benannten Gleichungen auch hl. II. S. 554.

4. Da nun $\cos\pi = -1$, $\sin\pi = 0$ ist; so ist

$$-1 = \cos\pi \pm i\sin\pi,$$
$$\sqrt[2n]{-1} = \cos\tfrac{\pi}{2n} \pm i\sin\tfrac{\pi}{2n}.$$

ber (1. β.) $\sqrt[2n]{-a} = \sqrt[2n]{a.(-1)} = \sqrt[2n]{a}.\sqrt[2n]{-1}$.
lso

$$\sqrt[2n]{-a} = \sqrt[2n]{a}.\cos\tfrac{\pi}{2n} \pm i\sqrt[2n]{a}.\sin\tfrac{\pi}{2n},$$

. i. $\sqrt[2n]{-a} = A + Bi$, auf welche Form also jede imaginäre Wurzelgröße immer gebracht werden kann.

5. Alle Rechnungen mit imaginären Wurzelgrößen werden am leichtesten und sichersten ausgeführt, wenn man sie zuvor auf obige Form bringt, nnd dann, berücksichtigend, daß immer $i^2 = -1$ (1. α.), nach den gewöhnlichen Regeln der allgemeinen Arithmetik verfährt. Z. B. $\sqrt{-a}.\sqrt{-b} = i\sqrt{a}.i\sqrt{b} = i^2\sqrt{ab}$

$$i = -\frac{\alpha - \alpha'}{\beta - \beta'}$$

ein reeller Ausdruck für eine imaginäre
ches ungereimt iſt. Dagegen gibt α
augenblicklich $i = \frac{0}{0}$, welches bekannt
deuten kann.

Zwei imaginäre Ausdrücke wie α
heißen einander conjungirt. Da

$$(\alpha+\beta i) + (\alpha-\beta i) = 2\alpha,$$
$$(\alpha+\beta i) - (\alpha-\beta i) = 2\beta i,$$
$$(\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i) = \alpha^2+$$
$$\frac{\alpha+\beta i}{\alpha-\beta i} = \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2} + \frac{2\alpha}{\alpha^2+}$$

iſt; ſo erhellet, daß Summe und Pro
nären conjungirten Ausdrücke reell, D
tient dagegen imaginär ſind.

Es iſt

$$(\alpha+\beta i)(\alpha'+\beta' i) = \alpha\alpha'-\beta\beta' + ($$
$$(\alpha-\beta i)(\alpha'-\beta' i) = \alpha\alpha'-\beta\beta' - (\alpha$$
$$(\alpha+\beta i)(\alpha'+\beta' i)(\alpha-\beta i)(\alpha'-\beta' i)$$
$$= (\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i)(\alpha'+\beta' i)(\alpha'-$$
$$= (\alpha\alpha'-\beta\beta')^2 + \ldots$$

6. Die imaginäre Form $\alpha + \beta i$ kann immer auf die Form

$$\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

gebracht werden. ϱ heißt der Modulus, und $\cos\varphi + i\sin\varphi$ der reducirte Ausdruck. Man erhält nämlich leicht aus

$$\alpha + \beta i = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi):$$

$$\alpha = \varrho\cos\varphi,\ \beta = \varrho\sin\varphi;$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = \varrho^2(\cos\varphi^2 + \sin\varphi^2) = \varrho^2;$$

$$\varrho = \sqrt{\alpha^2+\beta^2},\ \cos\varphi = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},\ \sin\varphi = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}};$$

$$\varphi = \text{Arç cos}\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \text{Arc sin}\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},$$

woraus sich φ immer bestimmen läßt, da $\sqrt{\alpha^2+\beta^2} > \alpha, > \beta$. Für $\beta = 0$ ist $\alpha + \beta i$ reell, und man erhält $\varrho = \alpha$, $\varphi = 0$, oder auch $\varrho = -\alpha$, $\varphi = \pi$.

7. Es ist

$$(\alpha+\beta i) + (\alpha'+\beta' i) + (\alpha''+\beta'' i) + \ldots$$
$$= (\alpha+\alpha'+\alpha''+\ldots) + (\beta+\beta'+\beta''+\ldots)i$$
$$(\alpha+\beta i) - (\alpha'+\beta' i) - (\alpha''+\beta'' i) - \ldots$$
$$= (\alpha-\alpha'-\alpha''-\ldots) + (\beta-\beta'-\beta''-\ldots)i$$
$$(\alpha+\beta i)(\alpha'+\beta' i)(\alpha''+\beta'' i)\ldots.$$
$$= \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi).\varrho'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')\ldots$$
$$= \varrho\varrho'\ldots(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi' + i\sin\varphi')\ldots$$
$$= \varrho\varrho'\ldots\{\cos(\varphi+\varphi'+\ldots) + i\sin(\varphi+\varphi'+\ldots)\}\ (2.)$$
$$\frac{\alpha+\beta i}{\alpha'+\beta' i} = \frac{\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{\varrho'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')}.$$
$$= \frac{\varrho}{\varrho'}(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi' + i\sin\varphi')^{-1}$$
$$= \frac{\varrho}{\varrho'}(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos(-\varphi') + i\sin(-\varphi'))\ (3.)$$
$$= \frac{\varrho}{\varrho'}\{\cos(\varphi-\varphi') + i\sin(\varphi-\varphi')\}\ (2.)$$

Folglich können alle Summen, Differenzen, Producte und Quotienten der imaginären Form $\alpha + \beta i$ auf dieselbe Form $A + Bi$ gebracht werden. Wir wollen die übrigen Functionen von $\alpha + \beta i$ in dieser Beziehung auch untersuchen.

8. Es ist

$$(\alpha+\beta i)^n = \varrho^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n\ (6.)$$
$$= \varrho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = A + Bi\ (3.),$$

von derselben Form.

$$\cos\varphi = \frac{e^{\varphi i} + e^{-\varphi i}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{e^{\varphi}}{}$$

$$\tang\varphi = \frac{e^{2\varphi i} - 1}{i(e^{2\varphi i}+1)}, \quad \cot\varphi = \frac{1 + }{i(1-e}$$

Das Imaginäre hebt ſich hier bei der E

Obige Formel giebt aber auch:

$$\log n(\cos\varphi \pm i\sin\varphi) = \pm$$

Alſo

$$\log(\alpha+\beta i) = \log|\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$
$$= \log\varrho + \log(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$
$$= \log\varrho + M\varphi i$$
$$= \log\sqrt{\alpha^2+\beta^2} + Mi\,\mathrm{Arc}\cos\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+}}$$
$$= \log\sqrt{\alpha^2+\beta^2} + Mi\,\mathrm{Arc}\sin\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta}}$$

wo M den Modulus des logarithmiſchen net. Alſo auch

$$\log(\alpha+\beta i) = A + Bi.$$

10. Da überhaupt $p^q = e^{\log n p^q} =$ ſetze man

$$(\alpha \pm \beta i)^{a+bi} = e^{(a+bi)\log n(\alpha\pm\beta i)}$$

$$\cos(\beta i) = \frac{e^{\beta} + e^{-\beta}}{2}, \quad \sin(\beta i) = -\frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{2i} \quad (9.);$$

$$\sin(\alpha + \beta i) = \frac{(e^{\beta} + e^{-\beta})\sin\alpha}{2} + \frac{i(e^{\beta} - e^{-\beta})\cos\alpha}{2} = A + Bi$$

12. Ganz eben ſo erhält man

$$\cos(\alpha + \beta i) = \frac{(e^{\beta} + e^{-\beta})\cos\alpha}{2} - \frac{i(e^{\beta} - e^{-\beta})\sin\alpha}{2} = A + Bi$$

13. $\sin\text{vers}(\alpha + \beta i) = 1 - \cos(\alpha + \beta i)$
$= 1 - (A' + B'i)$ (12.) $= A + Bi.$

$\cos\text{vers}(\alpha + \beta i) = 1 - \sin(\alpha + \beta i)$
$= 1 - (A' + B'i)$ (11.) $= A + Bi.$

14. $\tan(\alpha + \beta i) = \frac{\sin(\alpha + \beta i)}{\cos(\alpha + \beta i)}$
$= \frac{A' + B'i}{A'' + B''i}$ (11. 12.) $= A + Bi$ (7.)

$\cot(\alpha + \beta i) = \frac{\cos(\alpha + \beta i)}{\sin(\alpha + \beta i)}$
$= \frac{A' + B'i}{A'' + B''i}$ (11. 12.) $= A + Bi$ (7.).

15. $\sec(\alpha + \beta i) = \frac{1}{\cos(\alpha + \beta i)}$
$= (A' + B'i)^{-1}$ (12.) $= A + Bi$ (8.)

$\operatorname{cosec}(\alpha + \beta i) = \frac{1}{\sin(\alpha + \beta i)}$
$= (A' + B'i)^{-1}$ (11.) $= A + Bi$ (8.).

16. Sei nun ferner $\operatorname{Arc}\cos(\alpha + \beta i)$ gegeben. Es iſt (9.)

$$e^{\varphi i} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Folglich, für $\varphi = \operatorname{Arc}\cos x$:

$$e^{i\operatorname{Arc}\cos x} = x + i\sqrt{1 - x^2},$$

$$i\operatorname{Arc}\cos x = \log n\,(x + i\sqrt{1 - x^2}),$$

$$i\operatorname{Arc}\cos(\alpha + \beta i) = \log n(\alpha + \beta i + i\sqrt{1 - \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta i})$$
$$= \log n\,(\alpha + \beta i + i(a + bi)) \quad (8.)$$
$$= \log n\,(\alpha - b + (a + \beta)i) = a' + b'i \quad (9.)$$
$$\operatorname{Arc}\cos(\alpha + \beta i) = b' - a'i = A + Bi.$$

17. In dem beſondern Falle, wo $\beta = 0$ iſt, hat man:

$$i\operatorname{Arc}\cos\alpha = \log n\,(\alpha + i\sqrt{1 - \alpha^2})$$

woraus ſich für $\alpha = \pm 1$ ergiebt:

eine reelle Größe. Ist nun
$\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}$ offenbar positiv

$$\text{Arc cos}\,\alpha = -i\log n(\alpha - \sqrt{}$$
$$= \quad i\log n(\alpha + \sqrt{}$$
$$= i|\log n(\alpha + \sqrt{\alpha^2}$$
$$= \mp 2k\pi + i\log n(\alpha$$

Ist dagegen α negativ; so
$\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}$ negative Größe
dem Obigen:

$$\text{Arc cos}\,\alpha = i\log n(\alpha + \sqrt{\alpha^2 -}$$
$$= i|\log n(-\alpha - \sqrt{}$$
$$= \mp(2k+1)\pi + i$$

wo nun $-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}$ posi
für $\alpha > 1$ immer eine imaginä
$A + Bi$ ist.

18. Da immer

$$\text{Arc sin}\,x = \tfrac{1}{2}\pi -$$

so ist auch

$$\text{Arc sin}(\alpha + \beta i) = \tfrac{1}{2}\pi - \text{Arc c}$$

$$\text{Arc}\sin\alpha = \tfrac{1}{2}\pi \pm (2k+1)\pi - i\log n\left(-\alpha - \sqrt{\alpha^2-1}\right)$$
$$= \frac{(1\pm 2(2k+1))\pi}{2} - i\log n\left(-\alpha - \sqrt{\alpha^2-1}\right),$$

welches also auch immer imaginär und von der Form $A + Bi$ ist.

19. Cauchy in seinem trefflichen Cours d'Analyse de l'école polyt. T. I. Paris. 1821. p. 323. entwickelt $\text{Arc}\cos(\alpha+\beta i)$ auf folgende Art. Sei

$$\text{Arc}\cos(\alpha+\beta i) = x + yi,$$
$$\cos(x+yi) = \alpha + \beta i,$$
$$\cos x\cos(yi) - \sin x\sin(yi) = \alpha + \beta i,$$
$$\frac{e^y + e^{-y}}{2}\cos x - \frac{e^y - e^{-y}}{2}\sin x \,.\, i = \alpha + \beta i,$$
$$\frac{e^y + e^{-y}}{2}\cos x = \alpha,\quad \frac{e^y - e^{-y}}{2}\sin x = -\beta;$$
$$e^y = \frac{\alpha}{\cos x} - \frac{\beta}{\sin x},\quad e^{-y} = \frac{\alpha}{\cos x} + \frac{\beta}{\sin x};$$
$$e^y \times e^{-y} = 1 = \frac{\alpha^2}{\cos x^2} - \frac{\beta^2}{\sin x^2},$$
$$\sin x^4 - (1 - \alpha^2 - \beta^2)\sin x^2 - \beta^2 = 0,$$
$$\sin x^2 = \frac{1-\alpha^2-\beta^2}{2} + \sqrt{\left\{\left(\frac{1-\alpha^2-\beta^2}{2}\right)^2 + \beta^2\right\}}$$
$$\cos x^2 = \frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2} - \sqrt{\left\{\left(\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2}\right)^2 - \alpha^2\right\}}$$
$$= \frac{\alpha^2}{\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2} + \sqrt{\left\{\left(\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2}\right)^2 - \alpha^2\right\}}}.$$

Folglich

$$x = \text{Arc}\cos\frac{\alpha}{\left\{\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2} + \sqrt{\left[\left(\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2}\right)^2 - \alpha^2\right]}\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

und wenn wir diesen Werth $= A$ setzen:

$$y = \log n\left(\frac{\alpha}{\cos A} - \frac{\beta}{\sin A}\right) = B,$$
$$\text{Arc}\cos(\alpha+\beta i) = A + Bi.$$

Ueber diesen Ausdruck ist aber Folgendes zu bemerken. Für $\beta = 0$ wird $A = \text{Arc}\cos\alpha$, $B = 0$, also

$$\text{Arc}\cos\alpha = \text{Arc}\cos\alpha.$$

Ist β nicht $= 0$; so folgt aus der Form des Ausdruckes für $\cos A$ leicht, daß derselbe < 1, A also eine

$$\frac{\alpha}{\cos A} - \frac{\beta}{\sin A}$$

nur von dem erſten Gliede abhängt. Differenz immer poſitiv, ihr natürlicher L B, alſo immer möglich ſey, nehme man druck für cos A, welches wegen der Q Nenner verſtattet iſt, poſitiv oder negati poſitiv oder negativ iſt. Dann giebt obi Arc cos $(\alpha + \beta i)$ immer einen Ausdruc $A + Bi$, wenn β nicht $= o$ iſt. Arcs ſtattet eine ganz ähnliche Behandlung.

20. Ferner iſt Arc sin v$(\alpha+\beta i) =$ Arc $=$ Arc cos $(\alpha'+\beta' i) = A + Bi$ (16.); A $=$ Arc sin $(1 - \alpha - \beta i) =$ Arc sin $A + Bi$ (18.)

21. Arc tang $(\alpha + \beta i) =$ Arc sin $\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{1+(\alpha+}}$

$$= \text{Arc sin} \frac{\alpha + \beta i}{\sqrt{1 + \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta i}}$$

$$= \text{Arc sin} \frac{\alpha + \beta i}{\sqrt{\alpha' + \beta' i}} = \text{Arc sin} \frac{\alpha+}{\alpha'}$$

. Nach dem Bisherigen kann also jede einfache
on der Größe $\alpha + \beta i$ auf dieselbe Form gebracht
. Da nun unter $\alpha + \beta i$ auch alle reelle Größen
:n sind, wenn $\beta = 0$ gesetzt wird; so kann auch
fache Function einer reellen Größe auf die Form
i gebracht werden, wo B nothwendig verschwinden
venn die in Rede stehende Function reell ist, aber
= o seyn wird, wenn diese Function imaginär ist,
3. oben bei Arc cos α und Arc sin α, jenachdem α
i — 1 und + 1 enthalten, oder rücksichtlich seines
:n Werthes > 1 ist. Man sieht also hieraus, daß
r auf die in der Analysis vorkommenden Functionen
de imaginäre Ausdruck auf die Form A + Bi brin-
t, da nach dem Obigen offenbar auch alle Verbin-
der einfachen Functionen von $\alpha + \beta i$ auf diese
ebracht werden kann. Obiges ist freilich nur ein
durch Induction. Wer einen allgemeinen Beweis
Satz, daß jede imaginäre Größe auf die Form
i gebracht werden kann, führen wollte, müßte
n, wie es uns scheint, aus der gleich zu Anfange
Artikels gegebenen Erklärung imaginärer Größen
anz allgemeine Schlüsse abzuleiten suchen. Meh-
ıthematiker haben sich mit diesem Beweise beschäftigt,
n Versuch scheint mir, in Bezug auf die so eben
rochene Forderuug an einen solchen Beweis, völlig
n. Die obige Induction, vorzüglich in Verbindung
eisgrößen, gehört dem Wesentlichen nach Euler
. de Berlin. 1749.). Außerdem sind besonders
erwähnen: D'Alembert (Mém. de Berlin.
Opuscules mathém. T. V.), Fuß (Acta
p. 1781. P. 2.), Canterzani (Mém. della
tal. T. II. P. 2.), Foncenex (Misc. Soc.
in. T. I.), Fontana (Mém. della Soc.
:. VIII.), Cossali und Riccati das. T. IX. T. IV.
'air (Philos. Transact. 1778.). $(\alpha+\beta i)^{a+bi}$
Form A + Bi zu bringen zeigt auch D'Alembert
den Reflexions sur la cause des vents.
., mittelst der Differentialrechnung. Auch s. m.

für $k = 0$ reduciren ſich aber wieder den einen Werth Φ. Die Anzahl all $= 2\nu + 1 = n$, wie es ſeyn muß.

26. Wenn $\beta = 0$, $\alpha + \beta i$ alſo Größe iſt; ſo ſind zwei Fälle zu unterſ α poſitiv oder negativ iſt, indem mar $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ immer poſitiv nimmt. ſo hat man $\varrho = \alpha$, $\cos\varphi = 1$, sin

$\cos\frac{m\varphi}{n} = 1$, $\sin\frac{m\varphi}{n} = 0$, $\Phi = (\alpha$

$$((\alpha))^{\frac{m}{n}} = \alpha^{\frac{m}{n}}\left(\cos\frac{2k\pi}{n} \pm i\sin\right.$$

wo $\alpha^{\frac{m}{n}}$ eine reelle Größe iſt, und $k \leqq \frac{1}{2}n$

Folglich auch unter derſelben Bedingung:

$$((+1))^{\frac{m}{n}} = \cos\frac{2k\pi}{n} \pm i\sin\frac{2k\pi}{n}.$$

Iſt aber α negativ; ſo erhält man, $\sqrt{}$ poſitiv nehmend, $\varrho = -\alpha$, $\cos\varphi =$ $\varphi = \pi$. Folglich

nach (2.), da man

$$\cos\frac{2k\pi}{n} \pm i\sin\frac{2k\pi}{n} = \cos\frac{\pm 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\pm 2k\pi}{n}$$

ſetzen kann. Die obern und untern Zeichen beziehen ſich auf einander. Nach dem Obigen iſt $k \lessgtr \frac{1}{2}n$, $2k \lessgtr n$ zu nehmen. Alſo hat man folgende Werthe von $((\alpha))^{\frac{1}{n}}$:

$$(-\alpha)^{\frac{1}{n}}.\left(\cos\frac{-\pi}{n} - i\sin\frac{-\pi}{n}\right)$$

$$(-\alpha)^{\frac{1}{n}}.\left(\cos\frac{\pi}{n} \pm i\sin\frac{\pi}{n}\right)$$

. . . . . .

$$(-\alpha)^{\frac{1}{n}}.\left(\cos\frac{(2k-1)\pi}{n} \pm i\sin\frac{(2k-1)\pi}{n}\right)$$

$$(-\alpha)^{\frac{1}{n}}.\left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}\right),$$

wo $2k \lessgtr n$. Nach (25.) ſind die folgenden Werthe bloß wiederkehrend. Der erſte Werth iſt mit beizufügen, da im Obigen auch $2k = 0$ geſetzt werden kann. Es iſt aber

$$\cos\frac{-\pi}{n} - i\sin\frac{-\pi}{n} = \cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n},$$

ſo daß alſo der erſte Werth auch wiederkehrt. Iſt n eine ungerade, alſo $n+1$ eine gerade Zahl; ſo iſt $2k+1 = n$ zu ſetzen, und der letzte Werth wird $= -(-\alpha)^{\frac{1}{n}}$, die Anzahl aller Werthe offenbar $= 2k+1 = n$, wie es ſeyn muß. Iſt aber n gerade, alſo $n+1$ ungerade, ſo muß man nach dem Obigen $2k+1 = n+1$ ſetzen. Dann wird der letzte Werth $=$

$$(-\alpha)^{\frac{1}{n}}.\left(\cos\frac{(n+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(n+1)\pi}{n}\right)$$

$$= (-\alpha)^{\frac{1}{n}}.\left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{n}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{n}\right)\right)$$

$$= (-\alpha)^{\frac{1}{n}}.\left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{n}\right) - i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{n}\right)\right)$$

$$= (-\alpha)^{\frac{1}{n}}.\left(\cos\frac{(n-1)\pi}{n} - i\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$$

$$= (-\alpha)^{\frac{1}{n}}.\left(\cos\frac{(2k-1)\pi}{n} - i\sin\frac{(2k-1)\pi}{n}\right)$$

... folgt. Also (5.)

$$((\alpha))^{\frac{m}{n}} = (-\alpha)^{\frac{m}{n}} \cdot \left(\cos\frac{(2k+1)m\pi}{n} \pm i\right.$$

Folglich auch

$$((-1))^{\frac{m}{n}} = \cos\frac{(2k+1)m\pi}{n} \pm i \sin$$

für $\overline{\overline{<}}\ \frac{1}{2}(n-1)$.

M. v. Cotesischer Lehrsatz u
der Geometrie auf die Algebr

27. Nach (9.) ist, wenn die na
men bloß durch l bezeichnet werden:

$$l((\alpha+\beta i)) =$$

$$\tfrac{1}{2}l(\alpha^2+\beta^2) + i\,\mathrm{Arc}\cos\left(\left(\frac{}{\sqrt{\alpha}}\right.\right.$$

$$= \tfrac{1}{2}l(\alpha^2+\beta^2) + i\,\mathrm{Arc}\sin\left(\left(\frac{}{\sqrt{\alpha^2}}\right.\right.$$

wo $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ immer positiv genommen
Zeichen des Cosinus und Sinus von α
Auch ist

$$\mathrm{tang}\,\mathrm{Arc}\cos\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Ist aber α, folglich auch der Cosinus negativ; so hat die Tangente $\frac{\beta}{\alpha}$ das entgegengesetzte Zeichen des Sinus, und es ist folglich

$$\text{Arc cos}\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \pi + \text{Arc tang}\frac{\beta}{\alpha},$$

wenn, wie gesagt, hier immer die möglichst kleinsten Werthe der Bogen genommen werden. Aber

$$\text{Arc cos}\left(\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)\right) = \text{Arc cos}\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \pm 2k\pi,$$

Also, wenn α positiv ist:

$$l((\alpha+\beta i)) =$$

$$\tfrac{1}{2}l(\alpha^2+\beta^2) + i\,\text{Arc tang}\frac{\beta}{\alpha} \pm 2k\pi i;$$

und, wenn α negativ ist:

$$l((\alpha+\beta i)) =$$

$$\tfrac{1}{2}l(\alpha^2+\beta^2) + i\,\text{Arc tang}\frac{\beta}{\alpha} \pm (2k\pm 1)\pi i;$$

oder, da sowohl $2k+1$, als auch $2k-1$ irgend eine ungerade Zahl bezeichnet:

$$l((\alpha+\beta i)) =$$

$$\tfrac{1}{2}l(\alpha^2+\beta^2) + i\,\text{Arc tang}\frac{\beta}{\alpha} \pm (2k+1)\pi i.$$

Für $\beta = 0$ also, wenn α positiv:

$$l((\alpha)) = l\alpha \pm 2k\pi i.$$

Ist α negativ; so ist doch α^2 positiv, $= (-\alpha)^2$. Folglich

$$\tfrac{1}{2}l\alpha^2 = \tfrac{1}{2}l(-\alpha)^2 = l(-\alpha),$$

wo nun $-\alpha$ positiv. Also

$$l((\alpha)) = l(-\alpha) \pm (2k+1)\pi i.$$

Jeder Logarithmus hat also unendlich viele Werthe, die für imaginäre und negative Größen alle, für positive Größen dagegen alle bis auf einen, welchen man erhält, wenn man $2k = 0$ setzt, unmöglich sind. Nach (17.) kann man diese Formeln auch so darstellen. Wenn α positiv:

$$l((\alpha+\beta i)) =$$

$$\tfrac{1}{2}l(\alpha^2+\beta^2) + i\,\text{Arc tang}\frac{\beta}{\alpha} + l((+1)),\ l((\alpha)) = l\alpha + l((+1));$$

und für $k = o$ z. B.

$$li = \frac{\pi i}{2}, \ \pi = \frac{2li}{i},$$

eine nach Montucla (III. p. 285.) vo
gefundene Formel.

29. Aus unsern allgemeinen A
sen sich auch einige vom Grafen Ju
Fagnano und seinem Sohne Je
Fagnano im Journal de litte
que (Montucla a. a. O.) gege
drücke für π ableiten, wobei wir i
wollen. Für $\alpha = 1$ und $\beta =$
$\beta = 1$ ist Arc tang $\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{1}{4}\pi$, u

$$l(1-i) = \tfrac{1}{2}l2 - \tfrac{1}{4}\pi i, \ l(1+i)$$

$$l\left(\frac{1-i}{1+i}\right) = -\tfrac{1}{2}\pi i, \ il\left(\frac{1-i}{1+i}\right)$$

Folglich, wenn man im Zähl
$1-i$ multiplicirt.

$$\tfrac{1}{2}\pi = il(-i).$$

ieraus findet man:

$$i^i = 0{,}207879\ldots, \quad \frac{1}{i^i} = 4{,}81049\ldots.$$

31. Setzt man in den Formeln (11. 12.) $\alpha = \pi \pm \frac{1}{2}\pi$, und $\alpha = k'\pi$; so erhält man, da im ersten alle $\cos\alpha$, im andern $\sin\alpha = 0$ ist:

$$\sin(2k\pi \pm \tfrac{1}{2}\pi + \beta i) = \pm\frac{e^{\beta} + e^{-\beta}}{2},$$

$$\cos(k'\pi + \beta i) = \pm\frac{e^{\beta} + e^{-\beta}}{2},$$

$$2k\pi \pm \tfrac{1}{2}\pi + \beta i = \text{Arc sin}\left(\left(\pm\frac{e^{\beta} + e^{-\beta}}{2}\right)\right),$$

$$k'\pi + \beta i = \text{Arc cos}\left(\left(\pm\frac{e^{\beta} + e^{-\beta}}{2}\right)\right),$$

daß es also scheint, als könnten reelle Sinus und Cosinus imaginäre Bogen haben. Es ist aber

$$\frac{e^{\beta} + e^{-\beta}}{2} = \frac{1 + e^{2\beta}}{2e^{\beta}} = \frac{1 + e^{-2\beta}}{2e^{-\beta}},$$

also immer $= \frac{1 + e^{2\gamma}}{2e^{\gamma}}$. Da nun $(a-1)^2 = a^2 + 1 - 2a$, also immer positiv, d. i. $1 + a^2$ immer $> 2a$ ist; so ist obiger Bruch immer > 1. Also können die obigen, scheinbar reellen, Sinus und Cosinus im Kreise nicht existiren.

Verbindung der Lehre von den unmöglichen Größen mit der Theorie der Gleichungen.

32. Die Theorie der Gleichungen beruht ganz auf dem Satze, daß es für jede Gleichung immer wenigstens eine reelle oder imaginäre Wurzel gebe, welches von Kästner (Anal. endl. Größen. 210.) noch als Grundsatz angenommen wird. Die neuern Mathematiker haben sich aber bemüht, genügende Beweise dieses Satzes zu finden, und ich werde daher hier den mit der Lehre von den unmöglichen Größen in unmittelbarer Verbindung stehen-

ſo wird, da auch jede reelle Größe u
enthalten iſt, der Beweis darauf a
zeigt, daß es reelle Werthe von u,
$x = u + vi$ geſetzt, $\psi x = o$ wird
in unſere Gleichung geſetzt; ſo wird
Form:

$$f(u, v) + i.f(u, v)$$

bringen laſſen, ſo daß alſo u, v ſo zu
daß zu gleicher Zeit

$$f(u, v) = o, f(u, v)$$

Dieſe beiden Gleichungen ſind aber öf
u, v ſo beſtimmt werden, daß

$$[f(u, v)]^2 + [f(u, v)]^2$$

iſt. Daß nun dieſe Beſtimmung be
lich iſt, läßt ſich, den erſten Theil letzt
F (u, v) bezeichnend, ſo zeigen.

Man ſetze, welches immer möglich

$$a_0 = \varrho_0(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0) = \varrho$$
$$a_1 = \varrho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = \varrho$$
$$a_2 = \varrho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \varrho$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & \varrho_0 \Phi_0 . r^n \{\cos nt + i \sin nt\} \\
& + \varrho_1 \Phi_1 . r^{n-1} \{\cos(n-1)t + i \sin(n-1)t\} \\
& \qquad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\
& + \varrho_{n-1} \Phi_{n-1} . r \{\cos t + i \sin t\} \\
& + \varrho_n \Phi_n \quad (3.) \\
= \quad & \varrho_0 r^n \{\cos(nt + \varphi_0) + i \sin(nt + \varphi_0)\} \\
& + \varrho_1 r^{n-1} \{\cos((n-1)t + \varphi_1) + i \sin((n-1)t + \varphi_1)\} \\
& \qquad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\
& + \varrho_{n-1} r \{\cos(t + \varphi_{n-1}) + i \sin(t + \varphi_{n-1})\} \\
& + \varrho_n \{\cos \varphi_n + i \sin \varphi_n\} \quad (2.) \\
& \qquad = f(u, v) + i f'(u, v),
\end{aligned}
$$

wo also $f(u, v) =$

$$
\begin{aligned}
& \varrho_0 r^n \cos(nt + \varphi_0) + \varrho_1 r^{n-1} \cos((n-1)t + \varphi_1) \\
& + \cdot\cdot + \varrho_{n-1} r \cos(t + \varphi_{n-1}) + \varrho_n \cos \varphi_n \\
& \qquad f'(u, v) = \\
& \varrho_0 r^n \sin(nt + \varphi_0) + \varrho_1 r^{n-1} \sin((n-1)t + \varphi_1) \\
& + \cdot\cdot + \varrho_{n-1} r \sin(t + \varphi_{n-1}) + \varrho_n \sin \varphi_n .
\end{aligned}
$$

Entwickelt man nun die Quadrate dieſer beiden Größen; ſo erhält man leicht:

$$
\begin{aligned}
F(u, v) = \{f(u, v)\}^2 + \{f'(u, v)\}^2 = \\
r^{2n} . \left\{ \varrho_0^2 + \frac{2\varrho_0 \varrho_1 \cos(t + \varphi_0 - \varphi_1)}{r} \right. \\
\left. + \frac{\varrho_1^2 + 2\varrho_0 \varrho_2 \cos(2t + \varphi_0 - \varphi_2)}{r^2} \right\} . \\
+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot
\end{aligned}
$$

Nach (6.) iſt $r^2 = u^2 + v^2$, alſo $r^{2n} = (u^2 + v^2)^n$, eben ſo wie $F(u, v)$, welches die Summe zweier Quadrate iſt, immer poſitiv. Demnach iſt auch der zweite Factor von $F(u, v)$, immer poſitiv. Läßt man u und v wachſen, ſo wird auch r fortwährend wachſen, und kann größer als jede gegebene Größe werden. Der zweite Factor nähert ſich dann immer mehr und mehr der Größe ϱ_0^2, und kann derſelben beliebig nahe gebracht werden, da offenbar alle einzelnen Brüche durch Vergrößerung von r, d. i. von u und v, (alſo auch ihre Summe, da die Brüche in endlicher Anzahl vorhanden) kleiner gemacht werden können als jede gegebene Größe, immer in Bezug auf die abſoluten Werthe, ohne Rückſicht auf die Vorzeichen. Man hat hierbei zu bemerken, daß die Coſinus in den Zählern die Einheit nie überſteigen können. Da alſo der eine Factor

offenbar, weil ſie nie < 0 werden kann,
beſtimmten Gränze nähern, welche ſie n
A dieſe Gränze, und u_0, v_0 zwei W
welche $F(u, v)$ dieſe Gränze wirklich e

$$F(u_0, v_0) = A.$$

Nach dem Vorhergehenden iſt für jede
$u_0 + \alpha h$, $v_0 + \alpha k$ von u, v immer

$$F(u_0 + \alpha h, v_0 + \alpha k) > F($$

oder die Differenz

$$F(u_0 + \alpha h, v_0 + \alpha k) - F($$

eine poſitive Größe, wie klein m
mag. In der Function $\psi(u + vi)$
Größen u, v die Werthe $u_0 + \alpha h$,
alſo

$$u + vi = u_0 + v_0 i + \alpha (h$$

Mittelſt des binomiſchen Lehrſatzes
$\psi(u + vi)$ nach Potenzen von $\alpha(h +$
daß die Reihe mit $\alpha^0 (h + ki)^0$ a
$\alpha^n (h + ki)^n$ endigt. Die Coefficienten
der, auf die gewöhnliche Form gebracht

$$r_1(\cos t_1 + i \sin t_1) = r_1 T_1$$

$$
\begin{aligned}
= \; & r_1 \{\cos t_1 + i \sin t_1\} \\
& + a r_2 \varrho \{\cos(t_2+\varphi) + i \sin(t_2+\varphi)\} \\
& + a^2 r_3 \varrho^2 \{\cos(t_3+2\varphi) + i \sin(t_3+2\varphi)\} \\
& \cdots\cdots\cdots \\
& + a^n r_{n+1} \varrho^n \{\cos(t_{n+1}+n\varphi) + i \sin(t_{n+1}+n\varphi)\}
\end{aligned}
$$

nach (2. 3.). Also

$$\psi(u_0+v_0 i+a(h+ki)) = T + T'i,$$

wo die Werthe von T, T' in den beiden obigen Vertikalreihen enthalten. Aber

$$
\begin{aligned}
\psi(u_0+v_0 i+a(h+ki)) &= \psi(u_0+ah+(v_0+ak)i) \\
&= f(u_0+ah,\, v_0+ak) + i f'(u_0+ah,\, v_0+ak).
\end{aligned}
$$

Folglich (5^a.):

$$f(u_0+ah,\, v_0+ak) = T,$$
$$f'(u_0+ah,\, v_0+ak) = T'.$$

Also

$$
\begin{aligned}
& F(u_0+ah,\, v_0+ak) = \\
& \{f(u_0+ah,\, v_0+ak)\}^2 + \{f'(u_0+ah,\, v_0+ak)\}^2 \\
&= T^2 + T'^2,
\end{aligned}
$$

woraus für $\alpha = 0$:

$$
\begin{aligned}
F(u_0, v_0) &= (r_1 \cos t_1)^2 + (r_1 \sin t_1)^2 \\
&= r_1^2(\cos t_1^2 + \sin t_1^2) = r_1^2;
\end{aligned}
$$

d. i. $A = r_1^2$, $r_1 = \sqrt{A}$.

Setzen wir nun

$$T = r_1 \cos t_1 + U,\; T' = r_1 \sin t_1 + U';$$

so erhält man

$$
\begin{aligned}
& F(u_0+ah,\, v_0+ak) = \\
& r_1^2 \cos t_1^2 + 2r_1 \cos t_1\, U + U^2 + r_1^2 \sin t_1^2 + 2r_1 \sin t_1\, U' + U'^2 \\
&= r_1^2 + 2r_1(\cos t_1\, U + \sin t_1\, U') + U^2 + U'^2.
\end{aligned}
$$

Folglich, da $r_1^2 = A = F(u_0, v_0)$ ist, nach einigen leichten Entwickelungen:

$$
\begin{aligned}
& F(u_0+ah,\, v_0+ak) - F(u_0, v_0) \\
&= 2A^{\frac{1}{2}} a\varrho \left\{ \begin{aligned} & r_2 \cos(t_2 - t_1 + \varphi) \\ & + a\varrho r_3 \cos(t_3 - t_1 + 2\varphi) \\ & \cdots\cdots\cdots \\ & + a^{n-1}\varrho^{n-1} r_{n+1} \cos(t_{n+1} - t_1 + n\varphi) \end{aligned} \right\} \\
& + a^2\varrho^2 \left\{ \begin{aligned} & \left[\begin{aligned} & r_2 \cos(t_2+\varphi) + a\varrho r_3 \cos(t_3+2\varphi) + \ldots \\ & \ldots + a^{n-1}\varrho^{n-1} r_{n+1} \cos(t_{n+1}+n\varphi) \end{aligned}\right]^2 \\ & + \left[\begin{aligned} & r_2 \sin(t_2+\varphi) + a\varrho r_3 \sin(t_3+2\varphi) + \ldots \\ & \ldots + a^{n-1}\varrho^{n-1} r_{n+1} \sin(t_{n+1}+n\varphi) \end{aligned}\right]^2 \end{aligned} \right\},
\end{aligned}
$$

$$+ \left[\alpha^{m-1} \varrho^{m-1} r_{m+1} \sin(t_{m+1} + \right.$$

$$= \alpha^{2m} \varrho^{2m} . (r_{m+1})^2 .$$

Hat man nun irgend eine Reihe Anzahl von Gliedern

$$A\alpha^a + B\alpha^b + C\alpha^c + \ldots +$$

wo a, b, c, ... n wachſende poſitive ſo kann man immer α ſo klein nehmen, die abſoluten Werthe:

$$A\alpha^a > B\alpha^b + C\alpha^c + \ldots +$$

Denn ſey F der größte Coefficient der ſo ſetze man zunächſt für α einen ächten B

$$F\alpha^{b-a} \geqq B\alpha^{b-a},$$

$$F\alpha^{b-a} > C\alpha^{c-a},$$

$$\ldots\ldots$$

$$F\alpha^{b-a} > N\alpha^{n-a};$$

alſo, wenn die Anzahl der Glieder der $= k$ iſt:

$$kF\alpha^{b-a} > B\alpha^{b-a} + C\alpha^{c-a} + \ldots .$$

daß alſo immer $A\alpha^d$ größer als das Aggregat aller fol-
enden Glieder gemacht werden kann, und folglich das
eichen von

$$Aa^a + Ba^b + Ca^c + \ldots + Na^n$$

ur von $A\alpha^d$ abhängt.

Alſo kann man in Bezug auf das Obige α immer ſo
ein nehmen, daß das Zeichen von

$$F(u_0 + \alpha h, v_0 + \alpha k) - F(u_0, v_0);$$

enn A nicht $= 0$ iſt, nur von

$$2A^{\frac{1}{2}} \alpha^m \varrho^m r_{m+1} \cos(t_{m+1} - t_1 + m\varphi);$$

enn $A = 0$ iſt, nur von

$$\alpha^{2m} \varrho^{2m} . (r_{m+1})^2$$

hängt. Da nun in der Gleichung

$$h + ki = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

k ganz willkührliche Größen ſind; ſo kann offenbar auch
r Bogen φ jeden Werth erhalten. Man erhält nämlich
s dieſer Gleichung leicht:

$$\varrho^2 = h^2 + k^2, \quad \text{tang}\varphi = \frac{k}{h};$$

raus umgekehrt:

$$h = \frac{\varrho}{\sqrt{1 + \text{tang}\varphi^2}}, \quad k = \frac{\varrho\,\text{tang}\varphi}{\sqrt{1 + \text{tang}\varphi^2}},$$

daß man alſo ϱ, φ ganz willkührlich annehmen, und
raus h, k beſtimmen kann. Folglich wird ſich φ leicht
annehmen laſſen, daß

$$\cos(t_{m+1} - t_1 + m\varphi);$$

ſo auch, unabhängig von α,

$$2A^{\frac{1}{2}} \alpha^m \varrho^m r_{m+1} \cos(t_{m+1} - t_1 + m\varphi);$$

ıd demnach, bei hinreichender Kleinheit von α,

$$F(u_0 + \alpha h, v_0 + \alpha k) - F(u_0, v_0)$$

gativ wird. Dieſe Differenz iſt aber immer poſitiv, wie
ir oben geſehen haben. Alſo kann auch

$$2A^{\frac{1}{2}} \alpha^m \varrho^m r_{m+1} \cos(t_{m+1} - t_1 + m\varphi)$$

cht das Glied ſeyn, von welchem bei hinreichender Kleinheit
n α ihr Zeichen abhängt. Dieſes Glied würde aber durch
rſtehende Formel ausgedrückt werden, wenn A nicht $= 0$

Wurzel der Gleichung

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x$$

Wären $r_1, r_2, r_3, \ldots r_{n+1}$ all
nach dem Obigen

$$\psi(u_0 + v_0 i + \alpha(h + ki)) = \psi(u_0 +$$

für jedes α, h, k, $= 0$; folglich $\psi($
u, v, $= 0$, d. i. es wäre ψx identiſc

34. Wir wollen nun den Fall, wo
der gegebenen Gleichung mögliche Gr
näher betrachten. Zuerſt erhellet le
$u_0 + v_0 i$ eine Wurzel der Gleichung i
Falle auch immer $u_0 - v_0 i$ eine Wurz
nämlich

$$u_0 + v_0 i = \varrho(\cos\varphi + i \sin$$

ſo iſt

$$u_0 = \varrho\cos\varphi, \; v_0 = \varrho\sin\varphi,$$
$$u_0 - v_0 i = \varrho(\cos\varphi - i \sin$$

Da nun $u_0 + v_0 i$ eine Wurzel unſ
ſo iſt

$$+ a_{n-1}\varrho\left|\cos\varphi + i\sin\varphi\right| + a_n = \Phi + \Phi' i .$$

Da alle Coefficienten, also auch Φ, Φ', reelle Größen sind; so ist

$$\Phi = 0, \quad \Phi' = 0 .$$

Folglich auch $\Phi - \Phi' i = 0$, d. i.

$$\begin{aligned} 0 = {} & a_0\varrho_n\left|\cos n\varphi - i\sin n\varphi\right| \\ & + a_1\varrho^{n-1}\left|\cos(n-1)\varphi - i\sin(n-1)\varphi\right| \\ & \quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ & + a_{n-1}\varrho\left|\cos\varphi - i\sin\varphi\right| \\ & + a_n \\ = {} & a_0\varrho_n(\cos\varphi - i\sin\varphi)^n \\ & + a_1\varrho_{n-1}(\cos\varphi - i\sin\varphi)^{n-1} \\ & \quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ & + a_{n-1}\varrho(\cos\varphi - i\sin\varphi) \\ & + a_n \end{aligned}$$

$$= a_0(u - vi)^n + a_1(u - vi)^{n-1} + \ldots + a^{n-1}(u - vi) + a^n ;$$

also $u - vi$ eine Wurzel der gegebenen Gleichung. Die imaginären Wurzeln sind folglich, wenn alle Coefficienten mögliche Größen sind, immer paarweise, also immer in gerader Anzahl vorhanden, und immer von der Form $u \pm vi$.

35. Es erhellet leicht, daß für jedes a:

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = x^{n-1} + x^{n-2}a + \ldots + xa^{n-2} + a^{n-1}$$

eine ganze rationale Function des $(n-1)$ten Grades von x ist. Die Wurzel, welche es für die Gleichung $\psi x = 0$ wenigstens immer geben muß (33.), sey $u_0 + v_0 i$; so ist

$$\psi x = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

$$0 = a_0(u_0 + vi)^n + a_1(u_0 + v_0 i)^{n-1} + \ldots + a^{n-1}(u_0 + v_0 i) a_n$$

woraus durch Subtraction, und beiderseitige Division durch $x - u_0 - v_0 i$:

$$\frac{\psi x}{x - u_0 - v_0 i} = \frac{a_0\left|x^n - (u_0 + v_0 i)^n\right|}{x - u_0 - v_0 i} + \frac{a_1\left|x^{n-1} - (u_0 + v_0 i)^{n-1}\right|}{x - u_0 - v_0 i} + \ldots + \frac{a_{n-1}\left|x - (u_0 + v_0 i)\right|}{x - u_0 - v_0 i} .$$

$$\psi_1 x = (x - u_1 - v_1 i)\psi_2$$

. . . . . .

$$\psi_{n-1} x = (x - u_{n-1} - v_{n-1} i)\psi$$

wo $\psi_n x$ eine Function des oten Grades
ſtante Größe $= C$, iſt. Alſo

$$\psi x = C(x-u_0-v_0 i)(x-u_1-v_1 i)\ldots(x$$

ſo daß ſich alſo jede ganze rationale F
Grades in n Factoren von der Form x-
läßt. Die erſten Glieder auf der linken
ſind $a_0 x^n$ und Cx^n. Da nun offenbar
gen identiſch ſeyn müſſen; ſo iſt

$$\psi x = a_0(x-u_0-v_0 i)(x-u_1-v_1 i)\ldots($$

36. Dieſe Zerlegung in Factoren iſt
zige Art möglich. Wäre nämlich auch

$$\psi x = a_0(x-y_0-z_0 i)(x-y_1-z_1 i)\ldots($$

ſo wäre

$$(x-u_0-v_0 i)(x-u_1-v_1 i)\ldots(x-u_n-$$
$$= (x-y_0-z_0 i)(x-y_1-z_1 i)\ldots$$

Das erſte Product wird $= 0$ fü
Für denſelben Werth von x muß alſo au
duct, folglich für dieſen Werth von x ei
$= 0$ werden. Sey z. B. $x - y_0 -$
ſo iſt alſo

aus durch ähnliche Schlüsse nach und nach die Gleich, aller Factoren abgeleitet wird.

37. Da das Product

$$(x-u_0-v_0i)(x-u_1-v_1i)\ldots(x-u_{n-1}-v_{n-1}i)$$

› wird, wenn man dem x einen der Werthe

$$u_0+v_0i,\ u_1+v_1i,\ \ldots,\ u_{n-1}+v_{n-1}i$$

gt; so sind alle diese Größen Wurzeln der Gleichung $=0$. Also hat jede Gleichung des nten Grades n :zeln, unter denen indeß auch vielleicht einige gleiche ›mmen können. Mehr als n Wurzeln kann aber keine chung des nten Grads haben, weil sonst die Zerlegung function ψx in n Factoren von der Form $x-u-vi$ mehr als eine Art möglich seyn müßte (35.), welches (36.) unstatthaft ist.

38. Sind alle Coefficienten der Gleichung $\psi x=0$ iche Größen; so sind die imaginären Wurzeln, wenn es i giebt, immer paarweise, wie $u_0 \pm v_0 i$ (34.), also die imaginären Factoren von ψx immer paarweise, wie

$$x-u_0 \mp v_0 i$$

inden. Setzen wir nun

$$u_0 \pm v_0 i = \varrho(\cos\varphi \pm i\sin\varphi);$$

$$\begin{aligned}(x-u_0-v_0i)(x-u_0+v_0i)&=(x-\varrho\cos\varphi-\varrho i\sin\varphi)(x-\varrho\cos\varphi+\varrho i\sin\varphi)\\&=(x-\varrho\cos\varphi)^2-\varrho^2i^2\sin\varphi^2\\&=x^2-2x\varrho\cos\varphi+\varrho^2\cos\varphi^2+\varrho^2\sin\varphi^2\\&=x^2-2x\varrho\cos\varphi+\varrho^2\end{aligned}$$

:eelle Function des zweiten Grades. Hieraus ergiebt der für die Algebra überaus wichtige Satz, daß ganze reelle Function irgend eines Grades immer in r reelle Factoren des ersten oder zweiten Grades, e letztere von der Form $x^2-2x\varrho\cos\varphi+\varrho^2$, oder $-2xu_0+{u_0}^2+{v_0}^2$ sind, zerlegt werden kann. n in dem Art. Gleichung. (155. ff.) ist von diesem gehandelt, aber auf eine sehr ungenügende Art. Der nach Cauchy geführte Beweis hängt zu eng mit der :ie der imaginären Größe zusammen, als daß er an andern Orte hätte vorgetragen werden können. In Zusätzen zu diesem Werke werde ich bei dem Art.

... also hat auch eine G
raden Grades immer wenigstens ein
Sind bei einer Gleichung eines gerade
zeln imaginär; so muß das letzte Glie
Falle nach (35.) offenbar das Produ
nothwendig positiv seyn, weil im
von der Form $u_0 \pm v_0 i$ vorkomme
$= u_0^2 + v_0^2$, also jederzeit positi
einer Gleichung eines geraden Grade
gativ; so muß sie wenigstens eine r
Mehr über die imaginären Wurzeln i
Art. Gleichung.

Anwendung der imaginäre
der Summirung der

40. Cauchy handelt im 9ten Ka
ten Werkes sehr ausführlich von den
Um eine Anwendung der unmöglichen
lysis zu zeigen, theilen wir hier da
ten Beweis der Reihen für sin x und
Art. Cyclometrie diese Reihen nur ...

Für $x = o$ erhält man:

$$fy = fo \cdot fy, \quad fo = 1,$$

so daß also $fx = 1$ für $x = o$. Da nun fx zwischen jeden zwei reellen Gränzen von x continuirlich bleiben soll, und diese Function für $x = o$ den positiven Werth 1 erhält; so muß sie in der Nähe dieses Werthes, d. h. für ein sehr kleines α, zwischen den Gränzen $x = o$, $x = \alpha$, immer positiv seyn. Sey nun allgemein

$$fx = \psi x + i\psi' x,$$

so wird für $x = o$:

$$1 = \psi o + i\psi' o, \quad \psi o = 1, \quad \psi' o = o.$$

Auch ist

$$f\alpha = \psi\alpha + i\psi'\alpha,$$

und, wenn man, welches bekanntlich immer möglich ist (6.):

$$f\alpha = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

setzt:

$$\varrho\cos\varphi = \psi\alpha, \quad \varrho\sin\varphi = \psi'\alpha \quad (5^a.);$$

$$\varrho = \sqrt{(\psi\alpha)^2 + (\psi'\alpha)^2}, \quad \varphi = \text{Arc tang}\frac{\psi'\alpha}{\psi\alpha}.$$

42. Man hat nun nach der Bedingung:

$$fx = fx,$$
$$f(x+x') = fx \cdot fx',$$
$$f(x+x'+x'') = f(x+x') \cdot fx'' = fx \cdot fx' \cdot fx'',$$
$$f(x+x'+x''+x''') = f(x+x'+x'') \cdot fx''' = fx \cdot fx' \cdot fx'' \cdot fx''',$$

u. s. w. u. s. w.

folglich für $x = x' = x'' = \ldots$

$$f(mx) = (fx)^m, \quad f(m\alpha) = (f\alpha)^m$$
$$= \varrho^m(\cos\varphi + i\sin\varphi)^m = \varrho^m(\cos m\varphi + i\sin m\varphi),$$

für jedes ganze positive m.

Für $x = x' = \frac{1}{2}\alpha$ erhält man leicht:

$$(f(\tfrac{1}{2}\alpha))^2 = f\alpha = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$f(\tfrac{1}{2}\alpha) = \varrho^{\frac{1}{2}}(\cos\tfrac{1}{2}\varphi + i\sin\tfrac{1}{2}\varphi) \quad (3.).$$

Mehrmalige Anwendung hiervon giebt:

$$f\alpha = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$f(\tfrac{1}{2}\alpha) = \varrho^{\frac{1}{2}}(\cos\tfrac{1}{2}\varphi + i\sin\tfrac{1}{2}\varphi)$$

$$f(\tfrac{1}{4}\alpha) = \varrho^{\frac{1}{4}}(\cos\tfrac{1}{4}\varphi + i\sin\tfrac{1}{4}\varphi)$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$f\left(\frac{1}{2^n}\alpha\right) = \varrho^{\frac{1}{2^n}}\left(\cos\frac{1}{2^n}\varphi + i\sin\frac{1}{2^n}\varphi\right).$$

Da nun in (41.) für $x = \mu\alpha$, $y =$

$$f0 = 1 = f(\mu\alpha).f(-\mu\alpha$$

ſo iſt

$$f(-\mu\alpha) = (f(\mu\alpha))^{-1} = \varrho^{-\mu}(\cos(-$$

alſo für jedes m:

$$f(m\alpha) = \varrho^{m}(\cos m\varphi + i\sin m$$

Für jedes reelle x alſo, wenn man m =

$$fx = \varrho^{\frac{x}{\alpha}}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{\alpha}x\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{\alpha}\right.\right.$$

Alſo für $\varrho^{\frac{1}{\alpha}} = a$, $\frac{\varphi}{\alpha} = b$:

$$fx = a^{x}(\cos bx + i\sin bx$$

wo a, b willkührliche Conſtanten ſind, da ϱ es immer iſt.

Hat man nun die beiden Reihen:

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots =$$

$$1 + \frac{y}{\cdot} + \frac{y^2}{\cdot\,\cdot} + \frac{y^3}{\cdot\,\cdot\,\cdot} + \ldots =$$

nach dem binomischen Lehrsatze. Die Exponentialreihen geben dasselbe Resultat. Also

$$XY = 1 + \frac{x+y}{1} + \frac{(x+y)^2}{1.2} + \frac{(x+y)^3}{1.2.3} + \ldots$$

Setzt man ix, iy für x, y; so wird:

$$\left\{1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1..4} - \ldots + i\left(x - \frac{x^3}{1...3} + \frac{x^5}{1..5} - \ldots\right)\right\}$$
$$\times \left\{1 - \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^4}{1..4} - \ldots + i\left(y - \frac{y^3}{1...3} + \frac{y^5}{1..5} - \ldots\right)\right\}$$
$$= 1 - \frac{(x+y)^2}{1.2} + \frac{(x+y)^4}{1...4} - \ldots$$
$$+ i\left\{x+y - \frac{(x+y)^3}{1.2.3} + \frac{(x+y)^5}{1...5} - \ldots\right\}$$

so daß folglich unsere Reihen der Gleichung

$$fx \,.\, fy = f(x+y)$$

genügen. Also ist nach dem Obigen

$$X = a^x(\cos bx + i \sin bx)$$
$$= 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1..4} - \frac{x^6}{1..6} + \ldots$$
$$+ i\left\{x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1..5} - \frac{x^7}{1..7} + \ldots\right\}$$
$$a^x \cos bx = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1..4} - \ldots$$
$$a^x \sin bx = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1..5} - \ldots \quad (5^a.)$$

Setzt man $-x$ für x; so wird

$$a^{-x}\cos(-bx) = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1..4} - \ldots$$

d. i. $a^{-x}\cos(-bx) = a^x \cos bx$.

Aber $\cos(-bx) = \cos bx$. Also $a^{-x} = a^x$, $a^{2x} = 1$, $a = 1$, $a^x = 1$. Folglich

$$\cos bx = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1..4} - \ldots,$$
$$\sin bx = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1..5} - \ldots.$$

Hieraus erhält man:

$$\frac{\sin bx}{x} = 1 - \frac{x^2}{1.2.3} + \frac{x^4}{1...5} - \ldots.$$

Also nähert sich, wenn x abnimmt, $\frac{\sin bx}{x}$ immer mehr der Einheit. Eben so nähert sich offenbar, wenn x ab-

$$\cos x = 1 - \frac{\cdot}{1.2} + \frac{\cdot}{1..4}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{\cdot}{1.}$$

Dieſer ſinnreiche Beweis iſt ein
man durch abſichtliche Einführung in
zu wichtigen reellen Ausdrücken gelan

43. Mehr über die Anwendung d
zu ſagen verbietet die Beſchränktheit
angeführte Werk von Cauchy gewä
che Belehrung. Den Gebrauch der
in der Analyſis überhaupt und beſon
rechnung lehrt Euler in drei beſond
den Nov. Act. Petrop. T. III. T. X.
bekannten Werke über die Integralr
wichtig iſt auch Cauchy Mémoi
grales définies prises en
imaginaires. Paris. 1825.
Anwendung der imaginären Größen
Reihen ſ. m. auch eine Abhandlung
Binomialreihe in Crelle's Jour

Unreine Gleichung, s. Gleichung (4.).

Unsichtbarer vielfacher Punkt (punctum multiplex invisibile), gleichbedeutend, besonders bei ältern Schriftstellern, mit conjugirter Punkt; s. diesen Artikel und vielfacher Punkt (5.).

Unterschied, s. Differenz.

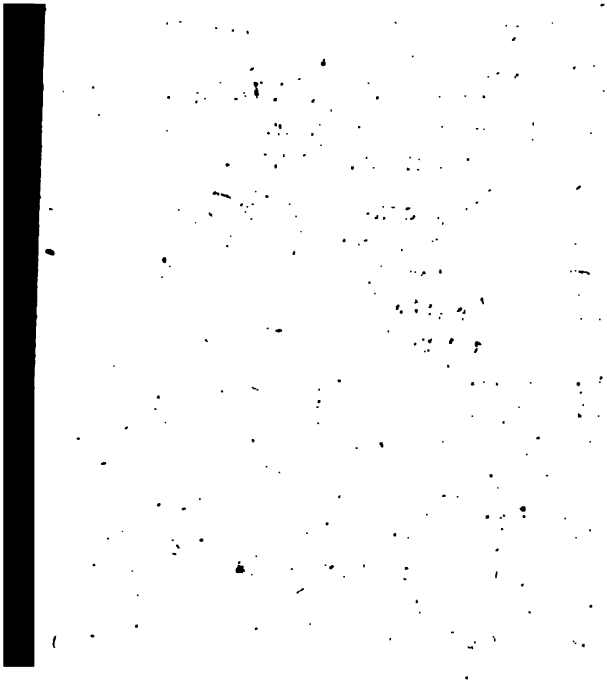
Untheilbar, Methode des Untheilbaren, s. Cavaleri's Methode des Untheilbaren.

Unveränderliche Functionen (fonctions invariables) heißen zuweilen (z. B. in Francoeur Cours complet de Mathématiques pures. éd. 3. T. II. Paris. 1828. p. 114.) die Functionen, welche sonst gewöhnlicher symmetrische Functionen genannt werden; s. diesen Artikel.

Unveränderliche Größe, auch beständige Größe, ist eine solche, welche, während andere Größen ihre Werthe ändern, immer denselben Werth behält. Die unveränderlichen Größen werden durch die erstern lateinischen Buchstaben a, b, c, d, ..., die veränderlichen durch die letztern x, y, z, u, v, ... bezeichnet. In der Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$ des Kreises aus dem Mittelpunkte sind die Coordinaten x, y veränderliche Größen, der Radius r dagegen ist eine unveränderliche Größe, da sein Werth für alle Punkte des Kreises derselbe bleibt. Eben so ist bei der Parabel der Parameter eine unveränderliche, der Radius vector aber z. B. eine veränderliche Größe. Die Axen, die Excentricität, der Parameter der Ellipse und Hyperbel sind unveränderliche, die Radii vectores aber auch hier veränderliche Größen.

Unveränderlicher Punkt einer Curve ist ein Punkt, welcher seinen Ort nicht verändert, wie z. B. der Mittelpunkt des Kreises, die Brennpunkte der Kegelschnitte, u. s. f. Der Punkt dagegen, welcher eine Curve durch eine stetige Bewegung beschreibt, ist ein veränderlicher Punkt.

Unvollkommene Zahl, s. Vollkommene Zahl.



Mathematisches Wörterbuch

oder

Erklärung

der

Begriffe, Lehrsätze, Aufgaben und Methoden

der Mathematik

mit den nöthigen Beweisen

und literarischen Nachrichten begleitet

in alphabetischer Ordnung,

angefangen

von

Georg Simon Klügel,

fortgesetzt

von

Carl Brandan Mollweide,

ehemals Professoren der Mathematik zu Halle und Leipzig

und beendigt

von

Johann August Grunert,

Dr. und Professor der Mathematik zu Brandenburg a. d. H.
Ehrenmitgliede der Königl. Preuß. Akademie der Wissenschaften zu Erfu

---

Erste Abtheilung.

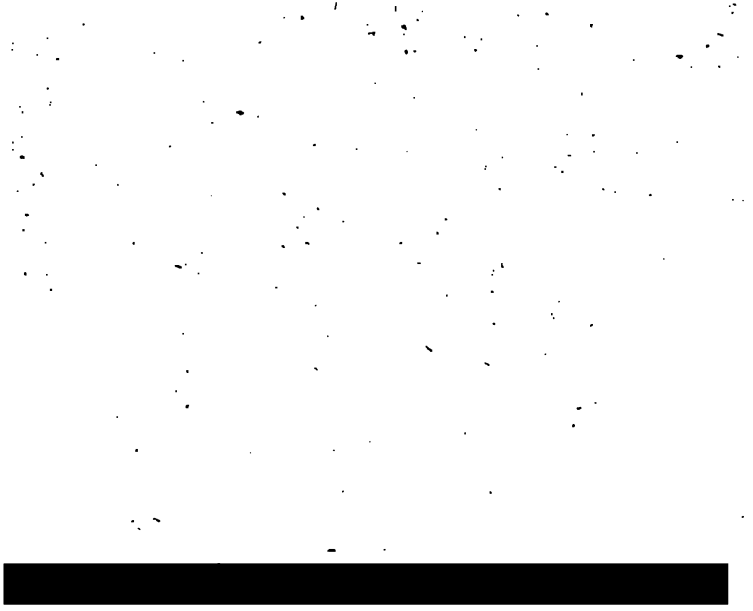
Die reine Mathematik.

Fünfter Theil. Zweiter Band.

V bis Z.

Leipzig, 1831.

Bey E. B. Schwickert.



V.

Variation einer Function, ſ. Variationsrechnung.

Variationen gegebener Dinge oder Elemente in der Combinationslehre ſind alle mögliche Verbindungen derſelben zugleich mit allen möglichen Verſetzungen, alſo Combinationen mit Permutationen (S. dieſe Art.). Alle, eine gleiche Anzahl Elemente enthaltenden, Variationen werden zu einerlei Klaſſe gerechnet; die gleiche Anfangselemente haben, bilden einerlei Ordnung. Man unterſcheidet Variationen **überhaupt ohne** und **mit Wiederholungen**, jenachdem jedes Element nur **ein** oder mehrere Mal **in** jeder einzelnen Complexion vorkommen darf. Verbindet man eine Buchſtabenreihe mit der natürlichen Zahlenreihe:

1, 2, 3, 4, 5, 6, ...
a, b, c, d, e, f, ... ,

ertheilt jedem Element einen beſtimmten Zahlenwerth nach einer Stelle, einen beſtimmten Localwerth, bei, und bildet nun die Variationen nach dem Geſetze, daß in jeder Complexion die Summe der Stellenzahlen eine beſtimmte Zahl iſt; ſo hat man Variationen **zu einer beſtimmten Summe**. Nach der **Hindenburgſchen** Charakteriſtik werden die 1te, 2te, 3te, 4te Klaſſe u. ſ. f.

Complexion alle die Elemente nach
welche sie nicht enthält, so daß also aus
der mten Klasse n — m Complexioner
Klasse entspringen. Bezeichnen wir a
burg die Anzahl der Complexionen du
specierum); so ist offenbar

$$n\int \overset{+1}{M'} = n\int M'.(n-m)$$

und, wenn man auf diese Art weiter s

$$\begin{aligned} n\int \overset{+1}{M'} &= n\int M'.(n-m) \\ &= n\int \overset{-1}{M'}.(n-m+1)(n- \\ &= n\int \overset{-2}{M'}.(n-m+2)(n- \\ &\quad \cdots\cdots\cdots \\ &= n\int A'.(n-1)\ldots(n- \end{aligned}$$

folglich, da, bei n Elementen, off
ist; wenn man zugleich m + 1 mit n
Elementen:

$$n\int M' = n(n-1)(n-2)\ldots(n$$

d. h. die Anzahl der Variationen ohne
mten Klasse für n Elemente

$+ n(n-1) + n(n-1)(n-2) + \ldots + n(n-1) \ldots 1$.

ezeichnen wir diese Anzahl bei n und n — 1 Elementen
ırch [n] und [n — 1]; so ist

$] = n\{1 + (n-1) + (n-1)(n-2) + \ldots + (n-1) \ldots 1\}$,

i.

$$[n] = \{1 + [n-1]\}.n,$$

ıch welcher Relation die Berechnung leicht successive für
$= 1, 2, 3, 4$, u. s. f. angestellt, und eine Tafel ent-
ıorfen werden kann.

3. Für Variationen mit Wiederholungen erhält man
us $'M$ offenbar $'\overset{+1}{M}$, wenn man jede Complexion in
M mit jedem der gegebenen n Elemente verbindet; so
aß also

$$n\int'\overset{+1}{M} = n\int'M.n,$$

nd, wenn man so weiter schließt:

$$n\int'\overset{+1}{M} = n\int'M.n = n\int'\overset{-1}{M}.n^2$$
$$= n\int'\overset{-2}{M}.n^3 = \ldots = n\int'A.n^m = n^{m+1},$$

ıeil auch hier offenbar $n\int'A = n$ ist. Also $n\int'M$
$= n^m$, oder die Anzahl der Variationen der mten
Klasse mit Wiederholungen für n Elemente $= n^m$. Die
Anzahl dieser Variationen in den ersten m Klassen ist
lso

$$= n + n^2 + n^3 + \ldots + n^m = \frac{n(n^m - 1)}{n-1}.$$

4. Was nun ferner die Anzahl der Variationen zur
Summe n der mten Klasse mit Wiederholungen be-
rifft; so lassen sich diese Variationen abtheilen, 1) in
olche, die mit 1 anfangen, deren so viele sind, wie in
$^{-1}\overset{-1}{M}$; 2) in solche, die mit 2 anfangen, deren so viele
ind, wie in $^{n-2}\overset{-1}{M}$; 3) in solche, die mit 3 anfan-

ſo viele ſind, als in $^{n-3}\overline{M}^{1}$, u. ſ. f. G
ie mit $n-m+1$ anfangen, welches
ſte Element iſt, das in der mten Kla
orkommen kann, da dann die übrigen
$e=1$ ſind. Dieſer Variationen ſind ſo
$\overline{M}^{1}$. Alſo iſt

$$^{n-1}\overline{M}^{1} + {}_{n}f^{n-2}\overline{M}^{1} + {}_{n}f^{n-3}\overline{M}^{1} + \ldots + {}_{n}f^{m}$$

offenbar ${}_{n}f^{n}A = 1$ iſt; ſo iſt

$$^{n-1}A + {}_{n}f^{n-2}A + {}_{n}f^{n-3}A + \ldots + {}_{n}f^{1}A = n$$

$$^{n-1}B + {}_{n}f^{n-2}B + {}_{n}f^{n-3}B + \ldots + {}_{n}f^{2}B$$

$$+ (n-3) + (n-4) + \ldots + 1 = \frac{(n-1)(n}{1.2}$$

$$^{n-1}C + {}_{n}f^{n-2}C + {}_{n}f^{n-3}C + \ldots + {}_{n}f^{3}C$$

$$\frac{(n-3)}{2} + \frac{(n-3)(n-4)}{1.2} + \ldots + \frac{2,1}{1.2}$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)\ldots 1}{1.2.3\ldots(n-1)} = 1$$

lso iſt die Anzahl der Variationen zur Summe n in laſſen überhaupt

$$\frac{n-1}{1} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} + \frac{n-1}{1} + 1,$$

ch dem binomiſchen Lehrſatze

$$= (1+1)^{n-1} = 2^{n-1}.$$

Sollen die Variationen gegebener Elemente wirk- geſtellt werden; ſo leitet man aus jeder Klaſſe ſt folgende ab, indem man, wenn Wiederholun- ſtattet ſind, jeder Complexion jener Klaſſe jedes e Element nach der Reihe vorſchreibt; wenn ine Wiederholungen verſtattet ſind, ſo werden emente nach der Reihe nur den Complexionen der en Klaſſe vorgeſetzt, in welchen ſie noch nicht ent- ind. Fängt man von der erſten Klaſſe an; ſo er- in auf dieſe Art leicht alle übrigen nach der Reihe. ariationen ohne Wiederholungen für n Elemente te Klaſſe die letzte. Bei Variationen mit unein- kten Wiederholungen gehen die Klaſſen ins Un- fort. Folgende Exempel beziehen ſich auf vier te a, b, c, d, und reichen bis zum Anfange der Klaſſe.

Variationen mit Wiederholungen.

a	b	c	d
aa	ab	ca	ad
ba	bb	bc	bd
ca	cb	cc	cd
da	db	dc	dd
aaa	aab	aac	aad
aba	abb	abc	abd
aca	acb	acc	acd
ada	adb	adc	add
baa	bab	bac	bad
bba	bbb	bbc	bbd
bca	bcb	bcc	bcd
bda	bdb	bdc	bdd

7. Variationen ohne Wiederhol

a	b	c
	ab	ac
	ba	bc
	ca	cb
	da	db
		abc
		acb
		adb
		bac
		bca
		bda
		cab
		cba
		cda
		dab
		dba
		dca

8. Beziehen ſich die Variatione
mentenreihen p, q, r, u. ſ. f., die

p(a, b, c, d)
q(A, B)
r(α, β, γ)

:hält man z. B.

a	b	c	d
Aa	Ab	Ac	Ad
Ba	Bb	Bc	Bd
αAa	αAb	αAc	αAd
αBa	αBb	αBc	αBd
βAa	βAb	βAc	βAd
βBa	βBb	βBc	βBd
γAa	γAb	γAc	γAd
γBa	γBb	γBc	γBd

Höhere Klaſſen giebt es in dieſem Falle nicht. Bei der :ntwickelung der Producte der Reihen kommen Variationen ieſer Art immer vor. Sind die Reihen unendlich, ſo nd auch die obigen Elementenreihen unendlich, und die nzahl der Klaſſen iſt unbegränzt.

9. Soll eine Klaſſe außer der Ordnung dargeſtellt wer- :n; ſo ſchreibe man bei verſtatteten Wiederholungen alle :gebenen Elemente unter einander, ſetze allen a vor, ver- uſche das vorgeſetzte a mit b, das vorgeſetzte b mit c, . ſ. f. bis zu Ende. Allen Complexionen ſetze man wieder vor, verfahre übrigens wie vorher, und ſetze dies ſo nge fort, bis man die verlangte Klaſſe erreicht hat. Soll agegen die mte Claſſe der Variationen ohne Wiederholun- en entwickelt werden; ſo ſchreibe man die Elemente vom ten an unter einander, ſetze allen das (m — 1)te Ele- ent vor, vertauſche nun überall das (m — 1)te und mte, nte und (m + 1)te Element, u. ſ. f., gegen einander, chreibe allen Complexionen das (m — 2)te Element vor, und verfahre weiter ganz auf ähnliche Art. Mit dem Vorſetzen des erſten Elements erreicht man die verlangte Klaſſe. Dies giebt folgende Darſtellungen der 3ten Klaſſe für vier Elemente:

adc ddc
add ddd
baa
bab
bac
bad
bba
bbb
bbc
bbd
bca
bcb
bcc
bcd
bda
bdb
bdc
bdd
caa
cab
cac
cad
cba
cbb
cbc
cbd
cca
ccb
ccc
ccd
cda
cdb

0|0|0|0 (0)
0|0|0|1 (1)
0|0|0|2 (2)
0|0|1|0 (3)
0|0|1|1 (4)
0|0|1|2 (5)
0|0|2|0 (6)
0|0|2|1 (7)
0|0|2|2 (8)
0|1|0|0 (9)
0|1|0|1 (10)
0|1|0|2 (11)
0|1|1|0 (12)
– – –
0|1|2|2 (17)
0|2|0|0 (18)
0|2|0|1 (19)
0|2|0|2 (20)
– – –
0|2|2|2 (26)
1|0|0|0 (27)
1|0|0|1 (28)
u. ſ. f.

Die eingeſchloſſenen Zahlen ſind die entſprechenden decadiſchen Zahlenausdrücke.

11. Bei Variationen zu beſtimmten Summen leitet man entweder Klaſſen aus Klaſſen, oder Summen aus Summen ab. Im erſten Falle ſchreibt man die gegebene Summe n als Union in die erſte Klaſſe. Die Binionen erhält man durch Zerlegung von n in zwei Theile auf alle mögliche Arten: 1, n—1; 2, n—2; 3, n—3; ...; n—2, 2; n—1, 1. Aus den Binionen erhält man die Ternionen, wenn man das letzte Element auf ähnliche Art in zwei Theile zerlegt, indem man die übrigen ungeändert läßt, und eben ſo ergeben ſich aus den Ternionen die Quaternionen, u. ſ. f. Im zweiten Fall findet man aus den Variationen zur Summe n—1 die zur Summe n, wenn man jenen allen zuerſt 1 oder a vorſetzt, und dann in allen Variationen zur Summe n—1 das erſte Element auch mit dem nächſt höhern vertauſcht, indem die übrigen ungeändert bleiben. Dies giebt für die Summe 6 folgende Darſtellungen:

411
1113
1122
1131
1212
1221
1311
2112
2121
2211
3111
11112
11121
11211
12111
21111
111111

Die zweite Darstellung ist involu
die Summen. Wie man sich bey Bi
verhalten hat, folgt hieraus unmittell

12. Soll eine bestimmte Klasse,
Variationen zur Summe n außer de
werden; so suche man zunächst da
welches in der verlangten Klasse vor
offenbar, wenn m — 1 Elemente —

welches man so lange fortsetzt, als die gegebene Zahl m Einheiten enthält. Bei dem Vertauschen der Elemente werden alle die Complexionen übergangen, deren letztes Element = 1 ist. Für m = 4, n = 7 erhält man hiernach:

7D

1|1|1|4
1|1|2|3
1|1|3|2
1|1|4|1
1|2|1|3
1|2|2|2
1|2|3|1
1|3|1|2
1|3|2|1
1|4|1|1
2|1|1|3
2|1|2|2
2|1|3|1
2|2|1|2
2|2|2|1
2|3|1|1
3|1|1|2
3|1|2|1
3|2|1|1
4|1|1|1

Ueber die Anwendung der Variationen in der Analysis s. den Art. Combinatorische Analysis, und suche überhaupt weitere Belehrung in den am Ende dieses Artikels angeführten ausführlichen Werken über combinatorische Analysis.

Variationsrechnung ist der Theil der Analysis, welcher, ähnlich der Differential- und Integralrechnung die Variationen gegebener Functionen zu finden lehrt, eine auf der höchsten Abstraction beruhende mathematische Wissenschaft, welche zugleich sehr wichtiger Anwendungen, namentlich auf die Lehre vom Größten und Kleinsten, wovon späterhin die Rede seyn wird, fähig ist. Ihr Wesen kann nur dann erst vollständig erkannt werden, wenn der Begriff der Variation einer Function deutlich gemacht worden ist. Bis dahin muß man sich mit obiger vorläufigen Erklärung, welche allerdings nur geringen Aufschluß über die Natur des Gegenstandes giebt, begnügen.

p, q, r, s, ... dagegen die r
veränderlichen Größen, V aber
gige Größe oder die Functio
betrachten wir hier zunächſt ſolche
abſolut-unabhängige veränderlich

2. Die Beſtimmung der aus
ihrer veränderlichen Größen reſ
rungen der Functionen, ohne daß
der veränderlichen Größen unter
der Function, ſich ändert, iſt b
der Differenzen- und Differenti
hier in ihrer ganzen Ausdehnung,
Lehrſatz (ſ. dieſen Artikel), vora
Man kann ſich aber auch denken, d
Function herbeigeführt werde, ni
Werthveränderung ihrer verände
ſondern auch zugleich durch die Ve
gen Zuſammenhangs derſelben u
Form der Function, oder auch
dieſe an ſich völlig willkührlich
der Functionen läßt ſich jedoch kein

) Formverwandlung hervorgegangenen Functionen, i die hieraus entspringenden Veränderungen derselben i gewissen eigenthümlichen Algorithmus unterwerfbar sollen, unbedingt nöthig, aus ihnen selbst ihren primi- Zustand erkennen, und auf diesen zurückgehen zu en, indem sonst, wegen der übrigens völligen Will- ichkeit der Formverwandlung, zwischen ihnen und rimitiven Functionen gar kein weiterer Zusammenhang finden würde. Um diesen Zweck zu erreichen, denke sich, die gegebene Function durch V bezeichnend, bei mit derselben vorgenommenen Verwandlung zugleich beliebige constante Größe i, welche in der Folge die :iirende genannt werden soll, eingeführt, und un- erfe die durch die Verwandlung hervorgegangene ction V_i, wie sie von nun an immer bezeichnet werden bei übrigens völliger Willkührlichkeit des Zusammen- es der veränderlichen Größen und der Größe i unter ıder, nur der einzigen Bedingung, daß sie für $i = o$ er in den primitiven Zustand V zurückkehrt. Für $= (a + x)^2$ wäre z. B.

$$V_i = (a+x+i)^2 + \log\left\{1 + \frac{i}{a(x+i)}\right\} + (x+i)\sin i$$

solche durch Formverwandlung hervorgegangene Fun- ı, welche der so eben ausgesprochenen Bedingung ge- :, da V_i, für $i = o$, $= (a + x)^2$ wird.

Die Differenz $V_i - V$ soll in der Folge überhaupt die ränderung von V genannt, und durch DV bezeich- werden, wenn diese Bezeichnung auch sonst nicht sehr öhnlich ist.

4. Betrachten wir nun einmal i als veränderlich, und ichnen die Werthe der Differentialquotienten

$$\frac{\partial V_i}{\partial i}, \frac{\partial^2 V_i}{\partial i^2}, \frac{\partial^3 V_i}{\partial i^3}, \frac{\partial^4 V_i}{\partial i^4}, \ldots$$

$i = o$ durch V', V'', V''', V'''', ...; so ist nach der claurinschen Reihe (Taylors Lehrsatz. 12.)

$$V_i = V + V'.\frac{i}{1} + V''.\frac{i^2}{1.2} + V'''.\frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$\mathrm{D}V = V'.\frac{i}{1} + V''.\frac{i^2}{1.2} + V'''.\frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

rechnung, in ihrem reinen Theile, du
unzweckmäßig seyn, auf einen hier wi
Differentialrechnung, welcher in d
fehlt, besonders hinzuweisen. Ist nä

$$y = f(p, q, r, s, \ldots$$

eine Function von p, q, r, s, ...
von einer veränderlichen Größe x a
so findet man ∂y in Bezug auf x, we
auf p, q, r, s, ..., als von einar
gige Größen angesehen, entwickelt, u
rentiale von p, q, r, s, ... alle i
veränderliche Größe betrachtet. Den
um Δx geändert; so wird

$$y' = f(p + \Delta p, q + \Delta q, r + \Delta r, \ldots$$

und folglich nach dem Taylor'schen Le
veränderliche Größen:

$$y' = y + \left(\frac{\partial y}{\partial p}\right) \Delta p + \ldots$$
$$+ \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right) \Delta q + \ldots$$
$$+ \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right) \Delta r + \ldots$$

Also

$$y' = y + \left(\frac{\partial y}{\partial p}\right).\frac{\partial p}{\partial x}\Delta x + \ldots.$$
$$+ \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right).\frac{\partial q}{\partial x}\Delta x + \ldots.$$
$$+ \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right).\frac{\partial r}{\partial x}\Delta x + \ldots.$$
$$+ \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right).\frac{\partial s}{\partial x}\Delta x + \ldots.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Folglich, in Bezug auf x als veränderlich:

$$\partial y = \frac{\partial y}{\partial x}\partial x =$$
$$\left(\frac{\partial y}{\partial p}\right).\frac{\partial p}{\partial x}\partial x + \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right).\frac{\partial q}{\partial x}\partial x + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right).\frac{\partial r}{\partial x}\partial x + \ldots.$$
$$= \left(\frac{\partial y}{\partial p}\right)\partial p + \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)\partial q + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)\partial r + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)\partial s + \ldots.,$$

wenn nur ∂p, ∂q, ∂r, ∂s, ... alle in Bezug auf x genommen werden. Nach der ersten Reihe für y' ist aber, wenn p, q, r, s, ... als unabhängige veränderliche Größen gedacht werden,

$$\partial y = \left(\frac{\partial y}{\partial p}\right)\partial p + \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)\partial q + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)\partial r + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)\partial s + \ldots.$$

Also folgt unser Satz.

Ferner ergiebt sich nun hieraus, daß, da das zweite Differential von y das erste vom ersten ist, $\partial^2 y$ in Bezug auf x gefunden wird, wenn man den gefundenen Ausdruck für ∂y in Bezug auf p, q, r, s, ...; ∂p, ∂q, ∂r, ∂s, ... als unabhängige veränderliche Größen differentiirt, und die Differentiale wie vorher betrachtet. Eben so erhält man hieraus weiter $\partial^3 y$ in Bezug auf x, wenn der für $\partial^2 y$ erhaltene Ausdruck, in Bezug auf p, q, r, s, ...; ∂p, ∂q, ∂r, ∂s, ...; $\partial^2 p$, $\partial^2 q$, $\partial^2 r$, $\partial^2 s$, ... als unabhängige veränderliche Größen, differentiirt wird, und die Differentiale dann wie vorher betrachtet werden.

9. Durch folgenden, als Hauptsatz der ganzen eigentlichen Variationsrechnung zu betrachtenden Lehrsatz, wird dieselbe in unmittelbare Verbindung mit der Differential-

$$y + \frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{i\Delta v}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}\cdot\frac{i^2\Delta v^2}{1.2} + \frac{\partial^3 y}{\partial v^3}\cdot\frac{i}{1}$$

$$z + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{i\Delta v}{1} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\frac{i^2\Delta v^2}{1.2} + \frac{\partial^3 z}{\partial v^3}\cdot\frac{i}{1}$$

$$u + \frac{\partial u}{\partial v}\cdot\frac{i\Delta v}{1} + \frac{\partial^2 u}{\partial v^2}\cdot\frac{i^2\Delta v^2}{1.2} + \frac{\partial^3 u}{\partial v^3}\cdot\frac{i}{1}$$

u. ſ. f. u. ſ

d. i., weil nach obiger Bemerkung ∂v

$$x + \partial x\cdot\frac{i}{1} + \partial^2 x\cdot\frac{i^2}{1.2} + \partial^3 x\cdot$$

$$y + \partial y\cdot\frac{i}{1} + \partial^2 y\cdot\frac{i^2}{1.2} + \partial^3 y\cdot$$

$$z + \partial z\cdot\frac{i}{1} + \partial^2 z\cdot\frac{i^2}{1.2} + \partial^3 z\cdot$$

$$u + \partial u\cdot\frac{i}{1} + \partial^2 u\cdot\frac{i^2}{1.2} + \partial^3 u\cdot$$

u. ſ. f. u.

Werden nun dieſe Reihen in

$$V = f(x, y, z, u, \ldots$$

für x, y, z, u, ... geſetzt; ſo geh
lor'ſchen Lehrſatze über in:

$$x + \delta x.\frac{i}{1} + \delta^2 x.\frac{i^2}{1.2} + \delta^3 x.\frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$y + \delta y.\frac{i}{1} + \delta^2 y.\frac{i^2}{1.2} + \delta^3 y.\frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$z + \delta z.\frac{i}{1} + \delta^2 z.\frac{i^2}{1.2} + \delta^3 z.\frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$u + \delta u.\frac{i}{1} + \delta^2 u.\frac{i^2}{1.3} + \delta^3 u.\frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

gesetzt werden, d. i. V_i (6.), so daß also

$$V_i = V + \partial V.\frac{i}{1} + \partial^2 V.\frac{i^2}{1.2} + \partial^3 V.\frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

nur überall δ für ∂ gesetzt. Da aber auch (5.)

$$V_i = V + \delta V.\frac{i}{1} + \delta^2 V.\frac{i^2}{1.2} + \delta^3 V.\frac{i^3}{1.2.3} + \ldots$$

ist; so ist $\delta V = \partial V$, $\delta^2 V = \partial^2 V$, $\delta^3 V = \partial^3 V$, $\delta^4 V = \partial^4 V$, u. s. f., wenn bei der Entwickelung der Differentialien von V alle x, y, z, u, ...; ∂x, ∂y, ∂z, ∂u, ...; $\partial^2 x$, $\partial^2 y$, $\partial^2 z$, $\partial^2 u$, ...; u. s. f. als von einander unabhängige veränderliche Größen betrachtet werden, und nach, oder bei der Differentiation, überall δ für ∂ gesetzt wird. Am kürzesten bedient man sich bei der Differentiation sogleich des Zeichens δ statt ∂, oder differentiirt, nach dem gewöhnlichen Ausdrucke, unter oder mit dem Zeichen δ. Wir haben zwar vorher x, y, z, u, ... als von einer gewissen Größe v abhängig betrachtet; es fällt aber in die Augen, daß obige Entwickelung ganz allgemein das geben muß, was man erhält, wenn in V die Reihen

$$x + \delta x.\frac{i}{1} + \delta^2 x.\frac{i^2}{1.2} + \delta^3 x.\frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$y + \delta y.\frac{i}{1} + \delta^2 y.\frac{i^2}{1.2} + \delta^3 y.\frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$z + \delta z.\frac{i}{1} + \delta^2 z.\frac{i^2}{1.2} + \delta^3 z.\frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$u + \delta u.\frac{i}{1} + \delta^2 u.\frac{i^2}{1.2} + \delta^3 u.\frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

u. s. f. u. s. f.

überhaupt für x, y, z, u, ... gesetzt werden, insofern es nur nicht auf eine gegenseitige Abhängigkeit dieser Größen ankommt, so wie denn in diesem Abschnitte dieselben als ganz unabhängig von einander betrachtet werden.

$$\delta^2 V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)\delta^2 x + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\delta^2 y + \left($$
$$+ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)\delta x^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\delta x\delta y +$$
$$+ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)\delta y^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}\delta y\delta x +$$
$$+ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)\delta z^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x}\delta z\delta x +$$
$$+ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial u^2}\right)\delta u^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial u \partial x}\delta u\delta x +$$

u. ſ. f.

oder, da die Ordnung der Diffe
auf das Reſultat hat:

$$\delta^2 V =$$
$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)\delta^2 x + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\delta^2 y + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right.$$
$$+ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)\delta x^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\delta x\delta y + 2$$
$$+ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)\delta y^2 +$$
$$+$$

folgt, auch für Variationen, und können auch noch beſonders auf folgende Art leicht bewieſen werden.

a. Für $V = v + v' + v'' + v''' + \ldots$ iſt $V_i = v_i + v'_i + v''_i + v'''_i + \ldots$;

$$\frac{\partial V_i}{\partial i} = \frac{\partial v_i}{\partial i} + \frac{\partial v'_i}{\partial i} + \frac{\partial v''_i}{\partial i} + \frac{\partial v'''_i}{\partial i} + \ldots$$

Folglich für $i = o$ (4.)

$$\delta V = \delta v + \delta v' + \delta v'' + \delta v''' + \ldots$$

b. Für $V = vv'$ iſt eben ſo $V_i = v_i v'_i$;

$$\frac{\partial V_i}{\partial i} = v\frac{\partial v'_i}{\partial i} + v'_i\frac{\partial v_i}{\partial i}, \quad \delta V = v\delta v' + v'\delta v,$$

wenn nach der Differentiation wieder $i = o$ geſetzt wird.

c. Für $V = \frac{v}{v'}$ iſt $V_i = \frac{v_i}{v'_i}$;

$$\frac{\partial V_i}{\partial i} = \frac{v'_i\frac{\partial v_i}{\partial i} - v_i\frac{\partial v'_i}{\partial i}}{v'_i v'_i}, \quad \delta V = \frac{v'\delta v - v\delta v'}{v'v'}.$$

d. Für $V = v^n$ iſt $V_i = (v_i)^n$; alſo

$$\frac{\partial V_i}{\partial i} = n(v_i)^{n-1}\cdot\frac{\partial v_i}{\partial i}, \quad \delta V = nv^{n-1}\delta v.$$

e. Für $V = av$ iſt $V_i = a_i v$; alſo

$$\frac{\partial V_i}{\partial i} = a\frac{\partial v_i}{\partial i}, \quad \delta V = a\delta v.$$

Zuweilen können dieſe Regeln von Nutzen ſeyn; indeß erſcheinen ſie hier bei Weitem nicht ſo wichtig, wie in der Differentialrechnung.

11. Von ganz beſonderer Wichtigkeit für die Variationsrechnung iſt folgender Satz.

Man bezeichne der Kürze wegen irgend einen, z. B. den kten, Differentialquotienten von V in Bezug auf ſeine veränderlichen Größen, bloß durch $\frac{\partial^k V}{\partial^k}$, wo alſo einige Mal nach x, dann einige Mal nach y, einige Mal nach z, u. ſ. f., überhaupt k Mal differentiirt iſt, und es bekanntlich nicht auf die Ordnung, wohl aber auf die Anzahl der einzelnen Differentiationen nach jeder einzelnen veränderlichen Größe ankommt. Da dieſer Differentialquotient offenbar auch eine gewiſſe Function von x, y, z, u, ... iſt, ſo ſetze man

$$\frac{\partial^k V}{\partial^k} = f'(x, y, z, u, \ldots).$$

nun in

$$V = f(x, y, z, u, \ldots)$$

$u_i, \ldots$ für $x, y, z, u, \ldots$; ſo wird

$$V_i = f(x_i, y_i, z_i, u_i, \ldots),$$

auch

$$\frac{\partial^k V_i}{\partial^k} = f'(x_i, y_i, z_i, u_i, \ldots),$$

Differentiation offenbar alle Variationen der abſo-
ngigen veränderlichen Größen als conſtant zu be-
d, weil hier natürlich vorausgeſetzt werden muß,
z, u, ... in der Function f und auch in f' auf
e Art variirt worden ſind, welches nicht der
ürde, wenn die Differentiale der Variationen
geſetzt würden. Nun iſt aber (5.):

$$V + \delta V \cdot \frac{i}{1} + \delta^2 V \cdot \frac{i^2}{1.2} + \delta^3 V \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots.$$

man differentiirt:

$$V_i = \frac{\partial^k V}{\partial^k} + \frac{\partial^k (\delta V)}{\partial^k} \cdot \frac{i}{1} + \frac{\partial^k (\delta^2 V)}{\partial^k} \cdot \frac{i^2}{1.2} + \ldots.$$

rachtet, nur die Differentialquotienten beide Mal ganz f einerlei Art nach x, y, z, u, ... genommen.

12. Man kann den Beweis dieses Satzes auch auf lgende Art aus dem Taylor'schen Lehrsatze (ſ. d. Art.) nmittelbar ableiten, welcher Beweis zwar weitläufiger , aber, wie es uns scheint, eine sehr deutliche Einsicht die Natur der Sache gewährt. Der Kürze wegen man

$$X = \delta x \cdot \frac{i}{1} + \delta^2 x \cdot \frac{i^2}{1.2} + \delta^3 x \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$Y = \delta y \cdot \frac{i}{1} + \delta^2 y \cdot \frac{i^2}{1.2} + \delta^3 y \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$Z = \delta z \cdot \frac{i}{1} + \delta^2 z \cdot \frac{i^2}{1.2} + \delta^3 z \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$U = \delta u \cdot \frac{i}{1} + \delta^2 u \cdot \frac{i^2}{1.2} + \delta^3 u \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

u. ſ. f. u. ſ. f.

nd bezeichne den Inbegriff aller, zugleich mit ihren Permutationszahlen multiplicirten Combinationen mit Wiederholungen der ersten, zweiten, dritten Klasse, u. ſ. f., ür den Zeiger

$$\left\{ \frac{X}{\partial x}, \frac{Y}{\partial y}, \frac{Z}{\partial z}, \frac{U}{\partial u}, \ldots \right\}$$

ie bloß durch C_1, C_2, C_3, ...; ſo iſt, wie im Art. Taylors Lehrsatz (10.), wo aber eine etwas verschiedene Bezeichnung der Combinationsklaſſen gebraucht iſt, gezeigt worden,

$$V_i = V + \frac{\partial V}{1} C_1 + \frac{\partial^2 V}{1.2} C_2 + \frac{\partial^3 V}{1.2.3} C_3 + \ldots,$$

in Ausdruck, deſſen combinatoriſche Bedeutung wohl aufzufaſſen iſt, worüber der a. Art. nachzuſehen. Da aber weder V, noch irgend ein Differentialquotient von , i enthält; ſo kann man, nach i differentiirend, ſetzen:

$$\frac{\partial^n V_i}{\partial i^n} = \frac{\partial V}{1} \frac{\partial^n C_1}{\partial i^n} + \frac{\partial^2 V}{1.2} \frac{\partial^n C_2}{\partial i^n} + \frac{\partial^3 V}{1.2.3} \frac{\partial^n C_3}{\partial i^n} + \ldots,$$

nmer nur die combinatoriſche Bedeutung dieſer Ausdrücke ehörig feſtgehalten. Hieraus erhält man $\partial^n V$ (4.), enn man $i = o$ ſetzt, ſo daß alſo, wenn die Werthe der

Glieder höherer Potenzen von i, i

$k > n$ ist, $\left(\frac{\partial^n C_k}{\partial i^n}\right) = 0$, ſo daß

Gliede

$$\frac{\partial^n V}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} \left(\frac{\partial^n$$

abbricht. Setzt man nun, wel

$\frac{\partial^k V}{\partial i^k}$ für V_k ſo wird

$$\left(\frac{\partial^k V_1}{\partial i^k}\right) +$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial^k V}{\partial i^k}\right)}{1}\left(\frac{\partial^n C_1}{\partial i^n}\right) + \frac{\partial^2\left(\frac{\partial^k V}{\partial i^k}\right)}{1 \cdot 2}\left($$

wofür, wenn nur immer die comb

Ausdrucks gehörig in's Auge ge

ſchreiben läßt:

$$\left(\frac{\partial^k V}{\partial i^k}\right) =$$

$$\frac{\partial^{k+1} V}{1 \cdot \partial i^k}\left(\frac{\partial^n C_1}{\partial i^n}\right) + \frac{\partial^{k+2} V}{1 \cdot 2 \partial i^k}\left($$

Nimmt man aber, alle Variati

wo die Differentialquotienten von V offenbar ganz auf dieſelbe Art wie vorher in der Reihe für $\delta^n\left(\frac{\partial^k V}{\partial^k}\right)$ genommen ſind, da die Ordnung der Differentiation bekanntlich willkührlich iſt. Es iſt alſo

$$\delta^n\left(\frac{\partial^k V}{\partial^k}\right) = \frac{\partial^k(\delta^n V)}{\partial^k},$$

wo, was insbeſondere deutlich aus dieſem Beweiſe zu erhellen ſcheint, alle Variationen der abſolut-unabhängigen veränderlichen Größen bei der Differentiation als conſtant zu betrachten ſind.

13. Sei, um dieſen Satz an ein Paar Beiſpielen zu erläutern,

$$V = ax + 2bx^2y^2 + 3cy^3;$$

alſo

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = a + 4bxy^2, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = 8bxy;$$

$$\partial V = a\partial x + 4bxy^2\partial x + 4bx^2y\partial y + 9cy^2\partial y;$$

$$\delta V = a\delta x + 4bxy^2\delta x + 4bx^2y\delta y + 9cy^2\delta y.$$

$$\partial\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = 4by^2\partial x + 8bxy\partial y, \quad \delta\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = 4by^2\delta x + 8bxy\delta y;$$

$$\frac{\partial(\delta V)}{\partial x} = 4by^2\delta x + 8bxy\delta y; \quad \delta\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \frac{\partial(\delta V)}{\partial x},$$

wie es ſeyn ſoll. Ferner iſt auch

$$\partial\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\right) = 8b(x\partial y + y\partial x),$$

$$\delta\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\right) = 8b(x\delta y + y\delta x).$$

Aber

$$\frac{\partial(\delta V)}{\partial x} = 4by^2\delta x + 8bxy\delta y;$$

$$\frac{\partial(\delta V)}{\partial x \partial y} = 8b(y\delta x + x\delta y);$$

alſo

$$\delta\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial(\delta V)}{\partial x \partial y},$$

wie es ſeyn ſoll. Immer ſind δx, δy bei der Differentiation als conſtant betrachtet. Sei ferner, um auch ein Beiſpiel mit transcendenten Größen zu geben,

$$V = 4a\log nx \sin y + 3bx;$$

$$\delta V = \frac{4a\delta x \sin y}{x} + 3b\delta x$$

$$\frac{\partial(\delta V)}{\partial x} = -\frac{4a\delta x \sin y}{x^2}$$

$$\frac{\partial^2(\delta V)}{\partial x \partial y} = -\frac{4a}{x}\left\{\frac{\delta x \cos}{x}\right.$$

$$\delta\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial}{}$$

wie es ſeyn ſoll.

14. Sey jetzt V irgend eine
ſolut-unabhängigen veränderlich

$$\frac{\partial f V \partial x}{\partial x} = V, \quad \delta^n\left(\frac{\partial f V \partial x}{\partial x}\right.$$

aber auch

$$\frac{\partial f(\delta^n V)\partial x}{\partial x} =$$

alſo

$$\delta^n\left(\frac{\partial f V \partial x}{\partial x}\right) = \frac{\partial f}{}$$

Werden nun alle Variatione
genveränderlichen Größe als con

$$\delta^n\left(\frac{\partial f V \partial x}{\partial x}\right) = \frac{\delta(}{}$$

$$\int V\partial x = \tfrac{1}{4}ax^4 + \tfrac{1}{3}bx^3 + \tfrac{1}{2}cx^2 + dx + \text{Const};$$
$$\delta\int V\partial x = (ax^3 + bx^2 + cx + d)\delta x.$$

Ferner ist

$$\delta V = (3ax^2 + 2bx + c)\delta x,$$

, δx als constant betrachtet:

$$\int(\delta V)\,\partial x = (ax^3 + bx^2 + cx)\delta x + C.$$

Nun wird $\delta\int V\partial x = d\delta x$ für $x = 0$; also ist $= d\delta x$, und

$$\int(\delta V)\partial x = (ax^3 + bx^2 + cx + d)\delta x$$

tzen, damit

$$\delta\int V\partial x = \int(\delta V)\partial x.$$

Auf ähnliche Art ist

$$\int V\partial x = (3ax^2 + 2bx + c)\delta x^2 + (ax^3 + bx^2 + cx + d)\delta^2 x;$$
$$\delta^2 V = (6ax + 2b)\delta x^2 + (3ax^2 + 2bx + c)\delta^2 x,$$
$$^2V)\partial x = (3ax^2 + 2bx)\delta x^2 + (ax^3 + bx^2 + cx)\delta^2 x + C.$$

Für $x = 0$ ist aber

$$\delta^2\int V\partial x = c\delta x^2 + d\delta^2 x,$$

ß also $C = c\delta x^2 + d\delta^2 x$ zu setzen ist, damit

$$\delta^2\int V\partial x = \int(\delta^2 V)\partial x.$$

15. In Bezug auf Integrale zweier absolut-unabhän- veränderlichen Größen geben wir hier einige Erläute- en, die für das Folgende wichtig, und in diesem Wör- iche noch nirgends mit gehöriger Deutlichkeit vorge- n sind. Sei also V eine Function der beiden absolut- hängigen Größen x, y; so versteht man unter

$$\int\int V\partial x\partial y$$

Integralausdruck, welchen man erhält, wenn zuerst x bloß in Bezug auf x als veränderlich, und dann

$$\int\partial y\int V\partial x,$$

in Bezug auf y als veränderlich, oder zuerst $\int V\partial y$ in Bezug auf y als veränderlich, und dann

$$\int\partial x\int V\partial y,$$

in Bezug auf x als veränderlich, genommen wird, in- sich aus dem Satze, daß die Ordnung der Differen- on einer Function zweier veränderlichen Größen nach n veränderlichen Größen umgekehrt werden kann (Tay- Lehrsatz. 8.) leicht ergiebt, daß beide Operationen

ctionen, die erſte bloß vo
zeichnen,

$$\int \partial y \int V \partial x = \int \partial x \int V$$

Soll $\int \partial y \int V \partial x$ zwiſche
$y = b$, $y = b'$ genommn
als conſtant betrachtend, $\int$
x als conſtant betrachtend,
Gränzen. Hat man aber
irgend einen Werth, den n

$$\int \partial y \int V \partial x$$

bezeichnen wollen, gefund
den obigen Gränzen genom

$$= \varphi(a', b') - \varphi(a', b$$

ſetzen. Denn man ſetze

$$\int V \partial x =$$

ſo iſt, y als conſtant betrac
$x = a$, $x = a'$ genomm

$$= \varphi'(a', y)$$

alſo

$$\int \partial y \int V \partial x = \int \varphi'(a',$$

oder, wenn wir überhaupt

$$\varphi''(x, y) = \varphi(x, y) + f_1 x + f'_1 y$$

seyn; also ist obiger Werth unsers Integrals

$$= \varphi(a', b') + f_1(a') + f'_1(b') - \varphi(a', b) - f_1(a') - f'_1(b)$$
$$- \varphi(a, b') - f_1(a) - f'_1(b') + \varphi(a, b) + f_1(a) + f'_1(b)$$
$$= \varphi(a', b') - \varphi(a', b) - \varphi(a, b') + \varphi(a, b),$$

wie behauptet wurde. Nimmt man $\int \partial x \int V \partial y$ zwischen denselben Gränzen; so erhält man, da dieses Integral

$$= \varphi(x, y) + f(x) + f'(y)$$

seyn muß, auf ganz ähnliche Art wie vorher seinen Werth zwischen besagten Gränzen

$$= \varphi(a', b') - \varphi(a, b') - \varphi(a', b) + \varphi(a, b)$$
$$= \varphi(a', b') - \varphi(a', b) - \varphi(a, b') + \varphi(a, b),$$

so daß also immer

$$\int \partial y \int V \partial x = \int \partial x \int V \partial y,$$

wenn nur beide Integrale zwischen einerlei Gränzen genommen werden.

16. Auf ähnliche Art wie in (15.) ist nun

$$\frac{\partial^2 \int\int V \partial x \partial y}{\partial x \partial y} = V, \quad \delta^n \left(\frac{\partial^2 \int\int V \partial x \partial y}{\partial x \partial y} \right) = \delta^n V;$$

aber auch $\frac{\partial^2 \int\int (\delta^n V) \partial x \partial y}{\partial x \partial y} = \delta^n V$; also

$$\delta^n \left(\frac{\partial^2 \int\int V \partial x \partial y}{\partial x \partial y} \right) = \frac{\partial^2 \int\int (\delta^n V) \partial x \partial y}{\partial x \partial y}.$$

Werden aber alle Variationen von x, y als constant betrachtet; so ist (11.)

$$\delta^n \left(\frac{\partial^2 \int\int V \partial x \partial y}{\partial x \partial y} \right) = \frac{\partial^2 \delta^n \int\int V \partial x \partial y}{\partial x \partial y},$$

so daß also

$$\frac{\partial^2 \delta^n \int\int V \partial x \partial y}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \int\int (\delta^n V) \partial x \partial y}{\partial x \partial y},$$

woraus

$$\delta^n \int\int V \partial x \partial y = \int\int (\delta^n V) \partial x \partial y + f(x) + f'(y).$$

Um ein Beispiel zu geben; so sey

$$V = ax^2 + bxy + cy^2 + d;$$
$$\int V \partial x = \tfrac{1}{3} ax^3 + \tfrac{1}{2} bx^2 y + cxy^2 + dx,$$
$$\int\int V \partial x \partial y = \tfrac{1}{3} ax^3 y + \tfrac{1}{4} bx^2 y^2 + \tfrac{1}{3} cxy^3 + dxy,$$
$$\delta \int\int V \partial x \partial y =$$
$$(ax^2 y + \tfrac{1}{2} bxy^2 + \tfrac{1}{3} cy^3 + dy) \partial x$$
$$+ (\tfrac{1}{3} ax^3 + \tfrac{1}{2} bx^2 y + cxy^2 + dx) \partial y.$$

n iſt

$$\delta V = (2ax + by)\delta x + (bx + 2cy)\delta y ,$$

$$\int(\delta V)\partial x =$$

$$(ax^2 + bxy)\delta x + (\tfrac{1}{2}bx^2 + 2cxy)\delta y ,$$

$$\iint(\delta V)\partial x\partial y =$$

$$ax^2y + \tfrac{1}{2}bxy^2)\delta x + (\tfrac{1}{2}bx^2y + cxy^2)\delta y .$$

ird aber, wenn man zuerſt $x = o$,
, im erſten Falle

$$\delta\iint V\partial x\partial y = (\tfrac{1}{3}cy^3 + dy)\delta x ,$$

$$\delta\iint V\partial x\partial y = (\tfrac{1}{3}ax^3 + dx)\delta y .$$

nt man alſo $\iint(\delta V)\partial x\partial y$ auf dieſelbe A
Integral

$$= (ax^2y + \tfrac{1}{2}bxy^2 + \tfrac{1}{3}cy^3 + dy)\delta x$$
$$+ (\tfrac{1}{3}ax^3 + \tfrac{1}{2}bx^2y + cxy^2 + dx)\delta y ,$$

$$\delta\iint V\partial x\partial y = \iint(\delta V)\partial x\partial y ,$$

ſoll.

weiterung vorhergehender Betrachtunge
mit mehrern veränderlichen Größen würd

$$x_i = x + \delta x \cdot \frac{i}{1} + \delta^2 x \cdot \frac{i^2}{1.2} + \delta^3 x \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$y_i = y + \delta y \cdot \frac{i}{1} + \delta^2 y \cdot \frac{i^2}{1.2} + \delta^3 y \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$z_i = z + \delta z \cdot \frac{i}{1} + \delta^2 z \cdot \frac{i^2}{1.2} + \delta^3 z \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

u. ſ. f. u. ſ. f.

etzt werden, wodurch p in

$$p_i = p + \delta p \cdot \frac{i}{1} + \delta^2 p \cdot \frac{i^2}{1.2} + \delta^3 p \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots$$

rgeht. Dies ſtimmt offenbar ganz mit dem in (A.) be-
delten Falle überein. Die Variationen von x, y,
... müſſen als ganz willkührliche Functionen dieſer Grö-
, und die Variationen von p als durch jene herbeige-
rt gedacht werden, ſo daß ſie von denſelben abhängen,
d durch ſie ausgedrückt werden können (A.). Ferner
n man aber auch in obige Gleichung, die abſolut-unab-
gigen Größen ungeändert laſſend, für p die Reihe

$$p_i = p + \delta p \cdot \frac{i}{1} + \delta^2 p \cdot \frac{i^2}{1.2} + \delta^3 p \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

δp, $\delta^2 p$, $\delta^3 p$, ... ganz willkührliche Functionen von
ind, die alſo jetzt nicht durch die Variationen von x, y,
... beſtimmt werden, ſetzen, und endlich kann man ſich
uch auf dieſe beiden Arten zu gleicher Zeit variirt denken,
welchem Falle aber die Variationen von x, y, z, ...
bt bloß auf p allein, ſondern auch auf deſſen willkühr-
e Variationen eine Wirkung ausüben. Wir wollen,
die Begriffe zu fixiren, dieſe drei Arten der Variatio-
von p von einander unterſcheiden, indem wir die erſte
ſecundäre Variationen nennen und durch δ_1 bezeich-
, die zweite und dritte Art dagegen primitive und
ammengeſetzte Variationen nennen, und durch δ,
bezeichnen wollen.

18. Die in (A.) ausführlich betrachteten Variationen
V waren hiernach ſecundäre Variationen, und der in
.) bewieſene wichtige Satz ſcheint nach der dortigen Dar-
ung nur auf ſolche Variationen anwendbar zu ſeyn, da
lediglich die Zurückführung der Variationen von V auf
Variationen der abſolut-unabhängigen Größen voraus-

... Differentialquotienten $\frac{\partial^k}{\partial^k}$ vo
y, z, ... und letzteren Größen, ein

$$\varphi'\left(\frac{\partial^k p}{\partial^k}, x, y, z, \ldots\right)$$

statt finden. Wird nun, indem x,
ganz ungeändert bleiben, für p in die
Reihe

$$p_i = p + \delta p \cdot \frac{i}{1} + \delta^2 p \cdot \frac{i^2}{1.2} + \delta^3 p$$

wo alle Variationen ganz willkührliche
sind, gesetzt; so geht diese Gleichung i

$$\varphi(p_i, x, y, z, \ldots) =$$

und folglich dadurch die zweite offenba

$$\varphi'\left(\frac{\partial^k p_i}{\partial^k}, x, y, z, \ldots\right.$$

über, indem diese Gleichung in beiden
ganz gleiche Weise aus der ersten abg
nun aber

$$\frac{\partial^k p_i}{\partial^k} =$$

$$\frac{\partial^k p}{\partial^k} + \frac{\partial^k \delta p}{\partial^k} \cdot \frac{i}{1} + \frac{\partial^k \delta^2 p}{\partial^k} \cdot \frac{i^2}{1.2} + \frac{\partial^k \delta^3 p}{\partial^k}.$$

ist; so erhellet, daß durch die Variation von
quotient $\frac{\partial^k p}{\ldots}$ in ...

in (11.). Zugleich erhellt hieraus, daß die primitiven Va-
onen der relativ-unabhängigen veränderlichen Größen
, wie dies bei den Variationen der absolut-unabhängi-
Größen der Fall ist (12.), als constant zu betrachten
sondern immer als ganz willkührliche Functionen von
trachtet werden müssen.

19. Auch in Bezug auf zusammengesetzte Variationen
sich dieser Satz auf folgende Art rechtfertigen. Zu-
setze man p_i für p; so werden die beiden obigen
ichungen:

$$\ldots, x, y, z, \ldots) = 0, \quad \ldots \left(\frac{\partial p}{\partial t}, \ldots, x_i, y_i, z_i, \ldots\right) = 0,$$

wie vorher. Werden nun aber x_i, y_i, z_i, ... für
y, z, ... gesetzt; so gehen, wie wenn (A.) gesehen
n, mit Anwendung der eingeführten Zeichen (17.),
δp, $\delta^2 p$, $\delta^3 q$, ... über in:

$$+ \delta_i p \cdot \frac{i}{1} + \delta_i{}^2 p \cdot \frac{i^2}{1.2} + \delta_i{}^3 p \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$+ \delta_i \delta p \cdot \frac{i}{1} + \delta_i{}^2 \delta p \cdot \frac{i^2}{1.2} + \delta_i{}^3 \delta p \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$+ \delta_i \delta^2 p \cdot \frac{i}{1} + \delta_i{}^2 \delta^2 p \cdot \frac{i^2}{1.2} + \delta_i{}^3 \delta^2 p \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$+ \delta_i \delta^3 p \cdot \frac{i}{1} + \delta_i{}^2 \delta^3 p \cdot \frac{i^2}{1.2} + \delta_i{}^3 \delta^3 p \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

u. s. f. u. s. f.

aß also, wenn dies in die Reihe p_i (18.) für p, δp,
, $\delta^2 p$, ... gesetzt, und nach i geordnet wird, diese
ihe in

$$p$$
$$+ (\delta p + \delta_i p) \cdot \frac{i}{1}$$
$$+ (\delta^2 p + 2\delta_i \delta p + \delta_i{}^2 p) \cdot \frac{i^2}{1.2}$$
$$+ (\delta^3 p + 3\delta_i \delta^2 p + 3\delta_i{}^2 \delta p + \delta_i{}^3 p) \cdot \frac{i^3}{1.2.3}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

rgeht, und folglich

nen. Wird alſo von der Varia
iſt (9.)

$$\delta V = \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\delta y + \left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)\delta$$

Aber allgemein

$$\delta y_k = \delta\left(\frac{\partial^k y}{\partial x^k}\right) =$$

Alſo

$$\delta V = \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\delta y + \left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)\frac{\partial \delta y}{\partial x} +$$

Ferner iſt

$$\delta^2 V =$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\delta^2 y + \left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)\delta^2 y_1 + \left(\frac{\partial V}{\partial y_2}\right)$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)\delta y^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial y_1}\delta y\,\delta$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2}\right)\delta$$

$$\delta^2 V =$$

$$\left.\right) \delta^2 y + \left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right) \frac{\partial \delta^2 y}{\partial x} + \left(\frac{\partial V}{\partial y_2}\right) \frac{\partial^2 \delta^2 y}{\partial x^2} + \ldots.$$

$$\left.\right) \delta y^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y_1} \delta y \frac{\partial \delta y}{\partial x} + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y_2} \delta y \frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2} + \ldots.$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2}\right)\left(\frac{\partial \delta y}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y_1 \partial y_2} \frac{\partial \delta y}{\partial x} \frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2} + \ldots.$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y_2^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2}\right)^2 + \ldots.$$

. . . . . .

r die Anwendung der Variationsrechnung iſt bloß ite Variation noch von Wichtigkeit, daher wir auch bei derſelben ſtehen bleiben.

Sey ferner

$$V = f(x, y, y_1, y_2, \ldots; z, z_1, z_2, \ldots),$$

z Functionen von x ſind, und die Differentialquo- von y und z wie vorher bezeichnet werden. Ganz liche Art wie vorher erhält man

$$= \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) \delta y + \left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right) \frac{\partial \delta y}{\partial x} + \left(\frac{\partial V}{\partial y_2}\right) \frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2} + \ldots.$$

$$+ \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right) \delta z + \left(\frac{\partial V}{\partial z_1}\right) \frac{\partial \delta z}{\partial x} + \left(\frac{\partial V}{\partial z_2}\right) \frac{\partial^2 \delta z}{\partial x^2} + \ldots.$$

$$\delta^2 V =$$

$$\left.\frac{V}{y}\right) \delta^2 y + \left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right) \frac{\partial \delta^2 y}{\partial x} + \left(\frac{\partial V}{\partial y^2}\right) \frac{\partial^2 \delta^2 y}{\partial x^2} + \ldots.$$

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right) \delta y^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y_1} \delta y \frac{\partial \delta y}{\partial x} + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y_2} \delta y \frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2} + \ldots.$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2}\right)\left(\frac{\partial \delta y}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y_1 \partial y_2} \frac{\partial \delta y}{\partial x} \frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2} + \ldots.$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y_2^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2}\right)^2 + \ldots.$$

. . . . . .

wo das Geſetz ſogleich in die Au
mehrere relativ-unabhängige ver
dehnt werden kann.

23. Variiren aber auch die abſ
derlichen Größen; ſo müſſen dieſe
weitläufiger ausfallen. Eine vollſt
dieſes Gegenſtandes geſtattet hier
müſſen folgende Bemerkungen gen
tionen von V bloß in Bezug auf
Größen genommen; ſo ſollen ſie d
Alle Variationen dagegen, welch
lut-unabhängigen Größen genom
durch δ_0 andeuten. Setzt man
s_i, ... für p, q, r, s, ...;

$$\mathfrak{L}(x, y, z, u, \ldots; p_i, q$$

$$= V + \delta_\varrho V \cdot \frac{i}{1} + \delta_\varrho^2 V \cdot \frac{i^2}{1.2} -$$

$$\ldots + \delta_\varrho^$$

Werden nun ferner x_i, y_i,
z, u, ... geſetzt: ſo geben V.

$$\delta_\varrho{}^2V + \delta_\alpha\delta_\varrho{}^2V.\frac{i}{1} + \delta_\alpha{}^2\delta{}^2V.\frac{i^2}{1.2} + \delta_\alpha{}^3\delta_\varrho{}^2V.\frac{i^3}{1.2.3} + \ldots.$$

$$\ldots + \delta_\alpha{}^n\delta_\varrho{}^2V.\frac{i^n}{1.2\ldots n} + \ldots;$$

$$\delta_\varrho{}^3V + \delta_\alpha\delta_\varrho{}^3V.\frac{i}{1} + \delta_\alpha{}^2\delta_\varrho{}^3V.\frac{i^2}{1.2} + \delta_\alpha{}^3\delta_\varrho{}^3V.\frac{i^3}{1.2.3} + \ldots.$$

$$\ldots + \delta_\alpha{}^n\delta_\varrho{}^3V.\frac{i^n}{1.2\ldots n} + \ldots;$$

. . . . . .

$$\delta_\varrho{}^kV + \delta_\alpha\delta_\varrho{}^kV.\frac{i}{1} + \delta_\alpha{}^2\delta_\varrho{}^kV.\frac{i^2}{1.2} + \delta_\alpha{}^3\delta_\varrho{}^kV.\frac{i^3}{1.2.3} + \ldots.$$

$$\ldots + \delta_\alpha{}^n\delta_\varrho{}^kV.\frac{i^n}{1.2\ldots n} + \ldots;$$

. . . . . .

und folglich, wenn man dies in obige Gleichung substituirt und nach Potenzen von i ordnet:

$$V_i =$$

$$V + \delta_\alpha V.\frac{i}{1} + \delta_\alpha{}^2V.\frac{i^2}{1.2} + \delta_\alpha{}^3V.\frac{i^3}{1.2.3} + \ldots.$$

$$+ \delta_\varrho V.\frac{i}{1} + \delta_\alpha\delta_\varrho V.\frac{i^2}{1.1} + \delta_\alpha{}^2\delta_\varrho V.\frac{i^3}{1.2.1} + \ldots.$$

$$+ \delta_\varrho{}^2V.\frac{i^2}{1.2} + \delta_\alpha\delta_\varrho{}^2V.\frac{i^3}{1.1.2} + \ldots.$$

$$+ \delta_\varrho{}^3V.\frac{i^3}{1.2.3} + \ldots.$$

$$= V + \delta V.\frac{i}{1} + \delta^2V.\frac{i^2}{1.2} + \delta^3V.\frac{i^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Folglich, wenn man den Coefficienten von $\frac{i^n}{1.2\ldots n}$ entwickelt,

$$\delta^nV =$$

$$\delta_\alpha{}^nV + \frac{n}{1}\delta_\alpha{}^{n-1}\delta_\varrho V + \frac{n(n-1)}{1.2}\delta_\alpha{}^{n-2}\delta_\varrho{}^2V + \ldots.$$

$$\ldots + \frac{n(n-1)}{1.2}\delta_\alpha{}^2\delta_\varrho{}^{n-2}V + \frac{n}{1}\delta_\alpha\delta_\varrho{}^{n-1}V + \delta_\varrho{}^nV.$$

Also z. B.

$$\delta V = \delta_\alpha V + \delta_\varrho V,$$

$$\delta^2V = \delta_\alpha{}^2V + 2\delta_\alpha\delta_\varrho V + \delta_\varrho{}^2V,$$

$$\delta^3V = \delta_\alpha{}^3V + 3\delta_\alpha{}^2\delta_\varrho V + 3\delta_\alpha\delta_\varrho{}^2V + \delta_\varrho{}^3V;$$

u. s. f. u. s. f.

Werden also bei den in (21.) und (22.) entwickelten ersten Variationen auch die Variationen der absolut- und

Größen berücksichtigt; so ist beide Ma
$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) \delta x$ beizufügen. Will man sich obig
birklichen Entwickelung der Variationen
t man wohl zu merken, daß, wenn man
n δ_a variirt, alle Variationen secundä
ch also zur Vermeidung jeder Irrung d
edienen muß, indem man sonst z. B. lei
en könnte, statt $\delta\delta p$ (eigentlich $\delta_1 \delta p$)
le Differentialquotienten, so wie alle pr
n der relativ = unabhängigen Größen
tionen zu behandeln, z. B. δp von p,
r, u. s. f., welches wohl zu beachten ist.
ewiesenen Sätze finden hierbei ihre Anw
atz in (11. 18. 19.) dient, wie gewöhnl
eduction. Mehr Ausführlichkeit gestat
nicht.

iationen unbestimmter Int

$$\delta V = \delta \int v \partial x = \int (\delta v) \partial x,$$
$$\delta^2 V = \delta^2 \int v \partial x = \int (\delta^2 v) \partial x,$$
$$\delta^3 V = \delta^3 \int v \partial x = \int (\delta^3 v) \partial x,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\delta^n V = \delta^n \int v \partial x = \int (\delta^n v) \partial x,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Integrale von $x = a$ bis $x = b$ genommen, da ſich Variationen auf den zwiſchen dieſen Gränzen genommenen beſtimmten Werth von $\int v \partial x$ beziehen.

Iſt eben ſo v eine Function der beiden abſolut-unabhängigen Größen x, y, und relativ-unabhängiger Größen, und

$$V = \int v \partial x \partial y,$$

das Integral zwiſchen den Gränzen $x = a$, $x = b$; $= a'$, $y = b'$ genommen; ſo iſt auf ähnliche Art wie vorher:

$$\Delta = \int (v + \delta v . \frac{i}{1} + \delta^2 v . \frac{i^2}{1.2} + \delta^3 v . \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots) \partial x \partial y$$
$$= \int v \partial x \partial y + \frac{i}{1} \int (\delta v) \partial x \partial y + \frac{i^2}{1.2} \int (\delta^2 v) \partial x \partial y + \frac{i^3}{1.2.3} \int (\delta^3 v) \partial x \partial y + \ldots$$

Alſo

$$\delta V = \delta \int v \partial x \partial y = \int (\delta v) \partial x \partial y,$$
$$\delta^2 V = \delta^2 \int v \partial x \partial y = \int (\delta^2 v) \partial x \partial y,$$
$$\delta^3 V = \delta^3 \int v \partial x \partial y = \int (\delta^3 v) \partial x \partial y,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\delta^n V = \delta^n \int v \partial x \partial y = \int (\delta^n v) \partial x \partial y,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

die Integrale zwiſchen den gegebenen Gränzen genommen. Wie ſich dies auf mehrere abſolut-unabhängige Größen erweitern läßt, fällt in die Augen. Noch iſt hier ausdrücklich zu bemerken, daß bei der allgemeinen Entwickelung der Integrale in der letzten Reihe, ohne Bezug auf einen beſtimmten Werth von $\int v \partial x$ oder $\int v \partial x \partial y$ zwiſchen gegebenen Gränzen die Variationen der abſolut-unabhängigen Größen als conſtant zu betrachten ſind (14. 16.). Wenn aber alle Variationen auf einen beſtimmten Werth von $\int v \partial x$ oder $\int v \partial x \partial y$ bezogen, wie hier; ſo müſſen die Integrale in der letzten Reihe, oder die Variationen der gegebenen Integrale zwiſchen gegebenen Gränzen, zwiſchen

ränzen genommen werden, und dann iſt natür-
., als eine willkührliche Function von x, = δa
, = δb für x = b zu ſetzen.

nz beſonderer Wichtigkeit für die Anwendung
onsrechnung auf die Lehre von dem Größten und
die Entwickelung der erſten Variation unbe-
Integralformeln zwiſchen gegebenen Gränzen,
etzt übergehen.

eyen p, q Functionen von x; ſo iſt nach der
formel Thl. II. S. 783.

$$\int p \frac{\partial^n q}{\partial x^n} \partial x = \int p \frac{\partial \left(\frac{\partial^{n-1} q}{\partial x^{n-1}}\right)}{\partial x} \partial x$$

$$= p \int \frac{\partial \left(\frac{\partial^{n-1} q}{\partial x^{n-1}}\right)}{\partial x} \partial x - \int \partial p \int \frac{\partial \left(\frac{\partial^{n-1} q}{\partial x^{n-1}}\right)}{\partial x} \partial x$$

$$= p \frac{\partial^{n-1} q}{\partial x^{n-1}} - \int \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial^{n-1} q}{\partial x^{n-1}} \partial x .$$

urch ſucceſſive Zerlegung mittelſt dieſer Formel:

$$\frac{\partial^n q}{\partial x^n}$$

$$y_\alpha = \frac{\partial^\alpha y}{\partial x^\alpha},\ z_\beta = \frac{\partial^\beta z}{\partial x^\beta},\ u_\gamma = \frac{\partial^\gamma u}{\partial x^\gamma},\ \ldots$$

e partiellen Differentialquotienten von v in Be-

$$y,\ y_1,\ y_2,\ \ldots\ y_\alpha;$$
$$z,\ z_1,\ z_2,\ \ldots\ z_\beta;$$
$$u,\ u_1,\ u_2,\ \ldots\ u_\gamma;$$

u. ſ. f. n. ſ. f.

Kürze wegen durch

$$Y,\ \overset{1}{Y},\ \overset{2}{Y},\ \ldots\ \overset{\alpha}{Y};$$
$$Z,\ \overset{1}{Z},\ \overset{2}{Z},\ \ldots\ \overset{\beta}{Z};$$
$$U,\ \overset{1}{U},\ \overset{2}{U},\ \ldots\ \overset{\gamma}{U};$$

u. ſ. f. u. ſ. f.

werden. Man ſucht nun $\delta V = \delta \int v \partial x$.

mit δx behaftete Glied, wenn zugleich die Varia-
: abſolut-unabhängigen Größen berückſichtigt wer-
23.)

$$= \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)\delta x = \frac{\partial \int v \partial x}{\partial x}\delta x = v\delta x.$$

n den Variationen der abſolut-unabhängigen
bſtrahirt; ſo iſt dieſes Glied $= o$ zu ſetzen, wie
Obigen ſogleich erhellet. Nach Beſtimmung dieſes
aben wir nun die Variation bloß in Bezug auf die
nabhängigen Größen, als abſolut-unabhängige
, zu entwickeln (23.). Es iſt aber in dieſer Be-
9.):

$$\delta v = Y\delta y + \overset{1}{Y}\delta y_1 + \overset{2}{Y}\delta y_2 + \ldots + \overset{\alpha}{Y}\delta y_\alpha$$
$$+ Z\delta z + \overset{1}{Z}\delta z_1 + \overset{2}{Z}\delta z_2 + \ldots + \overset{\beta}{Z}\delta z_\beta$$
$$+ U\delta u + \overset{1}{U}\delta u_1 + \overset{2}{U}\delta u_2 + \ldots + \overset{\gamma}{U}\delta u_\gamma$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

il überhaupt (18. 19.)

$$\partial^k + \frac{\partial^k}{\partial^k} \cdot \frac{i}{1} + \frac{\partial^k}{\partial^k} \cdot \frac{i}{1.2}$$

und durch die Subſtitution der
zeichneten Reihen für x, y,
Coefficienten von $\frac{i}{1}$, $\frac{i^2}{1.2}$
über in:

$$\frac{\partial^k p}{\partial^k} + \delta_1 \left(\frac{\partial^k p}{\partial^k}\right) \cdot \frac{i}{1} + \delta_1^2$$

$$\frac{\partial^k \delta p}{\partial^k} + \delta_1 \left(\frac{\partial^k \delta p}{\partial^k}\right) \cdot \frac{i}{1} + \delta_1^2$$

$$\frac{\partial^k \delta^2 p}{\partial^k} + \delta_1 \left(\frac{\partial^k \delta^2 p}{\partial^k}\right) \cdot \frac{i}{1} + \delta_1^2$$

$$\frac{\partial^k \delta^3 p}{\partial^k} + \delta_1 \left(\frac{\partial^k \delta^3 p}{\partial^k}\right) \cdot \frac{i}{1} + \delta_1^2$$

u. ſ. f.

und folglich $\frac{\partial^k p_i}{\partial^k}$ in:

$$\frac{\partial^k p}{\partial^k}$$

$$+ \left| \delta \left(\frac{\partial^k p}{\partial^k}\right) + \frac{\partial^k \delta p}{\partial^k} \right) i$$

$$\delta_{11}\left(\frac{\partial^k p}{\partial^k}\right)=\frac{\partial^k \delta p}{\partial^k}+\delta_1\left(\frac{\partial^k p}{\partial^k}\right),$$

$$\delta_{11}^2\left(\frac{\partial^k p}{\partial^k}\right)=\frac{\partial^k \delta^2 p}{\partial^k}+2\delta_1\left(\frac{\partial^k \delta p}{\partial^k}\right)+\delta_1^2\left(\frac{\partial^k p}{\partial^k}\right),$$

$$\delta_{11}^3\left(\frac{\partial^k p}{\partial^k}\right)=\frac{\partial^k \delta^3 p}{\partial^k}+3\delta_1\left(\frac{\partial^k \delta^2 p}{\partial^k}\right)+3\delta_1^2\left(\frac{\partial^k \delta p}{\partial^k}\right)+\delta_1^3\left(\frac{\partial^k p}{\partial^k}\right),$$

u. ſ. f. u. ſ. f.

Folglich nach (11.)

$$\delta_{11}\left(\frac{\partial^k p}{\partial^k}\right)=$$

$$\frac{\partial^k \delta p}{\partial^k}+\frac{\partial^k \delta_1 p}{\partial^k}=\frac{\partial^k(\delta p+\delta_1 p)}{\partial^k}=\frac{\partial^k \delta_{11} p}{\partial^k},$$

$$\delta_{11}^2\left(\frac{\partial^k p}{\partial^k}\right)=$$

$$\frac{\partial^k \delta^2 p}{\partial^k}+2.\frac{\partial^k \delta_1 \delta p}{\partial^k}+\frac{\partial^k \delta_1^2 p}{\partial^k}=\frac{\partial^k(\delta^2 p+2\delta_1\delta p+\delta_1^2 p)}{\partial^k}=\frac{\partial^k \delta_{11}^2 p}{\partial^k},$$

$$\delta_{11}^3\left(\frac{\partial^k p}{\partial^k}\right)=$$

$$\frac{\partial^k \delta^3 p}{\partial^k}+3.\frac{\partial^k \delta_1 \delta^2 p}{\partial^k}+3.\frac{\partial^k \delta_1^2 \delta p}{\partial^k}+\frac{\partial^k \delta_1^3 p}{\partial^k}$$

$$=\frac{\partial^k(\delta^3 p+3\delta_1\delta^2 p+3\delta_1^2\delta p+\delta_1^3 p)}{\partial^k}=\frac{\partial^k \delta_{11}^3 p}{\partial^k},$$

u. ſ. f. u. ſ. f.

ſo daß alſo auch hier

$$\delta_{11}^n\left(\frac{\partial^k p}{\partial^k}\right)=\frac{\partial^k \delta_{11}^n p}{\partial^k}.$$

20. Sey nun

$$V=f(x, y, z, u, \ldots; p, q, r, s, \ldots),$$

wo x, y, z, u, ... als abſolut-, p, q, r, s, ... dagegen als relativ-unabhängig betrachtet werden; ſo kann man ſich V zuerſt auf die Weiſe variirt denken, daß bloß die relativ-unabhängigen Größen variiren, und folglich von den Variationen der abſolut-unabhängigen Größen völlig abſtrahirt wird. In dieſem Falle erleiden alſo die relativ-unabhängigen Größen bloß primitive Variationen, und die Variationen von V ſind offenbar ganz wie in (A.) zu entwickeln, die relativ-unabhängigen Größen als abſolut-unabhängig, die abſolut-unab-

nen. Wird also von der W
ist (9.)

$$\delta V = \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\delta y + \left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right.$$

Aber allgemein

$$\delta y_k = \delta\left(\frac{\partial^k y}{\partial x^k}\right) =$$

Also

$$\delta V = \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\delta y + \left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)\frac{\partial \delta y}{\partial x}$$

Ferner ist

$$\delta^2 V =$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\delta^2 y + \left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)\delta^2 y_1 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right.$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)\delta y^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial y_1}\delta$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2}\right)$$

$$\delta^2 V =$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\delta^2 y + \left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)\frac{\partial \delta^2 y}{\partial x} + \left(\frac{\partial V}{\partial y_2}\right)\frac{\partial^2 \delta^2 y}{\partial x^2} + \ldots.$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)\delta y^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y_1}\delta y \frac{\partial \delta y}{\partial x} + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y_2}\delta y \frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2} + \ldots.$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2}\right)\left(\frac{\partial \delta y}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y_1 \partial y_2}\frac{\partial \delta y}{\partial x}\frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2} + \ldots.$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y_2^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2}\right)^2 + \ldots.$$

. . . . . .

Für die Anwendung der Variationsrechnung ist bloß ie zweite Variation noch von Wichtigkeit, daher wir auch nmer bei derselben stehen bleiben.

22. Sey ferner

$$V = f(x, y, y_1, y_2, \ldots; z, z_1, z_2, \ldots),$$

o y, z Functionen von x sind, und die Differentialquo- enten von y und z wie vorher bezeichnet werden. Ganz uf ähnliche Art wie vorher erhält man

$$\delta V = \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\delta y + \left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)\frac{\partial \delta y}{\partial x} + \left(\frac{\partial V}{\partial y_2}\right)\frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2} + \ldots.$$

$$+ \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)\delta z + \left(\frac{\partial V}{\partial z_1}\right)\frac{\partial \delta z}{\partial x} + \left(\frac{\partial V}{\partial z_2}\right)\frac{\partial^2 \delta z}{\partial x^2} + \ldots.$$

$$\delta^2 V =$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\delta^2 y + \left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)\frac{\partial \delta^2 y}{\partial x} + \left(\frac{\partial V}{\partial y^2}\right)\frac{\partial^2 \delta^2 y}{\partial x^2} + \ldots.$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)\delta y^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y_1}\delta y \frac{\partial \delta y}{\partial x} + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y_2}\delta y \frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2} + \ldots.$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2}\right)\left(\frac{\partial \delta y}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y_1 \partial y_2}\frac{\partial \delta y}{\partial x}\frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2} + \ldots.$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y_2^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2}\right)^2 + \ldots.$$

. . . . . .

wo das Gesetz sogleich in die Auge
mehrere relativ-unabhängige verän
dehnt werden kann.

23. Variiren aber auch die absol
derlichen Größen; so müssen diese G
weitläufiger ausfallen. Eine vollstän
dieses Gegenstandes gestattet hier de
müssen folgende Bemerkungen genüg
tionen von V bloß in Bezug auf di
Größen genommen; so sollen sie dur
Alle Variationen dagegen, welche i
lut-unabhängigen Größen genomm
durch δ_a andeuten. Setzt man zu
$s_i, \ldots$ für $p, q, r, s, \ldots$; so

$$f(x, y, z, u, \ldots; p_i, q_i,$$

$$= V + \delta_\varrho V \cdot \frac{i}{1} + \delta_\varrho^2 V \cdot \frac{i^2}{1.2} +$$

$$\ldots + \delta_\varrho^k V$$

Werden nun ferner x_i, y_i, z_i
$z, u, \ldots$ gesetzt; so gehen V, δ_a

$$\delta_\varrho{}^2V + \delta_\alpha\delta_\varrho{}^2V.\frac{i}{1} + \delta_\alpha{}^2\delta_\varrho{}^2V.\frac{i^2}{1.2} + \delta_\alpha{}^3\delta_\varrho{}^2V.\frac{i^3}{1.2.3} + \ldots.$$

$$\ldots + \delta_\alpha{}^n\delta_\varrho{}^2V.\frac{i^n}{1.2\ldots n} + \ldots;$$

$$\delta_\varrho{}^3V + \delta_\alpha\delta_\varrho{}^3V.\frac{i}{1} + \delta_\alpha{}^2\delta_\varrho{}^3V.\frac{i^2}{1.2} + \delta_\alpha{}^3\delta_\varrho{}^3V.\frac{i^3}{1.2.3} + \ldots.$$

$$\ldots + \delta_\alpha{}^n\delta_\varrho{}^3V.\frac{i^n}{1.2\ldots n} + \ldots;$$

. . . . . .

$$\delta_\varrho{}^kV + \delta_\alpha\delta_\varrho{}^kV.\frac{i}{1} + \delta_\alpha{}^2\delta_\varrho{}^kV.\frac{i^2}{1.2} + \delta_\alpha{}^3\delta_\varrho{}^kV.\frac{i^3}{1.2.3} + \ldots.$$

$$\ldots + \delta_\alpha{}^n\delta_\varrho{}^kV.\frac{i^n}{1.2\ldots n} + \ldots;$$

. . . . . .

ıd folglich, wenn man dies in obige Gleichung ſubſti-irt und nach Potenzen von i ordnet:

$$V_i =$$

$$V + \delta_\alpha V.\frac{i}{1} + \delta_\alpha{}^2V.\frac{i^2}{1.2} + \delta_\alpha{}^3V.\frac{i^3}{1.2.3} + \ldots.$$

$$+ \delta_\varrho V.\frac{i}{1} + \delta_\alpha\delta_\varrho V.\frac{i^2}{1.1} + \delta_\alpha{}^2\delta_\varrho V.\frac{i^3}{1.2.1} + \ldots.$$

$$+ \delta_\varrho{}^2V.\frac{i^2}{1.2} + \delta_\alpha\delta_\varrho{}^2V.\frac{i^3}{1.1.2} + \ldots.$$

$$+ \delta_\varrho{}^3V.\frac{i^3}{1.2.3} + \ldots.$$

$$= V + \delta V.\frac{i}{1} + \delta^2V.\frac{i^2}{1.2} + \delta^3V.\frac{i^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Folglich, wenn man den Coefficienten von $\frac{i^n}{1.2\ldots n}$ ıtwickelt,

$$\delta^nV =$$

$$\delta_\alpha{}^nV + \frac{n}{1}\delta_\alpha{}^{n-1}\delta_\varrho V + \frac{n(n-1)}{1.2}\delta_\alpha{}^{n-2}\delta_\varrho{}^2V + \ldots.$$

$$\ldots + \frac{n(n-1)}{1.2}\delta_\alpha{}^2\delta_\varrho{}^{n-2}V + \frac{n}{1}\delta_\alpha\delta_\varrho{}^{n-1}V + \delta_\varrho{}^nV.$$

Alſo z. B.

$$\delta V = \delta_\alpha V + \delta_\varrho V,$$

$$\delta^2V = \delta_\alpha{}^2V + 2\delta_\alpha\delta_\varrho V + \delta_\varrho{}^2V,$$

$$\delta^3V = \delta_\alpha{}^3V + 3\delta_\alpha{}^2\delta_\varrho V + 3\delta_\alpha\delta_\varrho{}^2V + \delta_\varrho{}^3V;$$

u. ſ. f. u. ſ. f.

Werden alſo bei den in (21.) und (22.) entwickelten er-ten Variationen auch die Variationen der abſolut-unab-

ſetzen. Alle Differentialquotient
Variationen der relativ-unabh
neue Functionen zu behandeln,
q; dr von r, u. ſ. f., welches w
in (10.) bewieſenen Sätze finden
und der Satz in (11. 18. 19.) di
weiterer Reduction. Mehr Aus
der Raum nicht.

C. Variationen unbeſti formeln, zwiſchen beſt genomme

24. Sey v eine Function de
hängigen Größe x, und relativ-un

$$V = \int v \partial x ,$$

das Integral von x = a bis x =
man ſich nun v auf irgend eine A
v_i, und V in

$$\delta V = \delta \int v \partial x = \int (\delta v) \partial x ,$$
$$\delta^2 V = \delta^2 \int v \partial x = \int (\delta^2 v) \partial x ,$$
$$\delta^3 V = \delta^3 \int v \partial x = \int (\delta^3 v) \partial x ,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\delta^n V = \delta^n \int v \partial x = \int (\delta^n v) \partial x ,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

tegrale von $x = a$ bis $x = b$ genommen, da ſich riationen auf den zwiſchen dieſen Gränzen genom- beſtimmten Werth von $\int v \partial x$ beziehen.

t eben ſo v eine Function der beiden abſolut-unab- en Größen x, y, und relativ-unabhängiger Grö- ınd

$$V = \int v \partial x \partial y ,$$

ntegral zwiſchen den Gränzen $x = a$, $x = b$; $y = b'$ genommen; ſo iſt auf ähnliche Art wie :

$$v + \delta v . \frac{i}{1} + \delta^2 v . \frac{i^2}{1.2} + \delta^3 v . \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots) \partial x \partial y$$
$$\partial y + \frac{i}{1} \int (\delta v) \partial x \partial y + \frac{i^2}{1.2} \int (\delta^2 v) \partial x \partial y + \frac{i^3}{1.2.3} \int (\delta^3 v) \partial x \partial y + \ldots$$

$$\delta V = \delta \int v \partial x \partial y = \int (\delta v) \partial x \partial y ,$$
$$\delta^2 V = \delta^2 \int v \partial x \partial y = \int (\delta^2 v) \partial x \partial y ,$$
$$\delta^3 V = \delta^3 \int v \partial x \partial y = \int (\delta^3 v) \partial x \partial y ,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\delta^n V = \delta^n \int v \partial x \partial y = \int (\delta^n v) \partial x \partial y ,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

ıtegrale zwiſchen den gegebenen Gränzen genommen. ch dies auf mehrere abſolut-unabhängige Größen er- ı läßt, fällt in die Augen. Noch iſt hier ausdrücklich ierken, daß bei der allgemeinen Entwickelung der ale in der letzten Reihe, ohne Bezug auf einen be- en Werth von $\int v \partial x$ oder $\int v \partial x \partial y$ zwiſchen gege- Gränzen die Variationen der abſolut-unabhängigen n als conſtant zu betrachten ſind (14. 16.). Wer- er alle Variationen auf einen beſtimmten Werth von oder $\int v \partial x \partial y$ bezogen, wie hier; ſo müſſen die In- in der letzten Reihe, oder die Variationen der ge- n Integrale zwiſchen gegebenen Gränzen, zwiſchen

Reductionsformel Thl. II. S. 783.

$$\int p \frac{\partial^n q}{\partial x^n} \partial x = \int p \frac{\partial \left(\frac{\partial^{n-1} q}{\partial x^{n-1}} \right.}{\partial x}$$

$$= p \int \frac{\partial \left(\frac{\partial^{n-1} q}{\partial x^{n-1}} \right)}{\partial x} \partial x - \int \partial p$$

$$= p \frac{\partial^{n-1} q}{\partial x^{n-1}} - \int \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial^{n-1} q}{\partial x^{n-1}} \partial x$$

Folglich, durch successive Zerlegung

$$\int p \frac{\partial^n q}{\partial x^n} \partial x =$$

$$p \frac{\partial^{n-1} q}{\partial x^{n-1}} - \int \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial^{n-1} q}{\partial x^{n-1}} \partial x$$

$$= p \frac{\partial^{n-1} q}{\partial x^{n-1}} - \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial^{n-2} q}{\partial x^{n-2}} + \int \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^{n-2} q}{\partial x^{n-2}}$$

$$= p \frac{\partial^{n-1} q}{\partial x^{n-1}} - \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial^{n-2} q}{\partial x^{n-2}} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^{n-3} q}{\partial x^{n-3}} -$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$= p \frac{\partial^{n-1} q}{\partial x^{n-1}} - \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial^{n-2} q}{\partial x^{n-1}} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^{n-3} q}{\partial x^{n-3}} -$$

$$\cdots \mp \frac{\partial}{\partial}$$

$$y_\alpha = \frac{\partial^\alpha y}{\partial x^\alpha},\ z_\beta = \frac{\partial^\beta z}{\partial x^\beta},\ u_\gamma = \frac{\partial^\gamma u}{\partial x^\gamma}, \ldots$$

ist. Die partiellen Differentialquotienten von v in Bezug auf

$$y,\ y_1,\ y_2, \ldots . y_\alpha ;$$
$$z,\ z_1,\ z_2, \ldots . z_\beta ;$$
$$u,\ u_1,\ u_2, \ldots . u_\gamma ;$$

u. s. f. n. f. f.

sollen der Kürze wegen durch

$$Y,\ \overset{1}{Y},\ \overset{2}{Y}, \ldots . \overset{\alpha}{Y} ;$$
$$Z,\ \overset{1}{Z},\ \overset{2}{Z}, \ldots . \overset{\beta}{Z} ;$$
$$U,\ \overset{1}{U},\ \overset{2}{U}, \ldots . \overset{\gamma}{U} ;$$

u. s. f. u. s. f.

bezeichnet werden. Man sucht nun $\delta V = \delta \int v \partial x$.

Das mit δx behaftete Glied, wenn zugleich die Variationen der absolut-unabhängigen Größen berücksichtigt werden, ist (23.)

$$= \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) \delta x = \frac{\partial \int v \partial x}{\partial x} \delta x = v \delta x .$$

Wird von den Variationen der absolut-unabhängigen Größen abstrahirt; so ist dieses Glied $= o$ zu setzen, wie aus dem Obigen sogleich erhellet. Nach Bestimmung dieses Gliedes haben wir nun die Variation bloß in Bezug auf die relativ-unabhängigen Größen, als absolut-unabhängige betrachtet, zu entwickeln (23.). Es ist aber in dieser Beziehung (9.):

$$\begin{aligned} \delta v = \quad & Y\delta y + \overset{1}{Y}\delta y_1 + \overset{2}{Y}\delta y_2 + \ldots + \overset{\alpha}{Y}\delta y_\alpha \\ & + Z\delta z + \overset{1}{Z}\delta z_1 + \overset{2}{Z}\delta z_2 + \ldots + \overset{\beta}{Z}\delta z_\beta \\ & + U\delta u + \overset{1}{U}\delta u_1 + \overset{2}{U}\delta u_2 + \ldots + \overset{\gamma}{U}\delta u_\gamma \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

oder, weil überhaupt (18. 19.)

$$\ldots + Y\delta y + Y\frac{\partial \delta y}{\partial x} + Y$$

$$+ Z\delta z + Z\frac{\partial \delta z}{\partial x} + Z$$

$$+ U\delta u + U\frac{\partial \delta u}{\partial x} + U$$

. . . . . .

Es iſt aber $\delta \int v\partial x = \int (\delta$
man alſo, und fügt, um auch δ
ſchon oben beſtimmte Glied $v\partial x$

$$\delta V = v\delta x + \int Y\delta y\,\partial x + \int Z\delta z$$

$$+ \int \overset{1}{Y}\frac{\partial \delta y}{\partial x}\partial x + \int \overset{2}{Y}\frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2}\partial x$$

$$+ \int \overset{1}{Z}\frac{\partial \delta z}{\partial x}\partial x + \int \overset{2}{Z}\frac{\partial^2 \delta z}{\partial x^2}\partial x$$

$$+ \int \overset{1}{U}\frac{\partial \delta u}{\partial x}\partial x + \int \overset{2}{U}\frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2}\partial x$$

. . . . . .

Folglich nach (25.) $\delta V =$

$$v\delta x + \int Y\delta y\,\partial x + \int Z\delta z\,\partial$$

$$-\int \frac{\partial^1 Z}{\partial x}\,\delta z\,\partial x + {}^1Z\,\delta z$$

$$-\int \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\,\delta z\,\partial x + {}^2Z\frac{\partial \delta z}{\partial x} - \frac{\partial^2 Z}{\partial x}\,\delta z$$

$$-\int \frac{\partial^3 Z}{\partial x^3}\,\delta z\,\partial x + {}^3Z\frac{\partial^2 \delta z}{\partial x^2} - \frac{\partial Z}{\partial x}\cdot\frac{\partial \delta z}{\partial x} + \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\,\delta z$$

. . . . . .

$$\pm\int \frac{\partial^\beta Z}{\partial x^\beta}\,\delta z\,\partial x + {}^\beta Z\frac{\partial^{\beta-1}\delta z}{\partial x^{\beta-1}} - \frac{\partial Z}{\partial x}\frac{\partial^{\beta-2}\delta z}{\partial x^{\beta-2}} + \ldots \mp \frac{\partial^{\beta-1} Z}{\partial x^{\beta-1}}\,\delta z$$

$$-\int \frac{\partial^1 U}{\partial x}\,\delta u\,\partial x + {}^1U\,\delta u$$

$$-\int \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\,\delta u\,\partial x + {}^2U\frac{\partial \delta u}{\partial x} - \frac{\partial^2 U}{\partial x}\,\delta x$$

$$-\int \frac{\partial^3 U}{\partial x^3}\,\delta u\,\partial x + {}^3U\frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} - \frac{\partial U}{\partial x}\cdot\frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\,\delta u$$

. . . . . .

$$\int \frac{\partial^\gamma U}{\partial x^\gamma}\,\delta u\,\partial x + {}^\gamma U\frac{\partial^{\gamma-1}\delta u}{\partial x^{\gamma-1}} - \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial^{\gamma-2}\delta u}{\partial x^{\gamma-2}} + \ldots \mp \frac{\partial^{\gamma-1} U}{\partial x^{\gamma-1}}\,\delta u$$

. . . . . .

$$\mathrm{v}\,\partial x$$

$$+\int \delta y\left\{Y - \frac{\partial^1 Y}{\partial x} + \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 Y}{\partial x^3} + \ldots \pm \frac{\partial^\alpha Y}{\partial x^\alpha}\right\}\partial x$$

$$+\int \delta z\left\{Z - \frac{\partial^1 Z}{\partial x} + \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 Z}{\partial x^3} + \ldots \pm \frac{\partial^\beta Z}{\partial x^\beta}\right\}\partial x$$

$$+\int \delta u\left\{U - \frac{\partial^1 U}{\partial x} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \ldots \pm \frac{\partial^\gamma U}{\partial x^\gamma}\right\}\partial x$$

. . . . . .

$$+\ \delta y\left\{{}^1Y - \frac{\partial^2 Y}{\partial x} + \frac{\partial^3 Y}{\partial x^2} - \ldots \mp \frac{\partial^{\alpha-1} Y}{\partial x^{\alpha-1}}\right\}$$

$$+\frac{\partial \delta y}{\partial x}\left\{{}^2Y - \frac{\partial^3 Y}{\partial x} + \ldots \pm \frac{\partial^{\alpha-2} Y}{\partial x^{\alpha-2}}\right\}$$

$$+\frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2}\left\{{}^3Y - \ldots \mp \frac{\partial^{\alpha-3} Y}{\partial x^{\alpha-3}}\right\}$$

. . . . . .

$$+\frac{\partial^{\alpha-1}\delta y}{\partial x^{\alpha-1}}\,{}^\alpha Y$$

ngegen als constant betrachtet. In dieser Be-
rdient folgender Fall wegen seiner vielfachen
g besonders betrachtet zu werden.

ey nämlich

$$V = f(x, y, y_1, y_2, y_3, \ldots),$$

solut-unabhängig, y dagegen als Function von
wird, und $y_1, y_2, y_3, \ldots$ die successiven
quotienten von y in Bezug auf x bezeich-
d also von der Variation von x abstrahirt; so

$$\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\delta y + \left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)\delta y_1 + \left(\frac{\partial V}{\partial y_2}\right)\delta y_2 + \cdots$$

lgemein

$$\delta y_k = \delta\left(\frac{\partial^k y}{\partial x^k}\right) = \frac{\partial^k \delta y}{\partial x^k} \quad (18.).$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \quad}\right)\delta y + \left(\frac{\partial V}{\partial \quad}\right)\frac{\partial \delta y}{\partial \quad} + \left(\frac{\partial V}{\partial \quad}\right)\frac{\partial^2 \delta y}{\partial \quad} + \cdots$$

$$\delta^2 V =$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\delta^2 y + \left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)\frac{\partial \delta^2 y}{\partial x} + \left(\frac{\partial V}{\partial y_2}\right)\frac{\partial^2 \delta^2 y}{\partial x^2} + \ldots.$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)\delta y^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y_1}\delta y \frac{\partial \delta y}{\partial x} + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y_2}\delta y \frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2} + \ldots.$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2}\right)\left(\frac{\partial \delta y}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y_1 \partial y_2}\frac{\partial \delta y}{\partial x}\frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2} + \ldots.$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y_2^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2}\right)^2 + \ldots.$$

. . . . . .

Für die Anwendung der Variationsrechnung ist bloß weite Variation noch von Wichtigkeit, daher wir auch er bei derselben stehen bleiben.

22. Sey ferner

$$V = f(x, y, y_1, y_2, \ldots; z, z_1, z_2, \ldots);$$

, z Functionen von x sind, und die Differentialquo- en von y und z wie vorher bezeichnet werden. Ganz hnliche Art wie vorher erhält man

$$= \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\delta y + \left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)\frac{\partial \delta y}{\partial x} + \left(\frac{\partial V}{\partial y_2}\right)\frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2} + \ldots.$$

$$+ \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)\delta z + \left(\frac{\partial V}{\partial z_1}\right)\frac{\partial \delta z}{\partial x} + \left(\frac{\partial V}{\partial z_2}\right)\frac{\partial^2 \delta z}{\partial x^2} + \ldots.$$

$$\delta^2 V =$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\delta^2 y + \left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)\frac{\partial \delta^2 y}{\partial x} + \left(\frac{\partial V}{\partial y^2}\right)\frac{\partial^2 \delta^2 y}{\partial x^2} + \ldots.$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)\delta y^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y_1}\delta y \frac{\partial \delta y}{\partial x} + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y_2}\delta y \frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2} + \ldots.$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2}\right)\left(\frac{\partial \delta y}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y_1 \partial y_2}\frac{\partial \delta y}{\partial x}\frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2} + \ldots.$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y_2^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2}\right)^2 + \ldots.$$

. . . . . .

wo das Geſetz ſogleich in die Au
mehrere relativ-unabhängige ver
dehnt werden kann.

23. Variiren aber auch die abſ
derlichen Größen; ſo müſſen dieſe
weitläufiger ausfallen. Eine vollſt
dieſes Gegenſtandes geſtattet hier
müſſen folgende Bemerkungen gen
tionen von V bloß in Bezug auf
Größen genommen; ſo ſollen ſie d
Alle Variationen dagegen, welche
lut-unabhängigen Größen genom
durch δ_0 andeuten. Setzt man
s_i, ... für p, q, r, s, ...; ſ

$$f(x, y, z, u, \ldots ; p_i, q_i$$

$$= V + \delta_\varrho V . \frac{i}{1} + \delta_\varrho^2 V . \frac{i^2}{1.2} +$$

$$\ldots + \delta_\varrho^k$$

Werden nun ferner x_i, y_i,
z, u, ... geſetzt: ſo geben V

$$\delta_\varrho{}^2V + \delta_\alpha\delta_\varrho{}^2V \cdot \frac{i}{1} + \delta_\alpha{}^2\delta{}^2V \cdot \frac{i^2}{1.2} + \delta_\alpha{}^3\delta_\varrho{}^2V \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots.$$

$$\ldots + \delta_\alpha{}^n\delta_\varrho{}^2V \cdot \frac{i^n}{1.2\ldots n} + \ldots;$$

$$\delta^3V + \delta_\alpha\delta_\varrho{}^3V \cdot \frac{i}{1} + \delta_\alpha{}^2\delta_\varrho{}^3V \cdot \frac{i^2}{1.2} + \delta_\alpha{}^3\delta_\varrho{}^3V \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots.$$

$$\ldots + \delta_\alpha{}^n\delta_\varrho{}^3V \cdot \frac{i^n}{1.2\ldots n} + \ldots;$$

. . . . . .

$$\delta^kV + \delta_\alpha\delta_\varrho{}^kV \cdot \frac{i}{1} + \delta_\alpha{}^2\delta_\varrho{}^kV \cdot \frac{i^2}{1.2} + \delta_\alpha{}^3\delta_\varrho{}^kV \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots.$$

$$\ldots + \delta_\alpha{}^n\delta_\varrho{}^kV \cdot \frac{i^n}{1.2\ldots n} + \ldots;$$

. . . . . .

ıd folglich, wenn man dies in obige Gleichung ſubſti-irt und nach Potenzen von i ordnet:

$$V_i =$$

$$V + \delta_\alpha V \cdot \frac{i}{1} + \delta_\alpha{}^2V \cdot \frac{i^2}{1.2} + \delta_\alpha{}^3V \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots.$$

$$+ \delta_\varrho V \cdot \frac{i}{1} + \delta_\alpha\delta_\varrho V \cdot \frac{i^2}{1.1} + \delta_\alpha{}^2\delta_\varrho V \cdot \frac{i^3}{1.2.1} + \ldots.$$

$$+ \delta_\varrho{}^2V \cdot \frac{i^2}{1.2} + \delta_\alpha\delta_\varrho{}^2V \cdot \frac{i^3}{1.1.2} + \ldots.$$

$$+ \delta_\varrho{}^3V \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots.$$

$$= V + \delta V \cdot \frac{i}{1} + \delta^2V \cdot \frac{i^2}{1.2} + \delta^3V \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Folglich, wenn man den Coefficienten von $\frac{i^n}{1.2\ldots n}$ twickelt,

$$\delta^nV =$$

$$_nV + \frac{n}{1}\delta_\alpha{}^{n-1}\delta_\varrho V + \frac{n(n-1)}{1.2}\delta_\alpha{}^{n-2}\delta_\varrho{}^2V + \ldots.$$

$$\ldots + \frac{n(n-1)}{1.2}\delta_\alpha{}^2\delta_\varrho{}^{n-2}V + \frac{n}{1}\delta_\alpha\delta_\varrho{}^{n-1}V + \delta_\varrho{}^nV.$$

Alſo z. B.

$$\delta V = \delta_\alpha V + \delta_\varrho V,$$

$$\delta^2V = \delta_\alpha{}^2V + 2\delta_\alpha\delta_\varrho V + \delta_\varrho{}^2V,$$

$$\delta^3V = \delta_\alpha{}^3V + 3\delta_\alpha{}^2\delta_\varrho V + 3\delta_\alpha\delta_\varrho{}^2V + \delta_\varrho{}^3V,$$

u. ſ. f. u. ſ. f.

Werden alſo bei den in (21.) und (22.) entwickelten er-en Variationen auch die Variationen der abſolut-unab-

rößen berückſichtigt; ſo iſt beide Mal noch
$\frac{V}{x}\Big) \delta x$ beizufügen. Will man ſich obiger For-
rklichen Entwickelung der Variationen bedie-
man wohl zu merken, daß, wenn man unter
δ_a variirt, alle Variationen ſecundär ſind,
alſo zur Vermeidung jeder Irrung des Zei-
ienen muß, indem man ſonſt z. B. leicht ver-
könnte, ſtatt $\delta\delta p$ (eigentlich $\delta_1\delta p$) $\delta^2 p$ zu
Differentialquotienten, ſo wie alle primitive
der relativ-unabhängigen Größen ſind als
onen zu behandeln, z. B. δp von p, δq von
, u. ſ. f., welches wohl zu beachten iſt. Die
ieſenen Sätze finden hierbei ihre Anwendung
z in (11. 18. 19.) dient, wie gewöhnlich, zu
duction. Mehr Ausführlichkeit geſtattet hier
icht.

ationen unbeſtimmter Integral-
zwiſchen beſtimmten Grenzen.

$$\delta V = \delta \int v \partial x = \int (\delta v) \partial x ,$$
$$\delta^2 V = \delta^2 \int v \partial x = \int (\delta^2 v) \partial x ,$$
$$\delta^3 V = \delta^3 \int v \partial x = \int (\delta^3 v) \partial x ,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\delta^n V = \delta^n \int v \partial x = \int (\delta^n v) \partial x ,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

ie Integrale von $x = a$ bis $x = b$ genommen, da ſich ie Variationen auf den zwiſchen dieſen Gränzen genom- nenen beſtimmten Werth von $\int v \partial x$ beziehen.

Iſt eben ſo v eine Function der beiden abſolut-unab- ängigen Größen x, y, und relativ-unabhängiger Grö- ien, und

$$V = \int v \partial x \partial y ,$$

as Integral zwiſchen den Gränzen $x = a$, $x = b$; $= a'$, $y = b'$ genommen; ſo iſt auf ähnliche Art wie orher:

$$= \int (v + \delta v . \frac{i}{1} + \delta^2 v . \frac{i^2}{1.2} + \delta^3 v . \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots) \partial x \partial y$$
$$\int v \partial x \partial y + \frac{i}{1} \int (\delta v) \partial x \partial y + \frac{i^2}{1.2} \int (\delta^2 v) \partial x \partial y + \frac{i^3}{1.2.3} \int (\delta^3 v) \partial x \partial y + \ldots$$

lſo

$$\delta V = \delta \int v \partial x \partial y = \int (\delta v) \partial x \partial y ,$$
$$\delta^2 V = \delta^2 \int v \partial x \partial y = \int (\delta^2 v) \partial x \partial y ,$$
$$\delta^3 V = \delta^3 \int v \partial x \partial y = \int (\delta^3 v) \partial x \partial y ,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\delta^n V = \delta^n \int v \partial x \partial y = \int (\delta^n v) \partial x \partial y ,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

lle Integrale zwiſchen den gegebenen Gränzen genommen. Wie ſich dies auf mehrere abſolut-unabhängige Größen er- weitern läßt, fällt in die Augen. Noch iſt hier ausdrücklich u bemerken, daß bei der allgemeinen Entwickelung der Integrale in der letzten Reihe, ohne Bezug auf einen be- timmten Werth von $\int v \partial x$ oder $\int v \partial x \partial y$ zwiſchen gege- enen Gränzen die Variationen der abſolut-unabhängigen Größen als conſtant zu betrachten ſind (14. 16.). Wer- en aber alle Variationen auf einen beſtimmten Werth von $\int v \partial x$ oder $\int v \partial x \partial y$ bezogen, wie hier; ſo müſſen die In- egrale in der letzten Reihe, oder die Variationen der ge- ebenen Integrale zwiſchen gegebenen Gränzen, zwiſchen

änzen genommen werden, und dann iſt natür-
, als eine willkührliche Function von x, $= \delta a$
$= \delta b$ für $x = b$ zu ſetzen.

z beſonderer Wichtigkeit für die Anwendung
nsrechnung auf die Lehre von dem Größten und
die Entwickelung der erſten Variation unbe-
ntegralformeln zwiſchen gegebenen Gränzen,
t übergehen.

yen p, q Functionen von x; ſo iſt nach der
ormel Thl. II. S. 783.

$$\int p \frac{\partial^n q}{\partial x^n} \partial x = \int p \frac{\partial \left(\frac{\partial^{n-1} q}{\partial x^{n-1}}\right)}{\partial x} \partial x$$

$$= p \int \frac{\partial \left(\frac{\partial^{n-1} q}{\partial x^{n-1}}\right)}{\partial x} \partial x - \int \partial p \int \frac{\partial \left(\frac{\partial^{n-1} q}{\partial x^{n-1}}\right)}{\partial x} \partial x$$

$$= p \frac{\partial^{n-1} q}{\partial x^{n-1}} - \int \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial^{n-1} q}{\partial x^{n-1}} \partial x .$$

rch ſucceſſive Zerlegung mittelſt dieſer Formel:

$$\frac{\partial^n q}{\partial}$$

$$y_\alpha = \frac{\partial^\alpha y}{\partial x^\alpha},\ z_\beta = \frac{\partial^\beta z}{\partial x^\beta},\ u_\gamma = \frac{\partial^\gamma u}{\partial x^\gamma},\ \ldots$$

ist. Die partiellen Differentialquotienten von v in Bezug auf

$$y,\ y_1,\ y_2,\ \ldots\ y_\alpha;$$
$$z,\ z_1,\ z_2,\ \ldots\ z_\beta;$$
$$u,\ u_1,\ u_2,\ \ldots\ u_\gamma;$$

u. s. f. n. s. f.

sollen der Kürze wegen durch

$$Y,\ \overset{1}{Y},\ \overset{2}{Y},\ \ldots\ \overset{\alpha}{Y};$$
$$Z,\ \overset{1}{Z},\ \overset{2}{Z},\ \ldots\ \overset{\beta}{Z};$$
$$U,\ \overset{1}{U},\ \overset{2}{U},\ \ldots\ \overset{\gamma}{U};$$

u. s. f. u. s. f.

bezeichnet werden. Man sucht nun $\delta V = \delta \int v \partial x$.

Das mit δx behaftete Glied, wenn zugleich die Variationen der absolut-unabhängigen Größen berücksichtigt werden, ist (23.)

$$= \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)\delta x = \frac{\partial \int v \partial x}{\partial x}\delta x = v\delta x.$$

Wird von den Variationen der absolut-unabhängigen Größen abstrahirt; so ist dieses Glied $= o$ zu setzen, wie aus dem Obigen sogleich erhellet. Nach Bestimmung dieses Gliedes haben wir nun die Variation bloß in Bezug auf die relativ-unabhängigen Größen, als absolut-unabhängige betrachtet, zu entwickeln (23.). Es ist aber in dieser Beziehung (9.):

$$\begin{aligned}\delta v = {} & Y\delta y + \overset{1}{Y}\delta y_1 + \overset{2}{Y}\delta y_2 + \ldots + \overset{\alpha}{Y}\delta y_\alpha \\ & + Z\delta z + \overset{1}{Z}\delta z_1 + \overset{2}{Z}\delta z_2 + \ldots + \overset{\beta}{Z}\delta z_\beta \\ & + U\delta u + \overset{1}{U}\delta u_1 + \overset{2}{U}\delta u_2 + \ldots + \overset{\gamma}{U}\delta u_\gamma \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

oder, weil überhaupt (18. 19.)

$$\delta y_\alpha = \delta\left(\frac{\partial^\alpha y}{\partial x^\alpha}\right) = \frac{\partial^\alpha \delta y}{\partial x^\alpha},$$

$$\delta z_\beta = \delta\left(\frac{\partial^\beta z}{\partial x^\beta}\right) = \frac{\partial^\beta \delta z}{\partial x^\beta},$$

$$\delta u_\gamma = \delta\left(\frac{\partial^\gamma u}{\partial x^\gamma}\right) = \frac{\partial^\gamma \delta u}{\partial x^\gamma},$$

u. ſ. f. u. ſ. f.

$$\delta v = Y\delta y + \overset{1}{Y}\frac{\partial\delta y}{\partial x} + \overset{2}{Y}\frac{\partial^2\delta y}{\partial x^2} + \ldots + \overset{\alpha}{Y}\frac{\partial^\alpha\delta y}{\partial x^\alpha}$$

$$+ Z\delta z + \overset{1}{Z}\frac{\partial\delta z}{\partial x} + \overset{2}{Z}\frac{\partial^2\delta z}{\partial x^2} + \ldots + \overset{\beta}{Z}\frac{\partial^\beta\delta z}{\partial x^\beta}$$

$$+ U\delta u + \overset{1}{U}\frac{\partial\delta u}{\partial x} + \overset{2}{U}\frac{\partial^2\delta u}{\partial x^2} + \ldots + \overset{\gamma}{U}\frac{\partial^\gamma\delta u}{\partial x^\gamma}$$

. . . . . .

iſt aber $\delta\int v\partial x = \int(\delta v)\,\partial x$ (24.). Ju
, und fügt, um auch δx zu berückſichtige
en beſtimmte Glied $v\delta x$ bey; ſo erhält ma
$V = v\delta x + \int Y\delta y\,\partial x + \int Z\delta z\,\partial x + \int U\delta u\,\partial x \ldots$

$$-\int\frac{\partial\overset{1}{Z}}{\partial x}\delta z\,\partial x+\overset{1}{Z}\delta z$$

$$+\int\frac{\partial^2\overset{2}{Z}}{\partial x^2}\delta z\,\partial x+\overset{2}{Z}\frac{\partial\delta z}{\partial x}-\frac{\partial\overset{2}{Z}}{\partial x}\delta z$$

$$-\int\frac{\partial^3\overset{3}{Z}}{\partial x^3}\delta z\,\partial x+\overset{3}{Z}\frac{\partial^2\delta z}{\partial x^2}-\frac{\partial\overset{3}{Z}}{\partial x}\cdot\frac{\partial\delta z}{\partial x}+\frac{\partial^2\overset{3}{Z}}{\partial x^2}\delta z$$

. . . . . .

$$\pm\int\frac{\partial^\beta\overset{\beta}{Z}}{\partial x^\beta}\delta z\,\partial x+\overset{\beta}{Z}\frac{\partial^{\beta-1}\delta z}{\partial x^{\beta-1}}-\frac{\partial\overset{\beta}{Z}}{\partial x}\frac{\partial^{\beta-2}\delta z}{\partial x^{\beta-2}}+\ldots\mp\frac{\partial^{\beta-1}\overset{\beta}{Z}}{\partial x^{\beta-1}}\delta z$$

$$-\int\frac{\partial\overset{1}{U}}{\partial x}\delta u\,\partial x+\overset{1}{U}\delta u$$

$$+\int\frac{\partial^2\overset{2}{U}}{\partial x^2}\delta u\,\partial x+\overset{2}{U}\frac{\partial\delta u}{\partial x}-\frac{\partial\overset{2}{U}}{\partial x}\delta x$$

$$-\int\frac{\partial^3\overset{3}{U}}{\partial x^3}\delta u\,\partial x+\overset{3}{U}\frac{\partial^2\delta u}{\partial x^2}-\frac{\partial\overset{3}{U}}{\partial x}\cdot\frac{\partial\delta u}{\partial x}+\frac{\partial^2\overset{3}{U}}{\partial x^2}\delta u$$

. . . . . .

$$\pm\int\frac{\partial^\gamma\overset{\gamma}{U}}{\partial x^\gamma}\delta u\,\partial x+\overset{\gamma}{U}\frac{\partial^{\gamma-1}\delta u}{\partial x^{\gamma-1}}-\frac{\partial\overset{\gamma}{U}}{\partial x}\frac{\partial^{\gamma-2}\delta u}{\partial x^{\gamma-2}}+\ldots\mp\frac{\partial^{\gamma-1}\overset{\gamma}{U}}{\partial x^{\gamma-1}}\delta u$$

. . . . . .

$$=v\delta x$$

$$+\int\delta y\left\{Y-\frac{\partial\overset{1}{Y}}{\partial x}+\frac{\partial^2\overset{2}{Y}}{\partial x^2}-\frac{\partial^3\overset{3}{Y}}{\partial x^3}+\ldots\pm\frac{\partial^\alpha\overset{\alpha}{Y}}{\partial x^\alpha}\right\}\partial x$$

$$+\int\delta z\left\{Z-\frac{\partial\overset{1}{Z}}{\partial x}+\frac{\partial^2\overset{2}{Z}}{\partial x^2}-\frac{\partial^3\overset{3}{Z}}{\partial x^3}+\ldots\pm\frac{\partial^\beta\overset{\beta}{Z}}{\partial x^\beta}\right\}\partial x$$

$$+\int\delta u\left\{U-\frac{\partial\overset{1}{U}}{\partial x}+\frac{\partial^2\overset{2}{U}}{\partial x^2}-\frac{\partial^3\overset{3}{U}}{\partial x^3}+\ldots\pm\frac{\partial^\gamma\overset{\gamma}{U}}{\partial x^\gamma}\right\}\partial x$$

. . . . . .

$$+\delta y\left\{\overset{1}{Y}-\frac{\partial\overset{2}{Y}}{\partial x}+\frac{\partial^2\overset{3}{Y}}{\partial x^2}-\ldots\mp\frac{\partial^{\alpha-1}\overset{\alpha}{Y}}{\partial x^{\alpha-1}}\right\}$$

$$+\frac{\partial\delta y}{\partial x}\left\{\overset{2}{Y}-\frac{\partial\overset{3}{Y}}{\partial x}+\ldots\pm\frac{\partial^{\alpha-2}\overset{\alpha}{Y}}{\partial x^{\alpha-2}}\right\}$$

$$+\frac{\partial^2\delta y}{\partial x^2}\left\{\overset{3}{Y}-\ldots\mp\frac{\partial^{\alpha-3}\overset{\alpha}{Y}}{\partial x^{\alpha-3}}\right\}$$

. . . . . .

$$+\frac{\partial^{\alpha-1}\delta y}{\partial x^{\alpha-1}}\overset{\alpha}{Y}$$

$$\left\{ {}^{1}Z - \frac{\partial {}^{2}Z}{\partial x} + \frac{\partial^2 {}^{3}Z}{\partial x^2} - \cdots \pm \frac{\partial^{\beta-1} {}^{\beta}Z}{\partial x^{\beta-1}} \right\}$$

$$\left\{ {}^{2}Z - \frac{\partial {}^{3}Z}{\partial x} + \cdots \pm \frac{\partial^{\beta-2} {}^{\beta}Z}{\partial x^{\beta-2}} \right\}$$

$$\frac{z}{\cdot} \left\{ {}^{3}Z - \cdots \mp \frac{\partial^{\beta-3} {}^{\beta}Z}{\partial x^{\beta-3}} \right\}$$

. . . . . .

$$\frac{{}^{-1}\partial z}{\beta-1} {}^{\beta}Z$$

$$\left\{ {}^{1}U - \frac{\partial {}^{2}U}{\partial x} + \frac{\partial^2 {}^{3}U}{\partial x^2} - \cdots \mp \frac{\partial^{\gamma-1} {}^{\gamma}U}{\partial x^{\gamma-1}} \right\}$$

$$\left\{ {}^{2}U - \frac{\partial {}^{3}U}{\partial x} + \cdots \pm \frac{\partial^{\gamma-2} {}^{\gamma}U}{\partial x^{\gamma-2}} \right\}$$

$$\frac{u}{2} \left\{ {}^{3}U - \cdots \mp \frac{\partial^{\gamma-3} {}^{\gamma}U}{\partial x^{\gamma-3}} \right\}$$

. . . . . .

$$^{-1}\partial u\, {}^{\gamma}U$$

Euler bedient sich hierbei folgender Bezeichnung, welche wir wegen ihrer Einfachheit künftig öfters gebrauchen werden. Sey

$$\partial y = p\partial x,\ \partial p = q\partial x,\ \partial q = r\partial x,\ \partial r = s\partial x,\ \ldots;$$
$$v = f(x, y, p, q, r, s, \ldots);$$

so ist

$$\partial v = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\partial y + \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)\partial p + \left(\frac{\partial v}{\partial q}\right)\partial q + \ldots$$
$$= \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\partial x + N\partial y + P\partial p + Q\partial q + R\partial r + S\partial s + \ldots;$$

folglich nach dem Obigen:

$$\delta V = \int \delta v \partial x =$$
$$v\delta x + \left\{P - \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 S}{\partial x^3} + \ldots\right\}\delta y$$
$$+ \left\{Q - \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - \ldots\right\}\frac{\partial \delta y}{\partial x}$$
$$+ \left\{R - \frac{\partial S}{\partial x} + \ldots\right\}\frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2}$$
$$+ \left\{S - \ldots\right\}\frac{\partial^3 \delta y}{\partial x^3}$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \int \left\{N - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 S}{\partial x^4} - \ldots\right\}\delta y \partial x$$

indem

$$N = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = Y,\ \frac{\partial y}{\partial x} = p = y_1;$$
$$P = \left(\frac{\partial v}{\partial y_1}\right) = \overset{1}{Y},\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = q = y_2;$$
$$Q = \left(\frac{\partial v}{\partial y_2}\right) = \overset{2}{Y},\ \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = r = y^3;$$
$$R = \left(\frac{\partial v}{\partial y_3}\right) = \overset{3}{Y},\ \left(\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}\right) = s = y_4;$$
$$\text{u. s. f.} \qquad \text{u. s. f.}$$

28. Ist hier

$$N - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 S}{\partial x^4} - \ldots = 0,$$

so ist $\delta \int v \partial x$ ohne Integrationszeichen ausgedrückt, und es läßt sich also, da $\delta \int v \partial x = \int (\delta v)\, \partial x$ ist (24.), die Function $(\delta v)\, \partial x$ vollständig integriren, oder $(\delta v)\, \partial x$ ist ein vollständiges Differential irgend einer gewissen Function. Man setze daher $(\delta v)\, \partial x = \partial v'$, und betrachte v'

n irgend einer gewiſſen Function v″, welches
Willkührlichkeit und Allgemeinheit des Varii-
verſtattet iſt; ſo iſt,

$$\delta v = \frac{\partial v'}{\partial x} = \frac{\partial \delta v''}{\partial x} = \delta\left(\frac{\partial v''}{\partial x}\right),$$

$\frac{v''}{x}$, $v\partial x = \partial v''$, und demnach $v\partial x$ ein voll-
ſſerential, alſo integrabel. Iſt alſo v irgend
n von x, y und, indem man y als von x ab-
htet, p der Differentialquotient von y, und
wir $\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = M$ ſetzen,

$$\partial x + N\partial y + P\partial p + Q\partial q + R\partial r + \ldots,$$
$$+ N\frac{\partial y}{\partial x} + P\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + Q\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + R\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \ldots;$$

ntegrabel, oder ein vollſtändiges Differential
n Function, wenn

$$- \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 S}{\partial x^4} - \ldots = 0$$

dieſe Gleichung die Bedingungsgleichung der
it genannt wird. Dies dient zugleich zur Er-

Thl. I. S. 906. Thl. III. S. 771.

zugleich die Variationen der Differentialquotienten wie gewöhnlich umgeformt werden:

$$\begin{aligned}\delta v = \; & \overset{0}{\underset{0}{Z}}\delta z \\ & + \overset{1}{\underset{0}{Z}}\frac{\partial\delta z}{\partial x} + \overset{0}{\underset{1}{Z}}\frac{\partial\delta z}{\partial y} \\ & + \overset{2}{\underset{0}{Z}}\frac{\partial^2\delta z}{\partial x^2} + \overset{1}{\underset{1}{Z}}\frac{\partial^2\delta z}{\partial x\partial y} + \overset{0}{\underset{2}{Z}}\frac{\partial^2\delta z}{\partial y^2} \\ & + \overset{3}{\underset{0}{Z}}\frac{\partial^3\delta z}{\partial x^3} + \overset{2}{\underset{1}{Z}}\frac{\partial^3\delta z}{\partial x^2\partial y} + \overset{1}{\underset{2}{Z}}\frac{\partial^3\delta z}{\partial x\partial y^2} + \overset{0}{\underset{3}{Z}}\frac{\partial^3\delta z}{\partial y^3} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Wird nun auf beiden Seiten mit $\partial x\partial y$ multiplicirt, integrirt, und die in δx und δy multiplicirten Glieder wieder beigefügt; so ist (24.)

$$\begin{aligned}\delta V = \delta\iint v\partial x\partial y = \; & \\ \delta x . \int v\partial y + \delta y . \int v\partial x & \\ + \iint\partial x\partial y \Big\{ & \overset{0}{\underset{0}{Z}}\delta z + \overset{1}{\underset{0}{Z}}\frac{\partial\delta z}{\partial x} + \overset{2}{\underset{0}{Z}}\frac{\partial^2\delta z}{\partial x^2} + \overset{3}{\underset{0}{Z}}\frac{\partial^3\delta z}{\partial x^3} + \ldots \\ & + \overset{0}{\underset{1}{Z}}\frac{\partial\delta z}{\partial y} + \overset{1}{\underset{1}{Z}}\frac{\partial^2\delta z}{\partial x\partial y} + \overset{2}{\underset{1}{Z}}\frac{\partial^3\delta z}{\partial x^2\partial y} + \ldots \\ & + \overset{0}{\underset{2}{Z}}\frac{\partial^2\delta z}{\partial y^2} + \overset{1}{\underset{2}{Z}}\frac{\partial^3\delta z}{\partial x\partial y^2} + \ldots \\ & + \overset{0}{\underset{2}{Z}}\frac{\partial^3\delta z}{\partial y^3} + \ldots \\ & \ldots\ldots\end{aligned}$$

Die doppelten Integrale können nun auch hier nach (25.) entwickelt werden, welches wir indeß blos an einem Beispiele zeigen wollen, woraus jedoch das allgemeine Verfahren leicht erhellen wird. Es ist also z. B.

$$\iint\overset{2}{\underset{2}{Z}}\frac{\partial^4\delta z}{\partial x^2\partial y^2}\partial x\partial y = \int\partial x\int\overset{2}{\underset{2}{Z}}\frac{\partial^4\delta z}{\partial x^2\partial y^2}\partial y$$

$$= \int\Big\{\int\frac{\partial^2\overset{2}{\underset{2}{Z}}}{\partial y^2}\frac{\partial^2\delta z}{\partial x^2}\partial y + \overset{2}{\underset{2}{Z}}\frac{\partial^3\delta z}{\partial x^2\partial y} - \frac{\partial\overset{2}{\underset{2}{Z}}}{\partial y}\frac{\partial^2\delta z}{\partial x^2}\Big\}\partial x$$

$$= \int\Big\{\int\frac{\partial^4\overset{2}{\underset{2}{Z}}}{\partial x^2\partial y^2}\delta z\,\partial x + \frac{\partial^2\overset{2}{\underset{2}{Z}}}{\partial y^2}\frac{\partial\delta z}{\partial x} - \frac{\partial^3\overset{2}{\underset{2}{Z}}}{\partial x\partial y^2}\delta z\Big\}\partial y$$

$$+ \int\frac{\partial^2\overset{2}{\underset{2}{Z}}}{\partial x^2}\frac{\partial\delta z}{\partial y}\partial x + \overset{2}{\underset{2}{Z}}\frac{\partial^2\delta z}{\partial x\partial y} - \frac{\partial\overset{2}{\underset{2}{Z}}}{\partial x}\frac{\partial\delta z}{\partial y}$$

$$- \int\frac{\partial^3\overset{2}{\underset{2}{Z}}}{\partial x^2\partial y}\delta z\,\partial x - \frac{\partial\overset{2}{\underset{2}{Z}}}{\partial y}\frac{\partial\delta z}{\partial x} + \frac{\partial^2\overset{2}{\underset{2}{Z}}}{\partial x\partial y}\delta z$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\delta z - \frac{\partial^2}{\partial y}\frac{\partial \delta z}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x}$$

Entwickelt man auf dieſe
in obiger Reihe; ſo erhält m
tion:

$$\delta V = \delta\iint v$$
$$\delta x \cdot \int v\,\partial y + \delta y \cdot \int v\,\partial x$$
$$+ \iint \partial x\,\partial y\,\delta z \left\{ \overset{0}{Z} - \frac{\partial \overset{1}{Z}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \overset{2}{Z}}{\partial x^2} - \right.$$
$$- \frac{\partial \overset{0}{Z}}{\partial y} + \frac{\partial^2 \overset{1}{Z}}{\partial x\,\partial y} -$$
$$+ \frac{\partial^2 \overset{0}{Z}}{\partial y^2}$$

$$+ \int \partial y\,\delta z \left\{ \overset{1}{Z} - \frac{\partial \overset{2}{Z}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \overset{3}{Z}}{\partial x^2} - \right.$$

$$+\int \partial x\, \delta z \left\{ \overset{0}{\underset{1}{Z}} - \frac{\partial \overset{1}{\underset{1}{Z}}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \overset{2}{\underset{1}{Z}}}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 \overset{3}{\underset{1}{Z}}}{\partial x^3} + \ldots \right.$$

$$- \frac{\partial \overset{0}{\underset{2}{Z}}}{\partial y} + \frac{\partial^2 \overset{1}{\underset{2}{Z}}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^3 \overset{2}{\underset{2}{Z}}}{\partial x^2 \partial y} + \ldots$$

$$+ \frac{\partial^2 \overset{0}{\underset{3}{Z}}}{\partial y^2} - \frac{\partial^3 \overset{1}{\underset{3}{Z}}}{\partial x \partial y^2} + \ldots$$

$$- \frac{\partial^3 \overset{0}{\underset{4}{Z}}}{\partial y^3} + \ldots$$

$$+\int \partial y\, \frac{\partial \delta z}{\partial x} \left\{ \overset{2}{\underset{0}{Z}} - \frac{\partial \overset{3}{\underset{0}{Z}}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \overset{4}{\underset{0}{Z}}}{\partial x^2} - \ldots \right.$$

$$- \frac{\partial \overset{2}{\underset{1}{Z}}}{\partial y} + \frac{\partial^2 \overset{3}{\underset{1}{Z}}}{\partial x \partial y} - \ldots$$

$$+ \frac{\partial^2 \overset{2}{\underset{2}{Z}}}{\partial y^2} - \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$+\int \partial x\, \frac{\partial \delta z}{\partial y} \left\{ \overset{0}{\underset{2}{Z}} - \frac{\partial \overset{1}{\underset{2}{Z}}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \overset{2}{\underset{2}{Z}}}{\partial x^2} - \ldots \right.$$

$$- \frac{\partial \overset{0}{\underset{3}{Z}}}{\partial y} + \frac{\partial^2 \overset{1}{\underset{3}{Z}}}{\partial y \partial x} - \ldots$$

$$+ \frac{\partial^2 \overset{0}{\underset{4}{Z}}}{\partial y^2} - \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$+\int \partial y\, \frac{\partial^2 \delta z}{\partial x^2} \left\{ \overset{3}{\underset{0}{Z}} - \frac{\partial \overset{4}{\underset{0}{Z}}}{\partial x} + \ldots \right.$$

$$- \frac{\partial \overset{3}{\underset{1}{Z}}}{\partial y} + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$+\int \partial x\, \frac{\partial^2 \delta z}{\partial y^2} \left\{ \overset{0}{Z} - \frac{\partial \overset{1}{\underset{3}{Z}}}{\partial x} + \ldots \right.$$

$$- \frac{\partial \overset{0}{\underset{4}{Z}}}{\partial y} + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

ꝛc. ꝛc.

$$+\delta z\left\{{}^{1}_{1}Z-\frac{\partial {}^{2}_{1}Z}{\partial x}+\frac{\partial^2 {}^{3}_{1}Z}{\partial x^2}-\ldots\right.$$
$$\left.-\frac{\partial {}^{1}_{2}Z}{\partial y}+\frac{\partial^2 {}^{2}_{2}Z}{\partial x\partial y}-\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2 {}^{1}_{3}Z}{\partial y^2}-\ldots\right.$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{\partial\delta z}{\partial y}\left\{{}^{1}_{2}Z-\frac{\partial {}^{2}_{2}Z}{\partial x}+\ldots\right.$$
$$\left.-\frac{\partial {}^{1}_{3}Z}{\partial y}+\ldots\right.$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{\partial\delta z}{\partial x}\left\{{}^{2}_{1}Z-\frac{\partial {}^{3}_{1}Z}{\partial x}+\ldots\right.$$
$$\left.-\frac{\partial {}^{2}_{2}Z}{\partial y}+\ldots\right.$$

$$v = f(V', x, y, y_1, y_2, \ldots y_\nu),$$
$$V = \int v \partial x;$$

ſoll δV finden. Das δx enthaltende Glied iſt wie
er $=$

$$\left(\frac{\partial \int v \partial x}{\partial x}\right) \delta x = v \delta x,$$

ıß nun die Variation bloß in Bezug auf y, y_1, ..., wie abſolut-unabhängige Größen betrachtet, zu ickeln iſt. Da aber v auch von V' abhängt; ſo iſt zu-) nach der gewöhnlichen Transformation der Varia- n der Differentialquotienten:

$$\delta v =$$
$$\left(\frac{\partial v}{\partial V'}\right) \delta V' + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) \delta y + \left(\frac{\partial v}{\partial y_1}\right) \frac{\partial \delta y}{\partial x} + \ldots + \left(\frac{\partial v}{\partial y_\nu}\right) \frac{\partial^\nu \delta y}{\partial x^\nu}.$$

Aber $\delta V' = \delta \int v' \partial x = \int \delta v' \partial x$, $\delta V = \delta \int v \partial x$ $\int \delta v \partial x$. Folglich, wenn man zugleich δx berück- gt:

$$\delta V =$$
$$+ \int \left| \left(\frac{\partial v}{\partial V'}\right) \int \delta v' \partial x \right| \partial x$$
$$\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) \delta y + \left(\frac{\partial v}{\partial y_1}\right) \frac{\partial \delta y}{\partial x} + \ldots + \left(\frac{\partial v}{\partial y_\nu}\right) \frac{\partial^\nu \delta y}{\partial x^\nu} \Big| \partial x$$
$$\text{ix} + \int \left(\frac{\partial v}{\partial V'}\right) \partial x \cdot \int \delta v' \partial x - \int \left| \delta v' \partial x \int \left(\frac{\partial v}{\partial V'}\right) \partial x \right|$$
$$\text{Y} \delta y + \overset{1}{\text{Y}} \frac{\partial \delta y}{\partial x} + \overset{2}{\text{Y}} \frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2} + \ldots + \overset{\nu}{\text{Y}} \frac{\partial^\nu \delta y}{\partial x^\nu} \Big| \partial x$$

Integrale zwiſchen denſelben gegebenen Gränzen ge- men. Setzen wir nun den zwiſchen denſelben Grän- genommenen Werth von $\int \left(\frac{\partial v}{\partial V'}\right) \partial x = \mathfrak{J}$; ſo iſt klar, , da $\int \delta v' \partial x$ zwiſchen denſelben Gränzen genommen)en muß,

$$\int \left(\frac{\partial v}{\partial V'}\right) \partial x \cdot \int \delta v' \partial x = \int \mathfrak{J} \delta v' \partial x$$

letzteres Integral zwiſchen denſelben Gränzen genom- l. Folglich iſt, für

$$\mathfrak{z} - \int \left(\frac{\partial v}{\partial V'}\right) \partial x = \mathrm{I},$$

Also

$$\delta$$

$$v\delta x + \int \left\{ Y\delta y + \overset{1}{Y}\frac{\partial \delta y}{\partial x} + \right.$$

$$+ \int I \left\{ Y'\delta y + \overset{1}{Y'}\frac{\partial \delta y}{\partial x} + \right.$$

$$= v\delta x$$

$$+ \int Y\delta y\,\partial x$$

$$- \int \frac{\partial \overset{1}{Y}}{\partial x}\delta y\,\partial x + \overset{1}{Y}\delta y$$

$$+ \int \frac{\partial^2 \overset{2}{Y}}{\partial x^2}\delta y\,\partial x + \overset{2}{Y}\frac{\partial \delta y}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial}$$

$$- \int \frac{\partial^3 \overset{3}{Y}}{\partial x^3}\delta y\,\partial x + \overset{3}{Y}\frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2} - \frac{}{}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\pm \int \frac{\partial^\nu \overset{\nu}{Y}}{\partial x^\nu}\delta y\,\partial x + \overset{\nu}{Y}\frac{\partial^{\nu-1}\delta y}{\partial x^{\nu-1}} -$$

$$+ \int I Y'\delta y\,\partial x$$

$$- \int \frac{\partial I \overset{1}{Y'}}{\partial x}\delta y\,\partial x + I\overset{1}{Y'}\delta y$$

$$= v\partial x$$

$$+ \int \partial y \left\{ Y - \frac{\partial^1 Y}{\partial x} + \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 Y}{\partial x^3} + \ldots \pm \frac{\partial^\nu Y}{\partial x^\nu} \right\} \partial x$$

$$+ \partial y \left\{ {}^1Y - \frac{\partial {}^2Y}{\partial x} + \frac{\partial^2 {}^3Y}{\partial x^2} - \ldots \mp \frac{\partial^{\nu-1} {}^\nu Y}{\partial x^{\nu-1}} \right\}$$

$$+ \frac{\partial \partial y}{\partial x} \left\{ {}^2Y - \frac{\partial {}^3Y}{\partial x} + \ldots \pm \frac{\partial^{\nu-2} {}^\nu Y}{\partial x^{\nu-2}} \right\}$$

$$+ \frac{\partial^2 \partial y}{\partial x^2} \left\{ {}^3Y - \ldots \mp \frac{\partial^{\nu-3} {}^\nu Y}{\partial x^{\nu-3}} \right\}$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{\partial^{\nu-1} \partial y}{\partial x^{\nu-1}} {}^\nu Y$$

$$+ \int \partial y \left\{ I Y' - \frac{\partial . I {}^1Y'}{\partial x} + \frac{\partial^2 . I {}^2Y'}{\partial x^2} - \ldots \pm \frac{\partial^\mu . I {}^\mu Y'}{\partial x^\mu} \right\} \partial x$$

$$+ \partial y \left\{ I {}^1Y' - \frac{\partial . I {}^2Y'}{\partial x} + \ldots \mp \frac{\partial^{\mu-1} . I {}^\mu Y'}{\partial x^{\mu-1}} \right\}$$

$$+ \frac{\partial \partial y}{\partial x} \left\{ I {}^2Y' - \ldots \pm \frac{\partial^{\mu-2} . I {}^\mu Y'}{\partial x^{\mu-2}} \right\}$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{\partial^{\mu-1} \partial y}{\partial x^{\mu-1}} I {}^\mu Y' .$$

31. Wäre

$$v'' = f''(x, y, y_1, y_2, \ldots y_\lambda), \quad V'' = \int v'' \partial x ;$$

$$v' = f'(V'', x, y, y_1, y_2, \ldots y_\mu), \quad V' = \int v' \partial x ;$$

$$v = f(V', x, y, y_1, y_2, \ldots y_\nu), \quad V = \int v \partial x ;$$

δ δV zu entwickeln; ſo würde nach einem ganz ähnlichen rfahren wie vorher zu der vorigen Entwickelung noch ein n zweiten Hauptheile derſelben ganz ähnlicher Theil zutreten, wenn man nur überall λ ſtatt μ ſetzt, I′ ſtatt und Y″ ſtatt Y′ ſchreibt, wo

$$\mathfrak{I} = \int I \left(\frac{\partial v'}{\partial V''} \right) \partial x$$

ſchen den gegebenen Gränzen, und

32. Die Lehre von dem Grösst
hält mehrere Theile, welche man we
nen muß.

Der erste und leichteste beschäft
in einer Gleichung zwischen x und y
finden, für welche die zugehörigen
oder Kleinste werden, d. h. grö
als alle unmittelbar vorhergehend
Werthe von y. Die Beantwortu
ganz in das Gebiet der Differen
in diesem Wörterbuche in dem Ar
stes gegeben.

Zweitens aber kann man, wen
ter Integralausdruck gegeben ist,
Relationen, welche zwischen den
desselben statt finden können, diejen
gen, für welche der gegebene Inte
denselben Gränzen genommen, ein
stes wird. Sollte z. B. die C
welche, zwei gegebene Punkte mit e
der Umdrehung um die Axe der x di

Größte oder Kleinste nennt man nach Eulers Vorgange absolute Maxima und Minima. Methodus maximorum et minimorum absoluta docet, inter omnes curvas, ad eandem abscissam relatas, determinare eam, in qua proposita quaedam variabilis maximum minimumve obtineat valorem (Euleri Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes. Laus. et Genèv. 1744. p. 4.), welches offenbar mit dem obigen rein analytischen Begriff übereinkommt.

Drittens kann man endlich auch unter allen Relationen der veränderlichen Größen, welche für einen oder mehrere gegebene unbestimmte Integralausdrücke, zwischen denselben Gränzen genommen, dieselben bestimmten Werthe geben, diejenigen aufzufinden verlangen, für welche ein anderer, ebenfalls gegebener Integralausdruck, zwischen denselben Gränzen genommen, ein Größtes oder ein Kleinstes wird. Sollte z. B. unter allen den Curven, welche zwischen zwei gegebenen Punkten einerley Länge haben, diejenige gefunden werden, welche bei der Umdrehung um die Abcissenaxe die kleinste Oberfläche erzeugt; so würde diese Aufgabe offenbar darauf zurückkommen, die Relation oder Gleichung zwischen x und y zu finden, für welche zwischen den gegebenen, durch die beiden gegebenen Punkte bestimmten, Gränzen

$$\int \partial x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = \text{Const},$$

und $2\pi \int y \partial x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$ ein Minimum wird. Solche Größte und Kleinste heißen relative Maxima und Minima. Methodus maximorum et minimorum relativa docet, non inter omnes omnino curvas eidem abscissae respondentes, sed inter eas tantum, quae praesciptam quandam proprietatem communem habeant, eam determinare, quae maximi minimive proprietate gaudeat (l. c. p. 5.)

Zu dieser letzten Klasse von Aufgaben gehört auch das so berühmte isoperimetrische Problem, welches un-

$$v = f\left(x, y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \right.$$

oder auch, wenn auch z als Fu
wird,

$$v = f\left(x, y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \ldots; z\right.$$

und $V = \int v \partial x$, dieſes Integ
Gränzen genommen. Man ſoll
und y ſo beſtimmen, daß der zwiſch
zen genommene Werth dieſes
oder Mininum werde, d. h. ſo, d
Relation zwiſchen x und y allmä
dert denkt, woraus auch eine ſte
Werthes unſers Integrals herv
größer oder kleiner werde als alle un
und nachfolgenden Nachbarwerthe
rung des Werthes immer als dur
ſchen x und y ſtatt findenden Re
dacht wird. Man denke ſich n
zwiſchen x und y gefunden, und
geändert; ſo geht V über in

kleine Aenderung der Relation zwiſchen x und y, d. i. für jedes noch ſo kleine i, für das Maximum $V_i - V < o$, für das Minimum $V_i - V > o$ ſeyn. Da man ſich aber i ſo klein genommen denken kann, daß das Zeichen von $V_i - V$ bloß von dem erſten Gliede $\delta V . \frac{i}{1}$ (Vergl. Taylors Lehrſatz. 29. — 32.), welches, da i von einer ungeraden Potenz iſt, ſowohl poſitiv als negativ ſeyn kann, abhängt; ſo kann offenbar keine der beiden obigen Bedingungen für alle noch ſo kleine i ſtatt finden, wenn nicht dieſes Glied, unabhängig von i, zwiſchen den gegebenen Gränzen $= o$ iſt, woraus ſich als gemeinſchaftliche Bedingung das Maximum und Minimum

$$\delta V = o$$

ergiebt, die Variation zwiſchen den gegebenen Gränzen genommen.

Alſo iſt

$$V_i - V = \delta^2 V . \frac{i^2}{1.2} + \delta^3 V . \frac{i^3}{1.2.3} + \delta^4 V . \frac{i^4}{1 \ldots 4} + \ldots$$

wo man aber i wieder ſo klein nehmen kann, daß das Zeichen von $V_i - V$ bloß von dem erſten Gliede $\delta^2 V . \frac{i^2}{1.2}$, d. i., da i^2 immer poſitiv iſt, bloß von $\delta^2 V$ abhängt, woraus als Bedingung des Maximum

$$\delta^2 V < o ,$$

als Bedingung des Minimum

$$\delta^2 V > o ,$$

immer zwiſchen den gegebenen Gränzen genommen, folgt.

Setzt man $\int v \partial x$ für V; ſo erhält man als gemeinſchaftliche Bedingung des Maximum und Minimum:

$$\delta \int v \partial x = o , \quad \int (\delta v) \partial x = o ;$$

als Bedingung des Maximum:

$$\delta^2 \int v \partial x < o , \quad \int (\delta^2 v) \partial x < o ,$$

und als Bedingung des Minimum:

$$\delta^2 \int v \partial x > o , \quad \int (\delta^2 v) x > o ,$$

immer zwiſchen den gegebenen Gränzen genommen.

34. Wenn, wie wir hier vorausſetzen, die Gränzen, zwiſchen denen das Integral in Bezug auf x zu nehmen iſt,

nt und gegeben ſind; ſo wird man offenbar
riationen von x völlig zu abſtrahiren, und bloß
riirt zu denken haben, obgleich auch, wie wir
ſehen werden, unter gewiſſen Bedingungen
riationen von x zu berückſichtigen ſeyn können.
emerkung mehr Anſchaulichkeit zu geben, ſetze
ſey die Curve zu finden, welche zwiſchen zwey
unkten P, P′ (Fig. 95.) bey der Umdrehung
der x die kleinſte Oberfläche erzeugt, und nehme
die geſuchte Curve; ſo kann offenbar zwiſchen
urch die beiden gegebenen Gränzen von x völlig
Ordinaten PQ, P′Q′ jede andere willkührliche
loß durch Variation von y hervorbringen, in-
iſſe x ganz ungeändert bleibt. Abſtrahiren wir
ht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt wird,
riationen von x zunächſt gänzlich, und ſetzen
= o.

it Anwendung der von Euler eingeführten
(27.), nach welcher

$p\partial x,\ \partial p = q\partial x,\ \partial q = r\partial x,\ \partial r = s\partial x,\ \ldots;$

tion, als Function von y oder x gedacht, $= o$ seyn. Bezeichnen wir also, indem die Anzahl der Glieder der Reihe unter dem Integralzeichen $= \alpha + 1$, die Anzahl der Glieder des von dem Integralzeichen befreiten Theils also $= \alpha$ gesetzt wird, die einzelnen Glieder dieses Theils durch

$$\overset{1}{K}\delta y, \overset{2}{K}\frac{\partial\delta y}{\partial x}, \overset{3}{K}\frac{\partial^2\delta y}{\partial x^2}, \ldots, \overset{\alpha}{K}\frac{\partial^{\alpha-1}\delta y}{\partial x^{\alpha-1}},$$

und die Werthe derselben für $x = a$ und $x = b$ durch Beifügung von a und b unten zur rechten Hand; so ist für das Maximum und Minimum:

$$\begin{aligned} o = {} & \overset{1}{K}_b(\delta y)_b - \overset{1}{K}_a(\delta y)_a \\ & + \overset{2}{K}_b\left(\frac{\partial\delta y}{\partial x}\right)_b - \overset{2}{K}_a\left(\frac{\partial\delta y}{\partial x}\right) \\ & + \overset{3}{K}_b\left(\frac{\partial^2\delta y}{\partial x^2}\right)_b - \overset{3}{K}_a\left(\frac{\partial^2\delta y}{\partial x^2}\right)_a \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + \overset{\alpha}{K}_b\left(\frac{\partial^{\alpha-1}\delta y}{\partial x^{\alpha-1}}\right)_b - \overset{\alpha}{K}_a\left(\frac{\partial^{\alpha-1}\delta y}{\partial x^{\alpha-1}}\right)_a \\ & + \int_a^b \left\{N - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 S}{\partial x^4} - \ldots\right\}\delta y\,\partial x \end{aligned}$$

für jedes beliebige δy. Man denke sich nun für δy eine beliebige Function mit $2\alpha + 1$ willkührlichen Constanten gesetzt; so wird man 2α dieser Constanten sich immer so bestimmt denken können, daß

$$o = \int_a^b \left\{N - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} + \ldots\right\}\delta y\,\partial x,$$

$$o = (\delta y)_a = \left(\frac{\partial\delta y}{\partial x}\right)_a = \left(\frac{\partial^2\delta y}{\partial x^2}\right)_a = \ldots = \left(\frac{\partial^{\alpha-1}\delta y}{\partial x^{\alpha-1}}\right)_a,$$

$$o = \left(\frac{\partial\delta y}{\partial x}\right)_b = \left(\frac{\partial^2\delta y}{\partial x^2}\right)_b = \ldots = \left(\frac{\partial^{\alpha-1}\delta y}{\partial x^{\alpha-1}}\right)_b,$$

und die letzte noch übrige willkührliche Constante wird man dazu benutzen können, $(\delta y)_b$ so zu bestimmen, daß es nicht $= o$ ist. Unsere obige für jedes δy statt findende Gleichung reducirt sich hiernach, da $(\delta y)_b$ nicht $= o$ ist auf

$$\overset{1}{K}_b(\delta y)_b = o, \quad \overset{1}{K}_b = o.$$

Ganz auf dieselbe Weise überzeugt man sich, daß

$$o = \overset{1}{K} = \overset{2}{K} = \overset{3}{K}_a = \ldots \overset{\alpha}{K}_a ;$$

$$o = \overset{1}{K}_b = \overset{2}{K}_b = \overset{3}{K}_b = \ldots \overset{\alpha}{K}_b ;$$

n ferner unmittelbar folgt, daß für jedes ∂y

$$N - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} + \ldots \Big\} \partial y \, \partial x = o$$

woraus ferner ſogleich folgt, daß identiſch

$$N - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} + \ldots = o$$

Denn, wäre dies nicht der Fall; ſo ſetze ergehende Reihe durch φx bezeichnend, einmal wo fx eine ganz willkührliche Function von x Dann wäre

$$\int_a^b \varphi x \frac{fx}{\varphi x} \partial x = \int_a^b fx . \partial x = o ,$$

ede willkührliche Function fx das Integral oiſchen den Gränzen $x = a$, $x = b$ genom- o, welches offenbar ungereimt iſt. Alſo muß $= o$ ſeyn, ſo daß alſo

$$\overset{1}{K} \quad \overset{2}{K} \quad \overset{3}{K}_a \quad \overset{\alpha}{K}_a$$

rade 2α. Denn $\overset{\alpha}{Y} = \left(\frac{\partial v}{\partial y_\alpha}\right)$ kann offenbar den Diffe-

rtialquotienten $y_\alpha = \frac{\partial^\alpha y}{\partial x^\alpha}$, folglich $\frac{\partial^\alpha \overset{\alpha}{Y}}{\partial x^\alpha}$ den Differential-

otienten $\frac{\partial^{2\alpha} y}{\partial x^{2\alpha}}$ enthalten. Durch die Integration dieser leichung, welche auf die gesuchte Relation zwischen x und y hrt, werden also 2α willkührliche Constanten in die Rech- ng eingeführt, zu deren Bestimmung die 2α Gränzglei- ungen dienen, nachdem nämlich die gesuchte Relation schon i Allgemeinen gefunden. In einigen besondern Fällen, ovon wir jetzt einige der wichtigsten durchgehen wollen, ßt sich indeß der Grad der allgemeinen Bedingungsglei- ung des Maximum und Minimum erniedrigen.

37. α. Enthielte v die Größe y nicht; so wäre $N = o$ setzen; also die Bedingungsgleichung:

$$\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} - \frac{\partial^4 S}{\partial x^4} + \ldots = o,$$

$$\partial P - \frac{\partial^2 Q}{\partial x} + \frac{\partial^3 R}{\partial x^2} - \frac{\partial^4 S}{\partial x^3} + \ldots = o,$$

$$\partial P - \partial\frac{\partial Q}{\partial x} + \partial\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \partial\frac{\partial^3 S}{\partial x^3} + \ldots = o,$$

oraus durch Integration:

$$P - \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 S}{\partial x^3} + \ldots = C,$$

ffenbar eine Differentialgleichung vom Grade $2\alpha - 1$.

β. Wäre in v weder y, noch $p = \frac{\partial y}{\partial x}$ enthalten; so äre auch $P = o$ zu setzen, und folglich

$$-\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 S}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} - \ldots = C,$$

$$-\partial Q + \frac{\partial^2 R}{\partial x} - \frac{\partial^3 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 T}{\partial x^3} - \ldots = C\partial x,$$

$$-Q + \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} - \ldots = Cx + C',$$

ine Differentialgleichung vom Grade $2\alpha - 2$.

γ. Enthielte v ferner auch $q = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ nicht; so wäre uch $Q = o$,

$$\frac{R}{\partial x} - \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} - \ldots = Cx + C',$$

$$R - \frac{\partial^2 S}{\partial x} + \frac{\partial^3 T}{\partial x^2} - \ldots = Cx\partial x + C'\partial x,$$

$$- \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \ldots = Cx^2 + C'x + C'',$$

statt $\frac{1}{2}$ C gesetzt wird. Diese Differential- nur vom Grade $2\alpha - 3$. Wie man weiter erhellet leicht.

ferner x nicht unmittelbar in v enthalten; so

$$N\partial y + P\partial p + Q\partial q + R\partial r + S\partial s + \ldots.$$

n der allgemeinen Bedingung des Maximum um:

$$= \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} - \frac{\partial^4 S}{\partial x^4} + \ldots,$$

obige Gleichung gesetzt, giebt:

$$= P\partial p + Q\partial q + R\partial r + S\partial s + \ldots$$

$$- \frac{\partial P}{\partial x}\partial y - \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\partial y + \frac{\partial^3 R}{\partial x^3}\partial y - \ldots$$

$$= P\partial p + Q\partial q + R\partial r + S\partial s + \ldots$$

$$\int S\partial s = \int S\frac{\partial^4 p}{\partial x^4}\partial x$$
$$= S\frac{\partial^3 p}{\partial x^3} - \frac{\partial S}{\partial x}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial^3 S}{\partial x^3}p + \int\frac{\partial^4 S}{\partial x^4}p\,\partial x$$
$$= Ss - r\frac{\partial S}{\partial x} + q\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - p\frac{\partial^3 S}{\partial x^3} + \int p\frac{\partial^4 S}{\partial x^4}\partial x\,;$$

u. s. f. u. s. f.

Substituirt man dies in obigen Ausdruck für v; so erhellet, daß die mit dem Integralzeichen behafteten Theile sich aufheben, und daß

$$v = p\left|P - \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 S}{\partial x^3} + \ldots\right|$$
$$+ q\left|Q - \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - \ldots\right|$$
$$+ r\left|R - \frac{\partial S}{\partial x} + \ldots\right|$$
$$+ s\left|S - \ldots\right|$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$+ C$$

offenbar eine Differentialgleichung vom Grade $2\alpha - 1$ (S. das Vorhergehende).

ε. Wäre weder x noch y in v enthalten; so wäre

$$\partial v = P\partial p + Q\partial q + R\partial r + S\partial s + \ldots,$$
$$o = \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} - \frac{\partial^4 S}{\partial x^4} + \ldots$$
$$= \partial P - \frac{\partial^2 Q}{\partial x} + \frac{\partial^3 R}{\partial x^2} - \frac{\partial^4 S}{\partial x^3} + \ldots,$$
$$C = P - \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 S}{\partial x^3} + \ldots,$$
$$P = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 S}{\partial x^3} - \ldots + C,$$

und folglich, dies in obigen Ausdruck für ∂v gesetzt,

$$\partial v = Q\partial q + R\partial r + S\partial s + T\partial t + \ldots$$
$$+ \frac{\partial Q}{\partial x}\partial p - \frac{\partial^2 R}{\partial x^2}\partial p + \frac{\partial^3 S}{\partial x^3}\partial p - \ldots + C\partial p$$
$$= Q\partial q + R\partial r + S\partial s + T\partial t + \ldots$$
$$+ q\frac{\partial Q}{\partial x}\partial x - q\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}\partial x + q\frac{\partial^3 S}{\partial x^3}\partial x - \ldots + C\partial p,$$

$$
\begin{aligned}
&+ Cp + C' \\
&= q\left\{Q - \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 T}{\partial x^3}\right. \\
&+ r\left\{R - \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \cdots\right\} \\
&+ s\left\{S - \frac{\partial T}{\partial x} + \cdots\right\} \\
&+ t\left\{T - \cdots\right\} \\
&\cdots\cdots\cdots \\
&- p\left\{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 S}{\partial x^3} - \frac{\partial}{\partial}\right. \\
&+ \int\left\{p\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + q\frac{\partial Q}{\partial x}\right\}\partial x \\
&- \int\left\{p\frac{\partial^3 R}{\partial x^3} + q\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}\right\}\partial x \\
&+ \int\left\{p\frac{\partial^4 S}{\partial x^4} + q\frac{\partial^3 S}{\partial x^3}\right\}\partial x \\
&- \cdots\cdots\cdots \\
&+ Cp + C'.
\end{aligned}
$$

Aber

$$
\cdots\cdots\cdots
$$

$$
p\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + q\frac{\partial Q}{\partial x} = p\cdot\frac{\partial\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial}{}
$$

$$v = q\left|Q - \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} + \dots\right| +$$
$$+ r\left|R - \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dots\right| +$$
$$+ s\left|S - \frac{\partial T}{\partial x} + \dots\right| +$$
$$+ t\left|T - \dots\right| + \dots + Cp + C'$$

Differentialgleichung vom Grade $2\alpha - 2$.

Wäre auch p nicht in v enthalten, also $P = 0$; so ($\beta.$):

$$-Q + \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} - \dots = Cx + C',$$
$$Q = \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} - \dots - Cx - C'.$$

$$\partial v = Q\partial q + R\partial r + S\partial s + T\partial t + \dots$$
$$= R\partial r + S\partial s + T\partial t + \dots$$
$$+ \frac{\partial R}{\partial x}\partial q - \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\partial q + \frac{\partial^3 T}{\partial x^3}\partial t - \dots - Cx\partial q - C'\partial q.$$

$$\int x\partial q = xq - \int q\partial x = xq - \int \partial p = xq - p.$$

ich

$$v = \int R\partial r + \int S\partial s + \int T\partial t + \dots$$
$$+ \int \frac{\partial R}{\partial x}\partial q - \int \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\partial q + \int \frac{\partial^3 T}{\partial x^3}\partial q - \dots$$
$$+ pC - q(Cx + C') + C''$$
$$= Rr - q\frac{\partial R}{\partial x} + p\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \int p\frac{\partial^3 R}{\partial x^3}\partial x$$
$$+ Ss - r\frac{\partial S}{\partial x} + q\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - p\frac{\partial^3 S}{\partial x^3} + \int p\frac{\partial^4 S}{\partial x^4}\partial x$$
$$+ Tt - s\frac{\partial T}{\partial x} + r\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - q\frac{\partial^3 T}{\partial x^3} + p\frac{\partial^4 T}{\partial x^4} - \int p\frac{\partial^5 T}{\partial x^5}\partial x$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$+ \int \frac{\partial R}{\partial x}\partial q - \int \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\partial q + \int \frac{\partial^3 T}{\partial x^3}\partial q - \dots$$
$$+ pC - q(Cx + C') + C''$$
$$= r\left|R - \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \dots\right|$$
$$+ s\left|S - \frac{\partial T}{\partial x} + \dots\right|$$
$$+ t\left|T - \dots\right|$$
$$+ \dots\dots\dots$$

$$+ p\left\{\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 S}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} - \cdots\right\}$$

$$- q\left\{\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} - \cdots\right\}$$

$$- \int\left\{p\frac{\partial^3 R}{\partial x^3} - r\frac{\partial R}{\partial x}\right\}\partial x$$

$$+ \int\left\{p\frac{\partial^4 S}{\partial x^4} - r\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\right\}\partial x$$

$$- \int\left\{p\frac{\partial^5 T}{\partial x^5} - r\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}\right\}\partial x$$

$$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$+ pC - q(Cx + C') + C'$$

$$r\left\{R - \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \cdots\right\}$$

$$+ s\left\{S - \frac{\partial T}{\partial x} + \cdots\right\}$$

$$+ t\left\{T - \cdots\right\}$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$+ p\left\{\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 S}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} - \cdots\right\}$$

$$- q\left\{\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} - \cdots\right\}$$

$$\frac{\partial^2 R}{\quad} \quad \frac{\partial p}{\partial R} \quad \frac{\partial R}{\quad} \quad \frac{\partial^2 p}{\partial R} \quad \frac{\partial R}{\quad}$$

3. Seyen nun y, z Functionen von x. Die vorige
hnung beibehaltend, setze man
$= p'\partial x$, $\partial p' = q'\partial x$, $\partial q' = r'\partial x$, $\partial r' = s'\partial x$, ... ;
$= f(x, y, p, q, r, \ldots z, p', q', r', \ldots)$,
$V = \int v\partial x$,
s sey dieses Integral, zwischen den Gränzen $x = a$,
b, zu einem Maximo oder Minimo zu machen. Sey
ach einer ähnlichen Bezeichnung wie vorher

$$\partial v = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\partial x$$
$$+ \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\partial y + \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)\partial p + \left(\frac{\partial v}{\partial q}\right)\partial q + \left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)\partial r + \ldots$$
$$+ \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)\partial z + \left(\frac{\partial v}{\partial p'}\right)\partial p' + \left(\frac{\partial v}{\partial q'}\right)\partial q' + \left(\frac{\partial v}{\partial r'}\right)\partial r' + \ldots$$
$$= \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\partial x$$
$$+ N\partial y + P\partial p + Q\partial q + R\partial r + \ldots$$
$$+ N'\partial z + P'\partial p' + Q'\partial q' + R'\partial r' + \ldots .$$

also zur Bestimmung des Maximum oder Minimum
= o gesetzt; so erhält man (26.):

$$o = \left\{P - \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 S}{\partial x^3} + \ldots\right\}\partial y$$
$$+ \left\{Q - \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - \ldots\right\}\frac{\partial \partial y}{\partial x}$$
$$+ \left\{R - \frac{\partial S}{\partial x} + \ldots\right\}\frac{\partial^2 \partial y}{\partial x^2}$$
$$+ \left\{S - \ldots\right\}\frac{\partial^3 \partial y}{\partial x^3}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots$$
$$+ \left\{P' - \frac{\partial Q'}{\partial x} + \frac{\partial^2 R'}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 S'}{\partial x^3} + \ldots\right\}\partial z$$
$$+ \left\{Q' - \frac{\partial R'}{\partial x} + \frac{\partial^2 S'}{\partial x^2} + \ldots\right\}\frac{\partial \partial z}{\partial x}$$
$$+ \left\{R' - \frac{\partial S'}{\partial x} + \ldots\right\}\frac{\partial^2 \partial y}{\partial x^2}$$
$$+ \left\{S' - \ldots\right\}\frac{\partial^3 \partial y}{\partial x^3}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots$$
$$+ \int\left\{N - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 S}{\partial x^4} - \ldots\right\}\partial y\,\partial x$$
$$+ \int\left\{N' - \frac{\partial P'}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q'}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R'}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 S'}{\partial x^4} - \ldots\right\}\partial z\,\partial x$$

$$0 = \overset{1}{K}_b(\delta y)_b -$$
$$+ \overset{2}{K}_b\left(\frac{\partial\delta y}{\partial x}\right)_b -$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \overset{\alpha}{K}_b\left(\frac{\partial^{\alpha-1}\delta y}{\partial x^{\alpha-1}}\right)_b -$$
$$+ \overset{1}{K'}_b(\delta z)_b -$$
$$+ \overset{2}{K'}_b\left(\frac{\partial\delta z}{\partial x}\right)_b -$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \overset{\beta}{K'}_b\left(\frac{\partial^{\beta-1}\delta z}{\partial x^{\beta-1}}\right)_b -$$
$$+ \int_a^b \left\{N - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial}\right.$$
$$+ \int_a^b \left\{N' - \frac{\partial P'}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q'}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial}\right.$$

Hier sind nun zwey Fälle zu
nämlich y und z von einander gan
durch eine Gleichung mit einand
ersten [illegible]ke man sich für

$2\alpha+1$ unbeſtimmten Conſtanten geſetzt, und dieſe Conſtanten ſich ſo beſtimmt denken, daß alle mit δy und deſſen Differentialquotienten behafteten Glieder (deren Anzahl $= 2\alpha+1$) verſchwinden, wodurch ſich die Gleichung auf eine ganz ähnliche Gleichung, in Bezug auf z, wie in (35.) reducirt, in welcher man, da y und z von einander ganz unabhängig ſind, nun ferner für δz jede beliebige Function ſetzen kann. Folglich erhält man in dieſem Falle nach (35.):

$$o = \overset{1}{K}_a = \overset{2}{K}_a = \overset{3}{K}_a = \ldots = \overset{\alpha}{K}^a,$$

$$o = \overset{1}{K}_b = \overset{2}{K}_b = \overset{3}{K}_b = \ldots = \overset{\alpha}{K}_b;$$

$$o = \overset{1}{K'}_a = \overset{2}{K'}_a = \overset{3}{K'}_a = \ldots = \overset{\beta}{K'}_a,$$

$$o = \overset{1}{K'}_b = \overset{2}{K'}_b = \overset{3}{K'}_b = \ldots = \overset{\beta}{K'}_b;$$

$$o = N - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 S}{\partial x^4} - \ldots,$$

$$o = N' - \frac{\partial P'}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q'}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R'}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 S'}{\partial x^4} - \ldots.$$

Die beiden letzten Gleichungen heißen auch hier die allgemeinen Bedingungen des Maximum und Minimum, die erſtern, im Allgemeinen an der Zahl $= 2(\alpha+\beta)$, die Gränzgleichungen, welche, wie oben, zur Beſtimmung der bey der Integration einzuführenden willkührlichen Conſtanten dienen.

Sind aber y, z ſelbſt von einander abhängig, und folglich zwiſchen dieſen Größen eine Gleichung

$$u = \psi(x, y, z) = o$$

gegeben, wie z. B., wenn eine, einer gewiſſen Bedingung des Maximum oder Minimum entſprechende, Curve geſucht werden ſoll, welche auf einer gegebenen, durch obige Gleichung characteriſirten Fläche liegt; ſo müſſen offenbar y, z, unter welchen Zuſtänden man ſie ſich auch denken mag, doch immer der obigen Gleichung entſprechen, ſo daß alſo ſelbige auch noch gelten muß, wenn man ſtatt y, z die variirten y_i, z_i ſetzt, wodurch man erhält:

$$u_i = \psi(x, y_i, z_i) = o,$$

$$\mathfrak{A} = A, \alpha = \frac{B}{A}, \alpha' = \frac{D}{A},$$

$$\mathfrak{B} = C - \frac{B^2}{A}, \beta = \frac{E - A\alpha}{\mathfrak{B}}$$

$$\mathfrak{C} = F - \frac{D^2}{A} - \frac{(E - A\alpha}{\mathfrak{B}}$$

wo für α, α', $\mathfrak{B}$ leicht ihre entwic
werden können. Iſt alſo A nicht =
$\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, α, α', β immer beſtimmen
der einfachere Fall, wenn die gegeben
von der Form

$$Ap^2 + 2Bpq + Cq$$

iſt, enthalten, da man im Obigen bl
zu ſetzen braucht. Setzt man nämlich

$$= \mathfrak{A}(p + \alpha q)^2 + \mathfrak{B}$$

ſo wird,

$$\mathfrak{A} = A, \mathfrak{B} = C - \frac{B^2}{A},$$

Die Erweiterung dieſes Verfahrens
mogene Functionen des zweiten Grad
rigkeiten unterworfen. Wäre A =
daß die hier betrachteten homo

p, q, r oder p, q positiv oder negativ seyn werden, wenn $A > o$ oder $A < o$ ist, B, C oder B dagegen im ersten Falle nicht $< o$, im letzten nicht $> o$ sind.

Wäre im letzten einfachern Falle $AC - B^2 = o$; so würde offenbar das Zeichen von $Ap^2 + 2Bpq + Cq^2$ bloß von $\mathfrak{A} = A$ abhängen. Sollte im ersten Falle auch das Zeichen bloß von A abhängen; so setze man

$$\begin{aligned} &Ap^2 + 2Bpq + Cq^2 + 2Dpr + 2Eqr + Fr^2 \\ &= \mathfrak{A}(p + \alpha q + \alpha' r)^2 \\ &= \mathfrak{A}p^2 + 2\mathfrak{A}\alpha pq + \mathfrak{A}\alpha^2 q^2 + 2\mathfrak{A}\alpha' pr + 2\mathfrak{A}\alpha\alpha' qr + \mathfrak{A}\alpha'^2 r^2 , \end{aligned}$$

woraus durch Vergleichung:

$$\mathfrak{A} = A,\ \mathfrak{A}\alpha = B,\ \mathfrak{A}\alpha^2 = C,\ \mathfrak{A}\alpha' = D,\ \mathfrak{A}\alpha\alpha' = E,\ \mathfrak{A}\alpha'^2 = F;$$

folglich, wenn α und α' eliminirt werden:

$$AC - B^2 = o,\ AF - D^2 = o,\ BD - AE = o ,$$

welche Gleichungen also erfüllt seyn müssen, wenn das Zeichen des obigen homogenen Ausdruckes bloß von A abhängen soll.

40. Sey nun, um mit dem einfachsten Falle anzufangen, $v = f(x, y)$, und $\int v\partial x$ zwischen den Gränzen $x = a$, $x = b$ zu einem Maximo oder Minimo zu machen. Die allgemeine Bedingung des Maximum und Minimum ist in diesem Falle (35.)

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = o ,$$

und nach (21.) ist

$$\delta^2 v = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\delta^2 y + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\delta y^2 .$$

Folglich, wegen der allgemeinen Bedingung des Maximum und Minimum, bloß zu setzen:

$$\delta^2 \int v\partial x = \int(\delta^2 v)\partial x = \int\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\delta y^2\,\partial x ,$$

zwischen den gegebenen Gränzen. Nun ist aber

$$\int_a^b \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\delta y^2\,\partial x ,$$

ls die Summe aller Werthe des Differentialquotienten $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2})\delta y^2$ zwischen den gegebenen Gränzen, offenbar positiv der negativ, wenn dieser Differentialquotient zwischen

en Gränzen ſelbſt immer poſitiv oder negativ
alſo, da δy^2 keinen Einfluß auf das Zei-
$\delta^2 \int v \partial x$ zwiſchen den gegebenen Gränzen
negativ iſt, d. h. ein Minimum oder Maximum
wenn $\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$ zwiſchen dieſen Gränzen entweder
ſv, oder immer negativ iſt.

y ferner $v = f(x, y, y_1)$, und wieder $\int v \partial x$
n Gränzen $x = a$, $x = b$ zu einem Maximo
no zu machen. Die allgemeine Bedingung des
und Minimum und die Gränzgleichungen (35.)

$$N - \frac{\partial P}{\partial x} = o, \quad P = o, \quad P_b = o.$$

iſt (21.):

$$\delta^2 v =$$
$$\delta^2 y + \left(\frac{\partial v}{\partial y_1}\right) \frac{\partial \delta^2 y}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \delta y^2$$
$$+ 2 \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial y_1} \delta y \frac{\partial \delta y}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2}\right) \left(\frac{\partial \delta y}{\partial x}\right)^2.$$

irt man die beiden erſten Glieder theilweiſe;

$$N'\delta y^2 + 2P'\delta y\frac{\partial\delta y}{\partial x} + Q'\left(\frac{\partial\delta y}{\partial x}\right)^2 =$$

$$A\left(\frac{\partial\delta y}{\partial x}\right)^2 + 2(B+\varphi)\delta y\frac{\partial\delta y}{\partial x} + \left(C+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\delta y^2,$$

woraus durch Vergleichung:

$$A = Q',\ B = P' - \varphi,\ C = N' - \frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

für eine beliebige Function φ von x, so daß man sich also φ so bestimmt denken kann, daß

$$AC - B^2 = o,\ \text{d. i. } Q'\left(N' - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) - (P' - \varphi)^2 = o$$

ist. Dann hängt aber, wie aus (39.) augenblicklich folgt, das Zeichen von

$$A\left(\frac{\partial\delta y}{\partial x}\right)^2 + 2B\delta y\frac{\partial\delta y}{\partial x} + C\delta y^2$$

für jedes δy bloß von A ab, und es ist also, wenn $A = \frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2}$ zwischen den gegebenen Gränzen immer positiv oder negativ ist, nach einem ähnlichen Raisonnement wie in (40.) auch

$$\int_a^b \left\{ A\left(\frac{\partial\delta y}{\partial x}\right)^2 + 2B\delta y\frac{\partial\delta y}{\partial x} + C\delta y^2 \right\}\partial x$$

positiv oder negativ. Der zwischen den Gränzen $x = a$ $x = b$ genommenen Werth von $\delta^2\int v\partial x$ ist $=$

$$\varphi_b\,\delta y_b{}^2 - \varphi_a\,\delta y_a{}^2$$
$$+\int_a^b \left\{ A\left(\frac{\partial\delta y}{\partial x}\right)^2 + 2B\delta y\frac{\partial\delta y}{\partial x} + C\delta y^2 \right\}\partial x.$$

Da aber φ durch die Differentialgleichung

$$Q'\left(N' - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) - (P' - \varphi)^2 = o$$

bestimmt wird; so läßt sich allemal eine willkührliche Constante einführen, welche, offenbar in

$$\varphi_b\,\delta y_b{}^2 - \varphi_a\,\delta y_a{}^2$$

eingehend, für jedes δy zwar anders, aber doch immer so bestimmt gedacht werden kann, daß diese Differenz mit

$$\int_a^b \left\{ A\left(\frac{\partial\delta y}{\partial x}\right)^2 + 2B\delta y\frac{\partial\delta y}{\partial x} + C\delta y^2 \right\}\partial x$$

gralzeichen in $\delta^2 \int v \partial x$ bloß von

(39.), und das entſprechende Inte
zwiſchen den gegebenen Gränzen ge
negativ ſeyn, wenn $\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y_2^2}\right)$ zwiſche
poſitiv oder immer negativ iſt. Z
φ', φ'' erhält man aber aus dem
rentialgleichungen:

$$T'\left(Q' - 2\varphi' - \frac{\partial \varphi''}{\partial x}\right) -$$

$$T''\left(N' - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) - (R' - \varphi'$$

$$(S' - \varphi'')(R' - \varphi') - T'\left($$

ſo daß alſo die Beſtimmung von φ,
liche Conſtanten herbeiführt, welch
denken kann, daß

$$\left\{ \varphi \delta y^2 + 2\varphi' \delta y \frac{\partial \delta y}{\partial x} + \varphi''\right($$

$$\left\{ \frac{\partial \delta y}{}\right.$$

lle Werthe von x zwiſchen den gegebenen Gränzen = o;
› kann, weil $A = T' = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y_2^2}\right) = o$ iſt, $\partial^2 \int v \partial x$ zwi-
hen den gegebenen Gränzen nicht immer einerlei Zeichen
ehalten, wenn nicht auch $R' = S' = o$ iſt, für jeden
Berth von x zwiſchen dieſen Gränzen (39.). Dann wird
$^2 \int v \partial x =$

$$N' \partial y^2 + 2P' \partial y \frac{\partial \partial y}{\partial x} + Q' \left(\frac{\partial \partial y}{\partial x}\right)^2,$$

nd es tritt nun der in (41.) betrachtete Fall ein.

Wie man auf dieſe Art weiter gehen könnte, erhellet
icht. Indeß wird das Obige für die folgenden Anwen-
ungen hinreichend ſeyn, und auch genugſam den Weg
ndeuten, welcher bey dieſer Unterſuchung einzuſchlagen iſt,
enn in v, außer y und ſeinen Differentialquotienten auch
och die von x abhängige Größe z nebſt ihren Differential-
uotienten vorkommt.

43. Die wichtigſten und lehrreichſten Anwendungen
er hier entwickelten Sätze bietet in der reinen Mathema-
ik die höhere Geometrie dar. Gewöhnlich ſind aber bey
en hierher gehörenden Aufgaben noch beſondere Bedingun-
en in Bezug auf die Gränzen zu berückſichtigen, wodurch
och einige Erläuterungen nöthig gemacht werden, indem
ir größerer Deutlichkeit wegen immer die geometriſche
Beziehung ſolcher Aufgaben ins Auge faſſen.

44. Sey zunächſt eine durch zwey gegebene Punkte
ehende Curve zu finden, für welche ein gewiſſes unbe-
timmtes Integral $\int v \partial x$ ein Maximum oder Minimum
ird, und ſeyen $x = a$, $x = b$ die Abſciſſen der beiden
egebenen Punkte; ſo iſt $\int v \partial x$ zwiſchen dieſen beiden
Gränzen im Allgemeinen zu einem Maximo oder Minimo
u machen. Da nun aber an den Gränzen auch $y = a'$,
$= b'$, und, bey Punkten im Raume, auch $z = a''$,
$= b''$ gegeben iſt; ſo ſoll man nicht unter allen Relatio-
en zwiſchen x, y, oder x, y, z, diejenige finden, für
elche $\int v \partial x$, zwiſchen den Gränzen $x = a$, $x = b$, ein
Maximum oder Minimum wird, ſondern nur unter allen
en Relationen zwiſchen x, y, oder x, y, z, für welche

as die Kriterien des Maximum und Minimum
42.) betrifft; ſo hat man für die beiden hier be-
Fälle nur zu ſetzen, in (40.): $\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = o$ für
; in (41.):

$$N - \frac{\partial P}{\partial x} = o,\ \delta^2 y_a = o,\ \delta^2 y_b = o$$

en, und

$$N - \frac{\partial P}{\partial x} = o,\ \delta^2 y_a = o,\ P = o$$

iten Fall; in (42.) dagegen

$$+ \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = o,\ \delta^2 y_a = o,\ \left(\frac{\partial \delta^2 y}{\partial x}\right)_a = o,$$

$$\delta^2 y_b = o,\ \left(\frac{\partial \delta^2 y}{\partial x}\right)_b = o$$

en, und

$$+ \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = o,\ \delta^2 y_a = o,\ \left(\frac{\partial \delta^2 y}{\partial x}\right)_a = o,$$

$$\left(P - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)_b = o,\ Q_b = o$$

wo A, A′ zwey willkührliche Constanten bezeichnen. Also

$$P = \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right) = \frac{p}{\sqrt{1+p^2+p'^2}} = A,$$

$$P' = \left(\frac{\partial v}{\partial p'}\right) = \frac{p'}{\sqrt{1+p^2+p'^2}} = A';$$

$$\frac{A}{p} = \frac{A'}{p'}, \quad p'A = pA';$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{A}{A'}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{A'}{A}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}.$$

Setzt man nun den Werth von $\frac{\partial z}{\partial x} = p'$ in den obigen Ausdruck für A, den Werth von $\frac{\partial y}{\partial x} = p$ in den Ausdruck für A′, und entwickelt im ersten Falle $\frac{\partial y}{\partial x} = p$, im andern $\frac{\partial z}{\partial x} = p'$; so erhält man:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{A}{\sqrt{1-A^2-A'^2}} = B,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{A'}{\sqrt{1-A^2-A'^2}} = B';$$

$$\partial y = B\partial x, \quad \partial z = B'\partial x;$$

$$y = Bx + C, \quad z = B'x + C',$$

wo C, C′ zwey neue willkührliche Constanten sind. Dies sind die Gleichungen einer geraden Linie im Raume. Die Constanten B, B′, C, C′ müssen aus der Bedingung, daß die Curve durch zwey gegebene Punkte gehen soll, bestimmt werden. Aus dieser Bedingung erhält man:

$$a' = Ba + C, \quad b' = Bb + C;$$
$$a'' = B'a + C', \quad b'' = B'b + C';$$

vier Gleichungen mit vier unbekannten Größen. Also

$$y = \frac{a' - b'}{a - b}x + \frac{ab' - a'b}{a - b},$$

$$z = \frac{a'' - b''}{a - b}x + \frac{ab'' - a''b}{a - b}.$$

48. Sollte die gesuchte Linie nur durch einen gegebenen Punkt, dessen Coordinaten a, a′, a″ sind, gehen; so würde, da das Integral zwischen den Gränzen $x = a$, $x = b$ genommen werden soll, der Sinn der Aufgabe kein anderer seyn, als unter allen durch den gegebenen Punkt gehenden, und zwischen zwey auf der Axe der x

den Abſciſſen $x = a$ und $x = b$ entſprechen-
n liegenden Linien die kürzeſte zu finden. Wie
lt man:

$$y = Bx + C, \quad z = B'x + C',$$

ſtimmung der Conſtanten (45. 38.):

$$Ba + C, \; a'' = B'a + C, \; P_b = o, \; P'_b = o .$$

$$P = \frac{p}{\sqrt{1+p^2+p'^2}} = \frac{B}{\sqrt{1+B^2+B'^2}},$$

$$P' = \frac{p'}{\sqrt{1+p^2+p'^2}} = \frac{B'}{\sqrt{1+B^2+B'^2}}.$$

üſſen p und p′ für $x = b$ verſchwinden. Da
p′ conſtant, $= B$ und $= B'$ ſind, alſo im-
demnach auch für $x = b$, einerley Werth be-
rhellet, daß $B = B' = o$, und folglich $C = a'$,
alſo

$$y = a', \; z = a''$$

dieſen Gleichungen erhellet, daß die geſuchte
durch den gegebenen Punkt gehende, mit der
parallele, gerade Linie iſt, ganz der Natur der

$$\delta^2 \int v \partial x =$$

$$\int \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right) \frac{\partial \delta^2 y}{\partial x} \partial x + \int \left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\right) \left(\frac{\partial \delta y}{\partial x}\right)^2 \partial x$$

$$+ \int \left(\frac{\partial v}{\partial q}\right) \frac{\partial \delta^2 z}{\partial x} \partial x + \int \left(\frac{\partial^2 v}{\partial p' 2}\right) \left(\frac{\partial \delta z}{\partial x}\right)^2 \partial x$$

$$= P \delta^2 y - \int \frac{\partial P}{\partial x} \delta^2 y \partial x + \int \left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\right) (\delta p)^2 \partial x$$

$$+ P' \delta^2 z - \int \frac{\partial P'}{\partial x} \delta^2 z \partial x + \int \left(\frac{\partial^2 v}{\partial p' 2}\right) (\delta p')^2 \partial x .$$

Nun ist im ersten der drey vorher betrachteten Fälle:

$$\delta^2 y_a = 0, \ \delta^2 z_a = 0, \ \delta^2 y_b = 0, \ \delta^2 z_b = 0 ;$$

im zweiten dagegen:

$$\delta^2 y_a = 0, \ \delta^2 z_a = 0, \ P_b = 0, \ P'_b = 0 ;$$

und im dritten

$$P_a = 0, \ P'_a = 0, \ P_b = 0, \ P'_b = 0 ;$$

in allen dreyen aber, wegen der allgemeinen Bedingung des Maximum und Minimum, identisch

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0 , \ \frac{\partial P'}{\partial x} = 0 ;$$

so daß also, wenn $\delta^2 \int v \partial x$ zwischen den gegebenen Gränzen $x = a$, $x = b$ genommen wird, bloß

$$\delta^2 \int v \partial x = \int \left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\right) (\delta p)^2 \partial x + \int \left(\frac{\partial^2 v}{\partial p' 2}\right) (\delta p')^2 \partial x$$

zu setzen ist. Die Summe der Größen unter dem Integralzeichen erhält man leicht

$$= \frac{1 + p'^2}{\sqrt{(1 + p^2 + p'^2)^3}} (\delta p)^2 + \frac{1 + p^2}{\sqrt{(1 + p^2 + p'^2)^3}} (\delta p'^2),$$

welches offenbar immer positiv ist, da die Quadratwurzel natürlich positiv zu nehmen ist, indem hier von keiner Entgegensetzung die Rede seyn kann, und auch in

$$s = \int \partial x \sqrt{1 + p^2 + p'^2}$$

die Quadratwurzel als positiv angesehen worden. Folglich ist auch $\delta^2 \int v \partial x$ zwischen den gegebenen Gränzen positiv, so daß also in der That ein Minimum statt findet.

51. Das erste Problem aus der Klasse der absoluten Maxima und Minima ward von Joh. Bernoulli in

rud. 1696. den Geometern ſeiner Zeit vor
te zwiſchen zwey gegebenen Punkten A,
nden, auf welcher ein ſchwerer Punkt du
kürzeſten Zeit von A bis B gelangt. Gehö
uch eigentlich der Mechanik an; ſo darf e
hlen, indem ſich demſelben auch leicht ein
Anſicht abgewinnen läßt, und es ein
rbietet, für die Auffindung der Bedingu
en ein gegebenes Integral zwiſchen geg
n Minimum wird.

oordinaten der gegebenen Punkte A,
en wieder a, a′, a″; b, b′, b″, und
alls von A bis B, der Bogen AB =
P = x — a (Fig. 96.) nach Principi

$$\partial t = \frac{\partial s}{2\sqrt{g(x-a)}},$$

gewöhnlich, den Fallraum (nämlich beym
erſten Zeiteinheit bezeichnet. Aber, wie vo

$$\partial s = \partial x \sqrt{1+p^2+p'^2};$$

$$\alpha p' - \alpha' p = 0, \alpha \partial z - \alpha' \partial y = 0,$$

und folglich, wenn man integrirt:

$$\alpha z - \alpha' y = \alpha'',$$

wo α'' eine neue willkührliche Conſtante. Da nun die Gleichung der Ebene der yz offenbar

$$x + 0.y + 0.z = 0$$

iſt; ſo iſt (Linie und Ebene. 48.) vorhergehende Gleichung

$$\alpha z - \alpha' y = \alpha''$$

die Gleichung einer auf der Ebene der yz ſenkrechten Ebene, in welcher alſo die geſuchte Curve liegen muß; alſo, da nach mechaniſchen Principien AP als vertikal angenommen werden muß, eine durch A und B gehende Vertikalebene. Da demnach die geſuchte Curve eine Curve von einfacher Krümmung iſt; ſo haben wir bloß zu ſetzen:

$$\frac{p}{2\sqrt{g(x-a)(1+p^2)}} = \alpha,$$

oder, wenn wir A als Anfang der Abſciſſen annehmen, alſo $a = 0$, und, der Kürze wegen, $\frac{1}{4\alpha^2 g} = \gamma$ ſetzen:

$$p = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{\gamma x - x^2}},$$

woraus durch Zerlegung leicht:

$$\partial y = \frac{\gamma \partial x}{2\sqrt{\gamma x - x^2}} - \frac{(\gamma - 2x)\partial x}{2\sqrt{\gamma x - x^2}},$$

und, für $\frac{2x}{\gamma} = u$, $\gamma x - x^2 = w$:

$$\partial y = \frac{\gamma \partial u}{2\sqrt{2u - u^2}} - \tfrac{1}{2} w^{-\frac{1}{2}} \partial w,$$

$$y = \tfrac{1}{2}\gamma \operatorname{Arc\,sin\,vers}\, u - \sqrt{w} + C$$

$$= \tfrac{1}{2}\gamma \operatorname{Arc\,sin\,vers}\frac{2x}{\gamma} - \sqrt{\gamma x - x^2} + C.$$

Da nun A als Anfang der Abſciſſen angenommen; ſo iſt $y = 0$ für $x = 0$. Alſo $C = 0$, und, für $\gamma = 2r$:

$$y = r \operatorname{Arc\,sin\,vers}\frac{x}{r} - \sqrt{2rx - x^2}.$$

Setzt man im Art. Cycloide. I. r für a, und vertauſcht x, y gegen einander; ſo iſt

$$x = r(1 - \cos\varphi),\ y = r(\varphi - \sin\varphi);$$

und folglich, wenn man φ eliminirt:

$x = r \sin vers \varphi$, $\varphi = Arc \sin vers \frac{x}{r}$;

$\cos\varphi = \frac{r-x}{r}$, $\sin\varphi = \frac{1}{r}\sqrt{2rx-x^2}$,

eſes in die Formel $y = r(\varphi - \sin\varphi)$ für φ
geſetzt, die obige Gleichung hervorgeht, ſo daß
Curve eine Cycloide iſt, deren Anfang A, und
durch A auf AP ſenkrechte Linie iſt. Den Ra-
erzeugenden Kreiſes findet man aus der Bedin-
$y = b'$ für $x = a'$, mittelſt der gefundenen

ur der Punkt A gegeben; ſo würde der Sinn
in anderer ſeyn, als die Curve zu finden, auf
ſchwerer Punkt in der kürzeſten Zeit durch den
bis zu der auf AP durch P ſenkrechten Linie PB,
Abſciſſe $x = b$, als zweiten Gränze des Inte-
icht, gelangt. Für dieſen Fall erhält man
bige Gleichung, nur muß r aus der Gleichung

$$P_b = o$$

erden, woraus ſich leicht

52. Zur Unterscheidung des Maximum und Minimum hat man (21.), da v kein y enthält:

$$\delta^2 v = \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)\frac{\partial \delta^2 y}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\right)\left(\frac{\partial \delta y}{\partial x}\right)^2,$$

und durch theilweise Integration des ersten Theils, für $\frac{\partial v}{\partial p} = P$:

$$\delta^2 \int v \partial x =$$

$$P\delta^2 y - \int \frac{\partial P}{\partial x}\delta^2 y\,\partial x + \int \left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\right)\left(\frac{\partial \delta y}{\partial x}\right)^2 \partial x,$$

woraus man ganz wie in (50.) schließt, daß, zwischen den Gränzen $x = a$, $x = b$, bloß gesetzt zu werden braucht:

$$\delta^2 \int v \partial x = \int \left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\right)(\delta p)^2 \partial x$$

$$= \tfrac{1}{2}\int \frac{\partial x}{\sqrt{gx(1+p^2)^3}}(\delta p)^2,$$

das Integral zwischen $x = a$, $x = b$ oder $x = o$, $x = b$ genommen, da oben $a = o$ gesetzt worden. Da nun

$$\frac{1}{\sqrt{gx(1+p^2)^3}}(\delta p)^2$$

unabhängig von δp immer positiv ist, indem, wie vorher immer, die Quadratwurzel natürlich als positiv zu betrachten ist; so ist auch vorhergehendes Integral, als die Summe aller Werthe dieses Differentialquotienten zwischen obigen Gränzen, immer positiv, und folglich die Bedingung des Minimum erfüllt.

Wegen der hier entwickelten Eigenschaft der Cycloide heißt sie die Linie des schnellsten Falls, oder die Brachystochrone.

53. Die Curve zu finden, welche, zwey gegebene Punkte mit einander verbindend, bey der Umdrehung um die Axe der x die kleinste Oberfläche erzeugt. Sey s die erzeugte Fläche; so ist (Thl. I. S. 514.)

$$s = 2\pi \int y \partial x \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = 2\pi \int y \partial x \sqrt{1+p^2},$$

und dieses Integral soll also, wenn a, a'; b, b' die Coordinaten der gegebenen Punkte sind, zwischen $x = a$, $x = b$ ein Minimum werden. Es ist hier

$= y\sqrt{1+p^2}$, $N = \sqrt{1+p^2}$, $P = \frac{py}{\sqrt{1+p^2}}$;

$$Q = R = S = \ldots = 0 .$$

nicht unmittelbar enthalten; ſo iſt (37.
Bedingung des Maximum und Minimum

$$v = pP + C = \frac{p^2 y}{\sqrt{1+p^2}} + C ,$$

, wenn für v ſein obiger Werth geſetzt

$$= \frac{y^2 - C^2}{C^2} = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 , \frac{\partial x}{C} = \frac{\partial y}{\sqrt{y^2 - C^2}} ;$$

$$\int \frac{\partial y}{\sqrt{y^2 - C^2}} = \int \frac{(y + \sqrt{y^2 - C^2})\,\partial y}{(y + \sqrt{y^2 - C^2})\sqrt{y^2 - C^2}}$$

$$\frac{+\frac{1}{2}(y^2 - C^2)^{-\frac{1}{2}} . 2y\,\partial y}{y + \sqrt{y^2 - C^2}} = \int \frac{\partial (y + \sqrt{y^2 - C^2})}{y + \sqrt{y^2 - C^2}}$$

Integralformel. 3.):

$$\frac{x}{C} = \log n (y + \sqrt{y^2 - C^2}) + C' .$$

nten C, C′ ergeben ſich aus der Bedi
ſuchte Curve durch die beiden gegebenen
Die möglichſt kleinſte Ordinate iſt —

$$y = \tfrac{1}{2}C\left\{e^{\frac{x}{C}} + e^{-\frac{x}{C}}\right\},$$

er, durch Verwechslung der Abscissen und Ordinaten,

$$x = \tfrac{1}{2}C\left\{e^{\frac{y}{C}} + e^{-\frac{y}{C}}\right\},$$

d, wenn man, die Ordinaten ungeändert lassend, die scissen von einem Anfangspuncte an rechnet, dessen Abs sse $= C$ ist, wo $C + x$ statt x in obiger Gleichung ge- t werden muß:

$$x = \tfrac{1}{2}C\left\{e^{\frac{y}{C}} + e^{-\frac{y}{C}} - 2\right\};$$

daß also die gesuchte Curve die gemeine **Kettenlinie** S. dsn. Art. 5.) ist, welche folglich die merkwürdige Eigen- aft hat, daß sie unter allen durch zwey gegebene Punkte henden Curven bei der Umdrehung um die Axe der x die einste Oberfläche erzeugt. Denn daß in diesem Falle wirk- h ein Minimum statt findet, erhellet sogleich, wenn man 1.) $\frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial p^2} = \frac{\partial P}{\partial p}$ entwickelt, wodurch man

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2}\right) = \frac{y}{\sqrt{(1+p^2)^3}}$$

hält. Aus der Gleichung

$$y = \tfrac{1}{2}C\left\{e^{\frac{x}{C}} + e^{-\frac{x}{C}}\right\}$$

hellet aber, daß y entweder immer positiv oder immer gativ ist, d. h. daß die Curve ganz auf einer Seite der bscissenlinie liegt, und demnach hier an keine Entgegen- zung zu denken ist, y also immer als positiv angenommen rden kann. Daher ist $\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2}\right)$ positiv, und es findet folg- h ein Minimum statt.

54. Die Curve zu finden, bey welcher der von dem ogen AB (Fig. 97.), den beiden Krümmungshalbmessern C, BD der Endpunkte desselben, welche als gegeben an- sehen werden, und dem Bogen CD der Evolute einge- schlossene Raum ABCD ein Minimum ist.

Der in Rede stehende Raum sey $= S$, der Bogen $B = s$, und der Krümmungshalbmesser, ohne Rücksicht

chen, $= r$: ſo erhellet leicht, daß $\partial S =$

$$\partial s = \partial x \sqrt{1+p^2},\quad r = \pm \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q};$$

$$= \pm \tfrac{1}{2} \int \frac{(1+p^2)^2\,\partial x}{q},\quad v = \pm \frac{(1+p^2)^2}{q};$$

$$= \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0,\quad P = \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right) = \pm \frac{4p(1+p^2}{q}$$

$$= \left(\frac{\partial v}{\partial q}\right) = \mp \frac{(1+p^2)^2}{q^2},\quad R = S = T = \ldots =$$

(37. ε.)

$$qQ + Cp + C',\quad \pm \frac{2(1+p^2)^2}{q} = Cp + C';$$

$$\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q} \cdot \sqrt{1+p^2} = Cp + C';$$

$$\sqrt{1+p^2} = Cp + C',\quad r = \frac{Cp+C'}{2\sqrt{1+p^2}};$$

$$= \frac{(C - C'p)\,\partial p}{2q} = \tfrac{1}{2}(C\partial x - C'\partial y);$$

$$= \tfrac{1}{2}(Cx - C'y + C''),\quad r^2 = cx + c'y + c'',$$

$$c\cos\lambda + c'\sin\lambda = o$$

erfüllt wird; so ist

$$\cos\lambda = \frac{c'}{\sqrt{c^2+c'^2}},\ \sin\lambda = -\frac{o}{\sqrt{c^2+c'^2}};$$

welches, in obige Gleichung gesetzt, giebt:

$$r^2 = \frac{c^2+c'^2}{\sqrt{c^2+c'^2}}\cdot y' = y'\sqrt{c^2+c'^2} = 8ay',$$

für $8a = \sqrt{c^2+c'^2}$. Der Gleichung $r^2 = 8ay'$ muß also die gesuchte Curve genügen. Dies führt sogleich auf die gemeine Cycloide, indem (Thl. I. S. 604. 601.) bey derselben $r = 4a\sin\frac{1}{2}\varphi$, $r^2 = 16a^2\sin\frac{1}{2}\varphi^2 = 8a^2(1-\cos\varphi) = 8a.a(1-\cos\varphi) = 8ay'$ ist. Die Axe der x' ist dann die Basis der Cycloide, y' also immer positiv zu setzen, und, weil die Cycloide gegen die Basis, d. i. hier die Axe der x', concav ist, $\frac{\partial^2 y'^2}{\partial x'^2} = q'$ immer negativ (Concav und Convex. 10.). Daher ist, damit der Krümmungshalbmesser, wie oben angenommen worden, positiv sey:

$$r = -\frac{(1+p'^2)^{\frac{3}{2}}}{q'},\ v = -\frac{(1+p'^2)}{q'},$$

zu setzen. Also

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial q'^2}\right) = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y'^2_2}\right) = -\frac{2(1+p'^2)^2}{q'^3},$$

und folglich, da q'^3 nach dem Obigen immer negativ ist, $\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y'^2_2}\right)$ immer positiv, so daß also in der That ein Minimum statt findet.

Aus den beiden Gleichungen

$$r = \frac{Cp+C'}{2\sqrt{1+p^2}},\ r^2 = Cx - C'y + C''$$

ergiebt sich

$$\frac{(Cp+C')^2}{1+p^2} = 4(Cx - C'y + C'')^2,$$

woraus erhellet, daß, wegen $p = \frac{\partial y}{\partial x}$, bey der Integration noch eine vierte willkührliche Constante eingeführt wird, so daß also, wenn die gesuchte Curve völlig bestimmt seyn soll, überhaupt vier Bedingungen gegeben seyn müssen,

zu genügen hat. Es werden alſo, nebſt den gegebenen Punkten, noch zwey andere Punkte n, durch welche die geſuchte Curve hindurch und die, dieſen Bedingungen gemäß beſtimmte, ird unter allen durch die vier gegebenen Punkte henden Curven der obigen Bedingung des Mi- igen.

Curve zu finden, bey welcher

$$\int \frac{v\partial y^3}{\partial x^2 + \partial y^2} = \int \frac{p^3 y\, \partial x}{1 + p^2}$$

m oder Minimum wird. Es iſt hier

$\frac{p^3 y}{1+p^2}$, $N = \frac{p^3}{1+p^2}$, $P = \frac{p^2(3+p^2)y}{(1+p^2)^2}$,

. δ.):

$pP + C$, $\frac{p^3 y}{1+p^2} = \frac{p^3(3+p^2)y}{(1+p^2)^2} + C$;

$= -\frac{C(1+p^2)^2}{2p^3} = \frac{c(1+p^2)^2}{2p^3}$

$= c$. Aber $\partial y = p\partial x$,

$= \frac{\partial y}{p}$, $x = \int \frac{\partial y}{p} = \frac{y}{p} + \int \frac{y\partial p}{p^2}$,

r x, eine Fläche erzeugt, die nach der Richtung der Axe r x in einer Flüſſigkeit bewegt, von der Flüſſigkeit den inſten Widerſtand erleidet, überein.

56. Zwiſchen zwey gegebenen Punkten auf der Oberche einer Kugel die kürzeſte Linie zu finden.

Die Gleichung der Kugel iſt, wenn r den Radius bechnet:

$$u = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0,$$

) der Mittelpunkt der Anfangspunkt der Coordinaten iſt. ſo (38.):

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 2y, \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = 2z, y\delta y + z\delta z = 0,$$

b, da

$$f v \partial x = f \partial x \sqrt{1 + p^2 + p'^2}$$

einem Minimo zu machen:

$$N = 0, P = \frac{\partial y}{\partial s}, P' = \frac{\partial z}{\partial s};$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)}{\partial x}\delta y + \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)}{\partial x}\delta z = 0.$$

liminirt man nun $\frac{\delta z}{\delta y}$ aus den beiden gefundenenen Gleiungen; ſo erhält man:

$$y\partial\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right) - z\partial\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right) = 0,$$

ıb, wenn man integrirt:

$$y\frac{\partial z}{\partial s} - \int\frac{\partial y\,\partial z}{\partial s} - z\frac{\partial y}{\partial s} + \int\frac{\partial y\,\partial z}{\partial s} = c.$$

ſo, zugleich dnrch bloße Vertauſchung der Buchſtaben:

$$y\partial z - z\partial y = c\partial s,\ z\partial x - x\partial z = c'\partial s,\ x\partial y - y\partial x = c''\partial s.$$

ıultiplicirt man die erſte dieſer Gleichungen durch x, die eite durch y, die dritte durch z, und addirt die erhalten Gleichungen; ſo ergiebt ſich:

$$cx + c'y + c''z = 0,$$

: Gleichung einer Ebene, in welcher alſo die geſuchte ırve liegen muß. Für $x = y = 0$ iſt auch $z = 0$, daß alſo dieſe Ebene durch den Anfang der Coordinaten, i. durch den Mittelpunkt der Kugel geht, und folglich die

…e der Bogen eines durch die beiden gegebenen
…enden größten Kreiſes iſt.

…iſchen zwey Punkten auf der Oberfläche eines
…linders die kürzeſte Linie zu finden. Die Axe
…rs nehme man als Axe der y an; ſo iſt, wenn
…us des Cylinders bezeichnet:

$$u = x^2 + z^2 - r^2 = o$$

…ng der Cylinderfläche. Alſo

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = 2z,\ z\delta z = o,\ \delta z = o.$$

…em Falle wieder

$$v = \sqrt{1 + p^2 + p'^2},$$

…n y enthält. Folglich (38.)

$$\frac{\partial P}{\partial x}\delta y + \frac{\partial P'}{\partial x}\delta z = o,\ \frac{\partial P}{\partial x}\delta y = o,$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = o,\ P = C.$$

$$p = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + p'^2}} = \frac{p}{\sqrt{\quad - r^2}},$$

ſte, und folglich eine gerade, die Curve auf der Cylinderäche ſelbſt alſo eine Schraubenlinie ſeyn muß.

Daß in den beiden vorher betrachteten Fällen wirklich n Minimum ſtatt findet, zeigt man wie in (50.). Ausführche Unterſuchungen über die kürzeſte Linie auf dem Sphäod ſ. im Art. Trigonometrie (152. ff.).

58. Es iſt nun noch die Betrachtung eines ſehr wichgen und merkwürdigen Falls der abſoluten Maxima und Minima zurück, deſſen Natur und Behandlungsweiſe aus olgenden Beiſpielen erhellen wird.

In einer Ebene ſeyen zwey Curven durch die Gleiungen

$$y' = fx,\ y'' = f''x$$

egeben; man ſoll unter allen ſich an dieſen beiden Curven ndigenden Linien in der Ebene die kürzeſte finden.

Dieſer Fall unterſcheidet ſich von den bisher behandeln Aufgaben vorzüglich darin, daß bey jenen die Gränzen , b, zwiſchen denen das Integral zu nehmen war, als eſtimmt und gegeben angenommen wurden, in vorliegenem Falle dagegen ſelbſt als fraglich anzuſehen ſind, weil it der Variation der geſuchten Curve natürlich auch eine Veränderung der Gränzen a, b, d. h. der Abſciſſen der ndpunkte der geſuchten Curve, verbunden iſt, und man lſo in dieſem Falle, wie dies früher verſtattet war, offenar nicht von der Variation von x abſtrahiren darf. Setzen wir nun

$$V = \int \partial x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = \int \partial x \sqrt{1 + p^2};$$

iſt, für $v = \sqrt{1 + p^2}$, mit Rückſicht auf die Variation n x

$$\delta V = v\delta x + P\partial y - \int \frac{\partial P}{\partial x} \delta y \partial x,$$

obey zu bemerker, daß, wie aus (23.) ſogleich erhellet, y nur die primitive Variation von y (17.) iſt, auf welche ſo ∂x keinen Einfluß ausgeübt hat, und die alſo als ganz illkührlich, von ∂x ganz unabhängig, betrachtet werden uß. Bezeichnen wir nun die, übrigens noch fraglichen,

rch a, b; ſo ergiebt ſich als gemeinſchaftliche des Maximum und Minimum:

$$o = v_b \delta x_b + P_b \delta y_b - v_a \delta x_a - P_a \delta y_a - \int_a^b \frac{\partial P}{\partial x} \delta y \, \partial x ,$$

x und δy, woraus, wie früher, leicht geſchloſſen für ſich

$$= v_b \delta x_b + P_b \delta y_b - v_a \delta x_a - P_a \delta y_a ,$$

h $\frac{\partial P}{\partial x} = o$, alſo, ganz wie in (47.), die ge- eine gerade Linie iſt, deren Gleichung

$$y = Bx + C .$$

h kommt es nun auf die Beſtimmung der Lage den, d. h. der willkührlichen Conſtanten B, C, ränzen a, b an, wozu man auf folgende Art nn wir der Kürze wegen $y = fx$ ſetzen. Aus ungen der Aufgabe erhellet augenblicklich, daß nzen

$$fa = f'a, \quad fb = f'b$$

und zugleich iſt klar, daß an den Gränzen auch

$$\delta_1 y = \frac{\partial y}{\partial x}\delta x,\ \delta_1 y' = \frac{\partial y'}{\partial x}\delta x,\ \delta_1 y'' = \frac{\partial y''}{\partial x}\delta x;$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$\delta y_a = \left\{\left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)_a - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_a\right\}\delta x_a,\ \delta y_b = \left\{\left(\frac{\partial y''}{\partial x}\right)_b - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_b\right\}\delta x_b;$$

und folglich, wenn dies in die obige Gränzgleichung für δy_a, δy_b gesetzt wird:

$$0 = \left\{v + P_b\left[\left(\frac{\partial y''}{\partial x}\right)_b - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_b\right]\right\}\delta x_b$$
$$- \left\{v_a + P_a\left[\left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)_a - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_a\right]\right\}\delta x_a$$

unabhängig von jedem besondern Werthe von δx, woraus sich auf ähnliche Art, wie früher, leicht ergiebt, daß

$$v_a + P_a\left\{\left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)_a - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_a\right\} = 0,$$
$$v_b + P_b\left\{\left(\frac{\partial y''}{\partial x}\right)_b - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_b\right\} = 0.$$

Im vorliegenden speciellen Falle ist aber:

$$v = \sqrt{1+p^2},\ P = \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right) = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}};$$
$$v - P\frac{\partial y}{\partial x} = v - Pp = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Also

$$\frac{1}{\sqrt{1+p_a^2}} + \frac{p_a}{\sqrt{1+p_a^2}}\left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)_a = 0;$$
$$\frac{1}{\sqrt{1+p_b^2}} + \frac{p_b}{\sqrt{1+p_b^2}}\left(\frac{\partial y''}{\partial x}\right)_b = 0,$$

woraus sogleich geschlossen wird, daß

$$1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_a \cdot \left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)_a = 0,\ 1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_b \cdot \left(\frac{\partial y''}{\partial x}\right)_b = 0.$$

Bezeichnen wir nun an den Durchschnittspunkten der gesuchten Curve mit den Gränzcurven die Winkel der Berührenden an jener und an diesen mit der Abscissenaxe durch α, α' und durch γ und γ'; so ist (Berührende Linie. 14.)

$$\text{tang}\,\alpha = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_a, \quad \text{tang}\,\alpha' = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_b;$$

$$\text{tang}\,\gamma = \left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)_a, \quad \text{tang}\,\gamma' = \left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)_b;$$

$$\text{tang}\,\alpha\,\text{tang}\,\gamma = 0, \; 1 + \text{tang}\,\alpha'\,\text{tang}\,\gamma' = 0.$$

l der Berührenden der gesuchten Curve mit den
en Berührenden der Gränzcurven sind aber
$\alpha - \gamma$ und $= \alpha' - \gamma'$, und (Goniometrie. 33.)

$$= \frac{\text{tang}\,\alpha - \text{tang}\,\gamma}{1 + \text{tang}\,\alpha\,\text{tang}\,\gamma}, \; \text{tang}(\alpha' - \gamma') = \frac{\text{tang}\,\alpha' - \text{tang}\,\gamma'}{1 + \text{tang}\,\alpha'\,\text{tang}\,\gamma'};$$

$(\alpha - \gamma) = \infty$, $\text{tang}(\alpha' - \gamma') = \infty$,
90^0, $\alpha' - \gamma' = 90^0$, so daß also die gesuchte
e wir oben gesehen haben, eine gerade Linie,
n beiden gegebenen Curven senkrecht seyn muß,
kürzeste zwischen denselben seyn soll. Zugleich
m vier Gleichungen:

$$fa = f'a, \; fb = f'b;$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_a \cdot \left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)_a = 0, \; 1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_b \cdot \left(\frac{\partial y''}{\partial x}\right)_b = 0;$$

Bestimmung von a, b, B, C hinreichend

aus, da $\delta y, \delta z$ ganz unabhängig von einander, übri-
s auch nur primitive Variationen (23.) sind, wie schon
r geschlossen wird:

$$o = v_b \delta x_b + P_b \delta y_b + P'_b \delta z_b ,$$
$$- v_a \delta x_a - P_a \delta y_a - P'_a \delta z_a ;$$
$$\frac{\partial P}{\partial x} = o, \quad \frac{\partial P'}{\partial x} = o; \quad P = A, \quad P' = A' ;$$

aus sich wie in (47.) ergiebt, daß die gesuchte Linie eine
de ist, deren Gleichungen

$$y = Bx + C, \quad z = B'x + C' ;$$

he wir durch $y = fx$, $z = \varphi x$ bezeichnen wollen.
ıg wie vorher überzeugt man sich nun, daß

$$= \left\{\left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)_a - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_a\right\} \delta x_a, \quad \delta y_b = \left\{\left(\frac{\partial y''}{\partial x}\right)_b - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_b\right\} \delta x_b ;$$
$$= \left\{\left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right)_a - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_a\right\} \delta x_a, \quad \delta z_b = \left\{\left(\frac{\partial z''}{\partial x}\right)_b - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_b\right\} \delta x_b ;$$

hes, in die Gränzgleichung gesetzt, giebt:

$$\left\{v_b + P_b \left[\left(\frac{\partial y''}{\partial x}\right)_b - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_b\right] + P'_b \left[\left(\frac{\partial z''}{\partial x}\right)_b - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_b\right]\right\} \delta x_b$$
$$\left\{v_a + P_a \left[\left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)_a - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_a\right] + P'_a \left[\left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right)_a - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_a\right]\right\} \delta x_a ;$$

bhängig von jedem besondern Werthe von δx. Also

$$v_a + P_a \left\{\left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)_a - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_a\right\} + P'_a \left\{\left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right)_a - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_a\right\},$$
$$v_b + P_b \left\{\left(\frac{\partial y''}{\partial x}\right)_b - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_b\right\} + P'_b \left\{\left(\frac{\partial z''}{\partial x}\right)_b - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_b\right\}.$$

:r

$$v = \sqrt{1+p^2+p'^2}, \quad P = \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right) = \frac{p}{\sqrt{1+p^2+p'^2}},$$
$$P' = \left(\frac{\partial v}{\partial p'}\right) = \frac{p'}{\sqrt{1+p^2+p'^2}} ;$$
$$v - P\frac{\partial y}{\partial x} - P'\frac{\partial z}{\partial x} = v - Pp - P'p' = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+p'^2}} .$$

tzt man nun dies in die vorhergehenden Gleichungen, und
ltiplicirt auf beiden Seiten mit $\sqrt{1+p^2+p'^2}$, so er-
t man leicht:

$$+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_a\cdot\left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)_a+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_a\cdot\left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right)_a=0,$$

$$+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_b\cdot\left(\frac{\partial y''}{\partial x}\right)_b+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_b\cdot\left(\frac{\partial z''}{\partial x}\right)_b=0.$$

n Gleichungen, in Verbindung mit

$fa = f'a$, $fb = f''a$; $\varphi a = \varphi' a$, $\varphi b = \varphi' b$

Beſtimmung der ſechs Größen a, b, B, C,
Aus (Krumme Linie von gedoppelter Krüm-
und (Linie, gerade. 32.) ergiebt ſich mittelſt
obigen Gleichungen leicht, daß die Coſinus der
rührenden der geſuchten Linie und der Gränzcur-
gegenſeitigen Durchſchnittspunkten eingeſchloſ-
$\text{kel} = 0$, dieſe Winkel ſelbſt alſo $= 90^0$, und
urven folglich auf der geſuchten Linie ſenkrecht
letztere die kürzeſte zwiſchen jenen iſt.

äre ein Punkt, für welchen $x = a$, und eine
ren Gleichungen $y'' = f''x$, $z'' = \varphi''x$, ge-
hat man, $\delta x_a = \delta y_a = \delta z_a = 0$ ſetzend,
nz wie vorher zu verfahren. Man findet, daß
kürzeſte Linie eine gerade iſt, und erhält die

geben; man ſoll eine Curve finden, auf welcher ein ſchwe-
: Punkt durch den Fall in der kürzeſten Zeit von der
:en jener Curven bis zur andern gelangt, wobei es ver-
ttet ſeyn mag, dieſe Aufgabe auf Curven in einer
ene einzuſchränken, indem ſich die Auflöſung leicht auf
rven von doppelter Krümmung ausdehnen laſſen wird.
: iſt hier (51.)

$$V = \int \frac{\partial x \sqrt{1+p^2}}{2\sqrt{gx}}, \quad v = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{1+p^2}{gx}};$$

$$\delta V = v\delta x + P\delta y - \int \frac{\partial P}{\partial x}\delta y\,\partial x;$$

$$o = v_b\delta x_b + P_b\delta y_b - v_a\delta x_a - P_a\delta y_a - \int_a^b \frac{\partial P}{\partial x}\delta y\,\partial x;$$

$$o = v_b\delta x_b + P_b\delta y_b - v_a\delta x - P\,\delta y_a,$$

identiſch $\frac{\partial P}{\partial x} = o$, woraus ſich, wie a. a. O., die Cy-
ide ergiebt, indem man die Gleichung

$$y = r\,\text{Arc sin vers}\frac{x}{r} - \sqrt{2rx - x^2} + C,$$

r, der Kürze wegen, $y = fx$, erhält. Ganz wie in
:.) erhält man auch hier:

$$v_a + P_a\left\{\left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)_a - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_a\right\} = o,$$

$$v_b + P_b\left\{\left(\frac{\partial y''}{\partial x}\right)_b - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_b\right\} = o.$$

:r

$$v = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{1+p^2}{gx}}, \quad P = \frac{p}{2\sqrt{gx(1+p^2)}};$$

$$v - P\frac{\partial y}{\partial x} = v - Pp = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{gx(1+p^2)}},$$

folglich, wenn man dies in obige Gleichungen ſubſti-
t:

$$\frac{1}{2\sqrt{g_a(1+p_a^2)}} + \frac{p_a}{2\sqrt{g_a(1+p_a^2)}}\left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)_a = o,$$

$$\frac{1}{2\sqrt{g_b(1+p_b^2)}} + \frac{p_b}{2\sqrt{g_b(1+p_b^2)}}\left(\frac{\partial y''}{\partial x}\right)_b = o,$$

aus

$\cdot \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_a \cdot \left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)_\alpha = 0, \; 1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_b \cdot \left(\frac{\partial y''}{\partial x}\right)_b = 0$

die Cycloide wieder auf den beiden geg
recht ſeyn muß (58). Zur Beſtimmung ve
die beiden obigen Gleichungen, nebſt fa

in Punkt, deſſen Coordinaten a, a′,
ren Gleichung $y'' = f''x$ iſt, gegeben;

$$1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_b \cdot \left(\frac{\partial y''}{\partial x}\right)_b = 0,$$

chung zeigt, daß auch hier die Cycloide
Curve ſenkrecht iſt, und nebſt $a' = fa$, fb
nung von b, r, C dient.

wiſchen zwei gleichſeitigen Hyperbeln,

$$y' = \frac{a^2}{x}, \; y'' = -\frac{a'^2}{x}$$

Curve zu finden, welche, bei ihrer Umd
der x die kleinſte Oberfläche erzeugt.
ugten Fläche iſt (Complanation, Thl. I.

$$v' + P_a\left\{\left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)_a - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_a\right\} = o\,,$$
$$v_b + P_b\left\{\left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)_b - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_b\right\} = o\,.$$

$$v = y\sqrt{1+p^2},\ P = \frac{py}{\sqrt{1+p^2}}\ ;$$
$$v - P\frac{\partial y}{\partial x} = v - Pp = \frac{y}{\sqrt{1+p^2}}\ ;$$
$$\frac{y_a}{\sqrt{1+p_a^2}} + \frac{p_a y_a}{\sqrt{1+p_a^2}}\left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)_a = o\,,$$
$$\frac{y_b}{\sqrt{1+p_b^2}} + \frac{p_b y_b}{\sqrt{1+p_b^2}}\left(\frac{\partial y''}{\partial x}\right)_b = o\,;$$
$$1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_a\left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)_a = o,\ 1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_b\left(\frac{\partial y''}{\partial x}\right)_b = o\,;$$

ß also die gesuchte Curve auf den beiden gegebenen rbeln senkrecht seyn muß. Die Gränzen a, b und wey willkührlichen Constanten erhalten ihre Bestim- mittelst der Gleichungen $fa = f'a$, $fb = f''b$, und eiden vorhergehenden. Setzt man $\log n\, c'$ statt c'; t man aus der gefundenen Gleichung:

$$\frac{x}{c} = \log n\, c'(y + \sqrt{y^2 - c^2})\,,$$
$$-\frac{x}{c} = \log n \frac{1}{c'(y+\sqrt{y^2-c^2})} = \log n \frac{y-\sqrt{y^2-c^2}}{c^2 c'}$$
$$= c'(y+\sqrt{y^2-c^2}),\ c^2 c'^2 e^{-\frac{x}{c}} = c'(y-\sqrt{y^2-c^2})\,;$$
$$y = \frac{1}{2c'}\left\{e^{+\frac{x}{c}} + c^2 c'^2 e^{-\frac{x}{c}}\right\};$$
$$\frac{1}{2cc'}\left\{e^{+\frac{x}{c}} - c^2 c'^2 e^{-\frac{x}{c}}\right\},\ \frac{\partial y'}{\partial x} = -\frac{a^2}{x^2}\,,\ \frac{\partial y''}{\partial x} = \frac{a'^2}{x^2}\,.$$

man nun vorschriftmäßig $x = a$ und $x = b$; so man folgende vier Gleichungen:

$$2a^2 c' - a\left\{e^{+\frac{a}{c}} + c^2 c'^2 e^{-\frac{a}{c}}\right\} = o\,,$$
$$2a'^2 c' + b\left\{e^{+\frac{b}{c}} + c^2 c'^2 e^{-\frac{b}{c}}\right\} = o\,,$$
$$2a^2 cc' - a^2\left\{e^{+\frac{a}{c}} - c^2 c'^2 e^{-\frac{a}{c}}\right\} = o\,,$$
$$2b^2 cc' + a'^2\left\{e^{+\frac{b}{c}} - c^2 c'^2 e^{-\frac{b}{c}}\right\} = o\,;$$

ung von a, b, c, c'. Hat man dieſe Größen, ich auch leicht die Ordinaten der Gränzpunkte

$$y' = \frac{a^2}{a},\ y'' = -\frac{a'^2}{b}.$$

iele werden hinlänglich zeigen, wie man ſich in ällen zu verhalten hat.

elative Maxima und Minima.

e Aufgabe der relativen Maxima und Minima Allgemeinen ſo ausſprechen:

beſtimmten Integralausdruck $V = \int v\partial x$ zwi- egebenen Gränzen $x = a$, $x = b$ zu einem er Minimo zu machen, ſo daß zugleich eine will- nzahl ebenfalls gegebener Integralausdrücke

$V'' = \int v''\partial x$, $V''' = \int v'''\partial x$, $V'''' = \int v''''\partial x$, ...,

nſelben Gränzen genommen, die conſtanten ge- erthe l', l'', l''', l'''', ... erhalten. (Vergl. 32.)

Man denke ſich die Relation zwiſchen x und den relativ-unabhängigen Größen, für welche

$$\int v\partial x + c'\int v'\partial x + c''\int v''\partial x + c'''\int v'''\partial x + \ldots,$$

zwiſchen den gegebenen Gränzen, unabhängig von beſondern Werthen der Conſtanten c', c'', c''', ..., deren Anzahl $= n$ ſey, ein Maximum oder Minimum wird, wirklich gefunden, und bezeichne die dieſer Relation entſprechende Form des obigen Ausdrucks durch

$$(V) + c'(V') + c''(V'') + c'''(V''') + \ldots.$$

Nun ſtelle man ſich vor, daß dieſe Relation irgend eine Aenderung erleide, und dadurch (V) in $(V)_1$ übergehe, die zwiſchen den gegebenen Gränzen genommenen Werthe von

$$(V'), (V''), (V'''), (V''''), \ldots$$

aber, wie die Aufgabe verlangt, ungeändert bleiben, welches man erreichen wird, wenn man, wie, unbeſchadet der völligen Willkührlichkeit der Aenderung der Relation zwiſchen x und den relativ-unabhängigen Größen an ſich, offenbar verſtattet iſt, bey dieſer Aenderung ſich n neue Conſtanten γ', γ'', γ''', γ'''', ... eingeführt, und dieſelben ſo beſtimmt denkt, daß die zwiſchen den gegebenen Gränzen genommenen Werthe von

$$(V'), (V''), (V'''), (V''''), \ldots$$

ſelbſt keine Aenderung erleiden. Auf dieſe Art geht alſo

$$(V) + c'(V') + c''(V'') + c'''(V''') + \ldots$$

über in

$$(V)_1 + c'(V') + c''(V'') + c'''(V''') + \ldots,$$

und es iſt, weil nach der Vorausſetzung

$$(V) + c'(V') + c''(V'') + c'''(V''') + \ldots$$

ein Maximum oder ein Minimum bezeichnet, jenachdem das erſte oder das zweite ſtatt findet,

$$(V) + c'(V') + c''(V'') + c'''(V''') + \ldots.$$
$$\gtrless (V)_1 + c'(V') + c''(V'') + c'''(V''') + \ldots,$$

alſo auch immer $(V) \gtrless (V)_1$, ſo daß folglich (V) ſelbſt ein Maximum oder Minimum bezeichnet, unter der Vorausſetzung, daß

(V'), (V''), (V'''), (V''''), ...

bleiben, zwiſchen den gegebenen Gränzen, und
von allen beſondern Werthen der Conſtanten
, c'''', ... Beſtimmt man nun dieſe Con-
ſt den durch die Integration einzuführenden,
Gränzgleichungen und

$'\partial x = 1$, $\int v''\partial x = 1''$, $\int v'''\partial x = 1'''$, ... ;

hr

$V') = 1'$, $(V'') = 1''$, $(V''') = 1'''$, ... ;

nbar der zweiten Bedingung der Aufgabe, daß

$\int v'\partial x$, $\int v''\partial x$, $\int v'''\partial x$, ...

n gegebenen Gränzen den beſtimmten Wer-
$'$, $1'''$, ... entſprechen ſollen, unmittelbar

rifft die Frage eine geometriſche Aufgabe, und
es in der That gewöhnlich der Fall iſt, die ge-
e durch zwei gegebene Punkte gehen; ſo treten
h gegebenen Bedingungen anſtatt der Gränz-
ein, und man hat ſich hierbei überhaupt ganz
) und (45.) zu verhalten.

$$y - C = z,\ \partial y = \partial z,\ \partial x = \frac{z\partial z}{\sqrt{c^2 - z^2}};$$

$$c^2 - z^2 = u^2,\ -2z\partial z = 2u\partial u,\ z\partial z = -u\partial u;$$

$$\partial x = -\partial u,\ x = -u + C',\ x - C' = -u;$$

$$(x - C')^2 + (y - C)^2 = c^2.$$

Also ist die gesuchte Curve ein Kreis, dessen Halbmesser c ist. Sind a, a'; b, b' die Coordinaten der beiden gegebenen Punkte; so hat man zur Bestimmung der drei Constanten C, C', c die Gleichungen:

$$(a - C')^2 + (a' - C)^2 = c^2,\ (b - C')^2 + (b' - C)^2 = c^2,$$

$$\int_a^b \partial x \sqrt{1 + p^2} = l'.$$

Letztere Gleichung ist eine transcendente. Es ist

$$\partial x \sqrt{1 + p^2} = \int \frac{\partial y}{\sqrt{1 - \left(\frac{y - C}{c}\right)^2}} = c \int \frac{\partial \omega}{\sqrt{1 - \omega^2}},$$

für $\frac{y - C}{c} = \omega$. Also (Integralformel. 49.)

$$\int \partial x \sqrt{1 + p^2} = c \operatorname{Arc\,sin} \frac{y - C}{c} + \text{Const.},$$

$$l' = c \left\{ \operatorname{Arc\,sin} \frac{b' - C}{c} - \operatorname{Arc\,sin} \frac{a' - C}{c} \right\}.$$

Aus diesen Gleichungen erhellet, daß C, C', c doppelte Werthe haben, und daß namentlich c, der Radius des Kreises, bey einerley absoluten Größe, sowohl positiv als negativ genommen werden kann, d. h. daß der Kreis sowohl concav als convex gegen die Abscissenaxe seyn kann.

Entwickelt man $\left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\right)$; so erhält man

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\right) = \frac{c}{(1 + p^2)\sqrt{1 + p^2}},$$

wenn wir $v = y + c\sqrt{1 + p^2}$ setzen. Hieraus erhellet, daß im vorliegenden Falle sowohl ein Maximum, als auch ein Minimum statt finden kann, jenachdem c negativ oder positiv ist. Aus einer ganz einfachen geometrischen Betrachtung geht aber sogleich hervor, daß das Maximum statt finden muß, wenn der Kreis gegen die Abscissenaxe concav, das Minimum, wenn er gegen dieselbe convex ist, und daß folglich im ersten Falle c als negativ, im an-

ſitiv anzuſehen iſt, vorausgeſetzt, daß $\sqrt{1+p^2}$
tiv genommen wird.

bige transcendente Gleichung läßt ſich nach einer
gonometriſchen Transformation auch ſo aus-

$$) = \frac{(a-C')(b'-C) - (a'-C)(b-C')}{c^2}$$
$$= \frac{ab' - a'b - (a-b)C + (a'-b')C'}{c^2}.$$

nter allen iſoperimetriſchen Curven zwiſchen
nen Punkten diejenige zu finden, welche bey der
um die Axe der x die kleinſte oder größte Ober-
gt. Hier iſt

$$\int 2\pi y \partial x \sqrt{1+p^2},\ V' = \int \partial x \sqrt{1+p^2} = l'.$$

lſo

$$v = (y+c)\sqrt{1+p^2} = y'\sqrt{1+p'^2},$$

$= y'$, $p = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y'}{\partial x} = p'$. Hieraus
ganz wie in (53.) die **Catenaria**, und es

welches die Differentialgleichung einer Elastica ist, deren nähere Betrachtung in die Mechanik gehört. M. s. z. B. mein Lehrb. d. Statik fester Körper. Halle. 1826. S. 552. Euler a. a. O. Additamentum I.

C. Noch einige besondere Anwendungen der Variationsrechnung auf die Lehre vom Größten und Kleinsten.

68. Die in (33.) angewendeten Principien führen auch auf ganz ähnliche Art zur Bestimmung von Curven, welche in allen ihren Punkten einer gewissen Bedingung des Maximum oder Minimum genügen, wie Lagrange (Théorie des fonctions. 1813. p. 268.) an folgendem interessanten Beispiele gezeigt hat.

69. Man denke sich zwei den Abscissen a, b, welche wir, wie offenbar verstattet, als positiv, und $b > a$ annehmen können, entsprechende Ordinaten; so wird von denselben jede durch irgend einen Punkt einer Curve gezogene Berührende von der Axe der x aus zwei gewisse Stücke abschneiden, deren Product wir $= V$ setzen wollen. Es soll nun die Curve gefunden werden, bei welcher dieses Product in jedem Punkte größer oder kleiner ist als das entsprechende Product an jeder andern durch denselben Punkt gehenden Curve.

Die Coordinaten irgend eines Punktes der gesuchten Curve seyen x, y; so ist die Gleichung der Berührenden durch denselben:

$$z - y = \frac{\partial y}{\partial x}(u - x),$$

und folglich die den Abscissen $u = a$, $u = b$ entsprechenden Ordinaten, d. h. die oben erwähnten Abschnitte:

$$y + (a - x)\frac{\partial y}{\partial x},\quad y + (b - x)\frac{\partial y}{\partial x};$$

folglich, für $p = \frac{\partial y}{\partial x}$:

$$V = [y + (a - x)p][y + (b - x)p].$$

Diese Größe soll für jeden Punkt, dessen Coordinaten x, y sind, ein Maximum oder Minimum, d. h. größer oder

den, als die entſprechende Größe bei jeder durch
Punkt gehenden Curve. Man denke ſich nun die
urve gefunden, und auf irgend eine Art variirt,
Zuſammenhang zwiſchen x und y geändert; ſo
lich auch $p = \frac{\partial y}{\partial x}$ variiren, die Variationen
y ſind aber $= o$ zu ſetzen, da alle Curven
Punkt, deſſen Coordinaten x, y ſind, gehen
ies giebt:

$$x)\,|\,y+(a-x)p\,|\,\delta p+(a-x)\,|\,y+(b-x)p\,|\,\delta p,$$

uf dieſelbe Art, wie in (33.), überzeugt man ſich,
emeinſchaftliche Bedingung des Maximum und
$\delta V = o$, für das Maximum $\delta^2 V < o$, für
um $\delta^2 V > o$ ſeyn muß. Alſo hat man

$$|\,y+(a-x)p\,|+(a-x)\,|\,y+(b-x)p\,|=o,$$

h leichter Reduction

$$(a+b-2x)y+2(a-x)(b-x)p=o,$$

$$=\frac{2x-a-b}{2(a-x)(b-x)}=\frac{2x-a-b}{2(x-a)(x-b)},$$

$$(2x-a-b)\partial x \qquad \partial x \qquad \partial x$$

nd man hat jetzt zwei Fälle zu unterscheiden. Ist die will-
ihrliche Constante C negativ, also — C positiv; so wird
e Gleichung der Curve

$$y'^2 = (-C(b-a))x' - \frac{(-C(b-a))x'^2}{b-a},$$

ie Curve also eine Ellipse, deren Hauptaxe $= b-a$, Para-
eter $= -C(b-a)$, kleine Axe also $= (b-a)\sqrt{-C}$
t. Ihre Scheitel sind die beiden gegebenen Punkte deren
bscissen a, b, und ersterer ist der Anfang der Coordina-
n. Folglich sind in diesem Falle x', $(b-a)-x'$ positiv,
so $\delta^2 V$ immer negativ, und es findet demnach ein Maxi-
um statt.

Nimmt man dagegen die willkührliche Constante C po-
tiv, also — C negativ: so ist die Gleichung der Curve

$$y'^2 = \frac{C(b-a)x'^2}{b-a} - C(b-a)x',$$

ie Curve also ein Hyperbel, deren Hauptaxe $= b-a$,
arameter $= C(b-a)$, kleine Axe also $= (b-a)\sqrt{C}$
t. Die Scheitel sind wieder die Punkte, deren Ab-
issen a, b sind, und ersterer der Anfangspunkt. Bei
r Hyperbel haben x', $(b-a)-x'$ offenbar immer
ntgegengesetzte Zeichen, $\delta^2 V$ ist positiv, und es findet also
n Minimum statt.

Hierin ist zugleich eine merkwürdige Eigenschaft der Li-
ien der zweiten Ordnung enthalten. Errichtet man näm-
ch auf die Axe eine Ellipse oder Hyperbel durch ihre End-
unkte Perpendikel, und zieht durch irgend einen Punkt
ne Berührende; so ist das Product der von derselben
uf jenen Perpendikeln abgeschnittenen Stücke bey der El-
pse größer, bey der Hyperbel kleiner, als das entsprechende
roduct bey jeder andern durch denselben Punkt gehenden
urve.

Auch hat man nach dem Obigen:

$$p = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{(2x-a-b)y}{2(x-a)(x-b)},$$

$$y + (a-x)p = -\frac{(b-a)y}{2(x-b)},$$

$$y + (b-x)p = \frac{(b-a)y}{2(x-a)},$$

t

$$V = -\tfrac{1}{4}C(b-a)^2 ,$$

das in Rede ſtehende Product eine conſtante und zwar immer = dem Quadrate der halben , bei der Hyperbel nur negativ genommen, ganz er Sache gemäß, wie leicht erhellet.

ollte die Curve gefunden werden, bei welcher unkt das Quadrat der um die Abſciſſe vermehrmale ein Maximum oder Minimum iſt; ſo leicht erhalten:

$$V = (y\frac{\partial y}{\partial x} + x)^2 = (py + x)^2 ;$$

$$\delta V = 2(py + x)y\delta p = o, \; py + x = o ;$$

$$y\partial y = -x\partial x, \; \tfrac{1}{2}y^2 = -\tfrac{1}{2}x^2 + C ,$$

$y^2 = r^2$ für $2C = r^2$. Die geſuchte Curve is, deſſen Mittelpunkt der Anfang der Coor- Ferner iſt

$$\delta^2 V = 2(py + x)y\delta^2 p + 2y^2(\delta p)^2 ,$$

der allgemeinen Bedingung des Maximum und $\delta^2 V = 2y^2(\delta p)^2$, ſo daß alſo, weil dieſe

keine Auflösung erschienen sey. Leibnitz habe ihm geschrieben: se jam feliciter dissoluisse nodum pulcherrimi huius, uti vocabat, et inauditi antea problematis, und gebeten, die Frist bis auf nächste Ostern zu verlängern, damit auch Franzosen und Italiener ihre Kräfte versuchen könnten. Seine eigene Auflösung gab Joh. Bernoulli in den Act. Erud. 1697. Mai. p. 206. In den Philosophical Transact. 1697. No. 224. p. 384. erschien eine Construction, aber ohne Analysis und Beweis, deren Verfasser sich nicht nannte. Aber Joh. Bernoulli (Opp. T. I. p. 196.) rieth, wie er sagt, ut ex ungue leonem, daß es Newton sey. Tschirnhausen glaubte, daß es mehrere Curven geben könnte, die der Aufgabe genügten (Act. Erud. 1697. Mai. p 221.). Der Marquis de l'Hospital gab seine Auflösung (Ibid. p. 217.) ebenfalls ohne Analysis, schrieb aber an Bernoulli, daß sie auf denselben Principien beruhe, welche er ihm früher zur allgemeinen Untersuchung der Kettenlinie mitgetheilt habe. Noch eine Auflösung zu den vieren, welche die drei großen Nationen, Deutschland, England und Frankreich (Joh. Bern. Opp. T. I. p. 200.) geliefert hatten, fügte Jacob Bernoulli hinzu (Act. Erud. l. c. Jac. Bern. Opp. T. II. n. 75.). Alle fanden dasselbe Resultat (51.), und stimmten auch in den Principien meist überein, obgleich jede Auflösung natürlich auch ihre Eigenthümlichkeiten hatte. Um einen Begriff von jenen ältern Methoden zu geben, wird es gut seyn, das Hauptsächlichste aus Jac. Bernoullis Auflösung hier beyzubringen, welche zu diesem Zwecke am geeignetsten scheint.

AB (Fig. 98.) sey die Curve, auf welcher ein schwerer Punkt durch den Fall in der kürzesten Zeit von A bis B gelangt. Daher muß auch jeder Theil ab von AB mit der Geschwindigkeit, mit welcher der Punkt in a ankommt, in der kürzesten Zeit durchlaufen werden, weil, wenn mit dieser Geschwindigkeit acb in einer kürzern Zeit durchlaufen würde, auch AacbB in einer kürzern Zeit wie AabB durchlaufen werden müßte, indem die in b erlangte Geschwindigkeit nach mechanischen Pricipien bloß von der Höhe abhängt,

h in beiden Fällen dieſelbe iſt. Nun ſtelle man
rve als ein Polygon mit unendlich vielen Seiten
ehe die Bewegung in jeder Seite als gleichförmig
d N (Fig. 99.) ſeyen irgend zwei Spitzen dieſes
zwiſchen denen noch eine andere K liegt, und
e horizontale Linie. Man ſoll nun die Lage des
K in RS, d. h. die Lage der beiden auf einander
Elemente MK, KN der geſuchten Curve, ſo
daß ein ſich in MK mit der Geſchwindigkeit a,
der Geſchwindigkeit b gleichförmig bewegender
der kürzeſten Zeit von M bis N gelangt. Die
tung zweier ſolchen Elemente, wie
N iſt bei allen Aufgaben von der Claſſe
luten Maxima und Minima weſentlich,
n wohl zu bemerken hat. Man ſetze nun MK =
= y; ſo iſt die Zeit der Bewegung von M bis
$+ \frac{y}{b}$, und es muß nun x, y ſo beſtimmt wer-
dieſe Größe ein Minimum wird, wodurch die
uf die gewöhnliche Lehre von den Maximis und
urückgeführt iſt. Sey ML = α, HN = β,

nit AC, die wir als Axe der Abscissen annehmen wol- eingeschlossenen Winkel durch α, α', α'', α''', ... net, nach dem Obigen:

$$\cos\alpha : \cos\alpha' = o : 2\sqrt{ab.g} = o : \sqrt{ab},$$
$$\cos\alpha' : \cos\alpha'' = 2\sqrt{ab.g} : 2\sqrt{a'b'.g} = \sqrt{ab} : \sqrt{a'b'},$$
$$\cos\alpha'' : \cos\alpha''' = 2\sqrt{a'b'.g} : 2\sqrt{a''b''.g} = \sqrt{a'b'} : \sqrt{a''b''},$$

&c. &c.

is unmittelbar folgt, daß bey der gesuchten Curve sinus der von irgend zwei Berührenden mit der Abscis- eingeschlossenen Winkel sich wie die Quadratwurzeln n Ordinaten der Berührungspunkte verhalten müssen, daß, wenn Θ irgend einen solchen Winkel bezeichnet, eine constante Größe seyn muß. Setzt man nun $= \sqrt{a}$; so erhält man leicht:

$$\text{tang}\,\Theta = \sqrt{\frac{1-ay}{ay}}.$$

ber $\text{tang}\,\Theta = \frac{\partial y}{\partial x}$. Also

$$\partial x = \frac{\partial y \sqrt{ay}}{\sqrt{1-ay}},$$

ifferentialgleichung der gesuchten Curve, welche, in- t, zur Gleichung der Cycloide führt, wie leicht aus Art. erhellen wird.

Man wird sich aus der hier mitgetheilten Auflösung ei- begriff von der bey Aufgaben dieser Art überhaupt an- dten Methode zu machen im Stande seyn.

Schon seit längerer Zeit, besonders seit dem Jahre , wo Johann Professor der Mathematik zu Grö- en geworden war, trennte die Eifersucht des Ruh- ie Brüder Bernoulli. Johann hatte sich schon e Ausfälle gegen den ältern Bruder, der ihn in die ematik eingeweiht hatte, erlaubt, und mehrere von orgelegte Aufgaben schienen eigens gegen denselben tet. Nur einmal (Act. Erud. 1695. p. 537.) hatte b Bernoulli schon früher geantwortet, indem er Bruder erinnerte, weniger Wichtigkeit auf Entdek- n zu legen, welche das Instrument, womit sie beide

wären, leicht mache, und zu erkennen, daß,
e Größen in der Geometrie ſtufenweiſe wachſen,
ndere, der mit demſelben Inſtrument verſehen
fenweiſe zu denſelben Reſultaten gelangt ſeyn
Boſſut G. d. M. II. S. 161.). In der Ab-
ber die Brachyſtochrone aber legt er, ſich eigens
Bruder wendend, demſelben folgende Aufgabe
hier, etwas allgemeiner als von Bernoulli
Boſſuts Worten (a. a. O. S. 170.) gebe:

llen iſoperimetriſchen Curven zwiſchen gegebenen
ne Curve von der Beſchaffenheit zu finden, daß,
eine zweite Curve conſtruirt, deren Ordinaten
unctionen der Ordinaten oder der Bogen jener
Flächeninhalt der zweiten Curve ein Größtes
es bildet. Dann fügt Bernoulli noch hinzu:
etrectare possit (frater), adjungimus alte-
blema), quod majorem cum suo affinita-
, ubi quaeritur, quaenam ex infinitis Cy-
idem initium habentibus, ac super ea-
horizontali constitutis, illa sit, per quam

wohl aufgelöst habe, wirft ihm aber vor, daß er zu der Auflösung dieser sehr leichten Aufgabe, für welche er selbst, Newton und Leibnitz, in derselben Stunde, wo sie sich die Aufgabe vorgelegt, auch die Auflösung gefunden hätten, zu viel Zeit gebraucht, und, wie Galilei, lange in der Meinung gestanden hätte, daß die gesuchte Curve ein Kreis seyn müsse. Dann fügt er in Bezug auf die vorgelegten Aufgaben hinzu: Quelques difficiles que ces problèmes paroissent, je n'ai pas manqué, de m'y attacher à l'instant même, que je les ai lu; mais voyez avec quel succès: au lieu de trois mois qu'on me donne pour sonder le gué, et au lieu de tout le reste de cette année pour trouver la résolution, je n'ai employé en tout que trois minutes de tems pour tenter, commencer, et achever d'approfondir tout le mystére; et bien au dela: Car je donnerai les résolutions mille fois plus generales que ne sont les problèmes. In diesem Tone fährt er noch weiter fort, sagt, daß er seine Auflösungen an Leibnitz geschickt, und denselben zum Richter aufgefordert habe; der versprochene Preis solle in Leibnitzens Hände gelegt werden, indem er denselben für die Armen bestimmt habe. Die Auflösungen selbst erfolgten in einem Briefe an Varignon in dem Journal des Savans. Decembre. 1697, und er forderte den versprochenen Preis. Jac. Bernoulli antwortete (das. Fevr. 1698.), daß die Auflösungen seines Bruders nicht ganz der Wahrheit gemäß seyen, und verpflichtete sich zu drei Dingen: à déviner au juste l'Analyse, qui a conduit son frére à la solution, qui se voit dans ce journal; quelle qu'elle soit, à y faire voir des paralogismes, si on la veut publier; à donner la véritable solution du problème dans toutes ses parties. Hiezu fügte er noch die Wette, daß, wenn Jemand für die Fortschritte der Wissenschaft sich genug interessirte, um einen Preis auf jeden dieser Punkte zu setzen, er sich verbindlich mache, eben so viel zu verlieren, wenn er den ersten nicht erfüllte, das doppelte, wenn der zweite ihm nicht gelänge, das dreifache, wenn er den dritten ver-

an wird aus dieſen Mittheilungen den in dieſen
ten herrſchenden Ton hinreichend zu beurtheilen
ſeyn. Sie finden ſich alle im erſten Theile der
Bern. geſammelt. Joh. Bernoulli behaup-
hrend die Güte ſeiner Auflöſungen und forderte
ten Preis. In einem Briefe an Varignon
un. 1698. (J. d. S. 1698. 4. Arnst.) ſuchte
den zwei erſten ſich auferlegten Bedingungen
, trug in demſelben eine in ſich fehlerhafte
or, wo die falſchen Sätze, indem ſie durch an-
aufgehoben werden, nichts deſto weniger in
llen zu einem wahren Reſultat führten, und
telſt dieſer Analyſis die Gleichungen ſeines Bru-
leich verlangte er (J. d. S. 1698. 23. Juin)
nitz noch L'Hospital, Newton und alle
eometer der Zeit zu Richtern, und machte den
nden Ton ſeines Bruders mit einer Feinheit und
lächerlich, den man, wie Boſſut ſagt, ſonſt
athematikern gewohnt iſt, beſonders da er ſich,
chweizer, der franzöſiſchen Sprache bediente.

von Theſen im März 1701 mit einer Dedication an L'Hospital, Leibnitz, Newton und Fatio de Duillier, wie auch in den Act. Erud. Maj. 1701 p. 213. unter dem Titel: Jacobi Bern. Analysis magni problematis isoperimetrici. Er erkannte zuerſt das richtige Princip für die Auflöſung der hierher gehörenden Aufgaben. Joh. Bernoulli hatte ſich nämlich bei der Auflöſung der iſoperimetriſchen Aufgaben vorzüglich darin geirrt, daß er bei derſelben, wie bei den Aufgaben aus der Claſſe der abſoluten Maxima und Minima, nur zwei Elemente der Curve betrachtete, welches oben an der Aufgabe von der Brachyochrone deutlich gemacht worden iſt. Bey den iſoperimetriſchen Aufgaben, wo neben der Bedingung des Größten und Kleinſten noch andere Bedingungen zu erfüllen ſind, müſſen aber, wie Jac. Bernoulli a. a. O. zuerſt zeigte, drey Elemente der Curve auf ähnliche Art betrachtet werden, wovon man ſich am beſten aus der angeführten Abandlung ſelbſt, oder noch leichter aus einer ſpätern Abandlung Joh. Bernoullis (Opp. T. II. p. 235.) einen Begriff verſchaffen wird. Von nun an beobachtete Joh. Bernoulli ein tiefes Stillſchweigen, und die der Pariſer Akademie überſandte Auflöſung erſchien nur erſt im Jahre 1706 (Opp. T. I. p. 424.), nachdem Jac. Bernoulli 1705 geſtorben war. Welche Motive den Erſtern vermochten, eine in ſich falſche Auflöſung doch noch bekannt zu machen, wage ich nicht zu entſcheiden. Der eigentliche Irrthum iſt oben angegeben. Dreizehn Jahre nach ſeines Bruders Tode erkannte Joh. Bernoulli dieſen Irrthum ſelbſt: „je m'y étois effectivement mépris en quelque chose“ ſagt er von ſeiner erſten Auflöſung, und gab in dem Mém. de Paris 1718. p. 100. (Opp. T. II. p. 235) eine neue Auflöſung, welche ebenfalls auf der Betrachtung dreier Elemente beruht, und im Grunde ganz mit der ſeines Bruders einerley iſt, nur unter einer einfachern Form dargeſtellt. Auf denſelben Principien beruht auch die von Taylor in der Methodus incrementorum directa et inversa. Lond. 1715. gegebene Auflöſung.

hat ſich viel mit dem iſoperimetriſchen Problem
Zuerſt erſchien Problematis isoperimetrici
o sensu accepti solutio generalis. Comm.
I. 1739. Curvarum maximi minimique
gaudentium inventio nova et facilis.
rop. VIII. 1741., ſeiner vielfältigen Arbeiten
achyſtochronen, auch in widerſtehenden Medien,
enken. Eine ungemeine Erweiterung aber ge-
Interſuchung durch ſein berühmtes Werk: Me-
veniendi lineas curvas maximi minimive
e gaudentes, sive solutio problematis iso-
i latissimo sensu accepti. Laus. et Ge-
4. In dieſem Werke wird zuerſt zwiſchen ab-
relativen Maximis und Minimis unterſchieden,
ng auf die in dieſem Artikel entwickelten allge-
meln, in Bezug auf die allgemeine Bedingung
um und Minimum, gebracht, und die Zurück-
relativen Maxima und Minima auf die abſolu-
, zugleich aber die Theorie durch eine ſo große
hſt lehrreicher Beiſpiele erläutert, daß dieſes
h Lagrange's Urtheil, als das vortrefflichſte

range einen Gegner (Mém. de Paris. 1767. p. 588.), wie auch an Borda (Mém. de Paris. 1767. p. 551.). agrange vertheidigt ſich in der Abhandlung: Observaons sur la méthode des variations. Misc. Soc. Taur. . IV. p. 163. Schon 1755 hatte Lagrange die Meode Eulern mitgetheilt, und dieſer ſie ſo vortrefflich funden, daß er ſie ſelbſt in mehrern Abhandlungen zu erutern ſuchte, und ihr auch, wie ſchon erwähnt, den Naen Calculus variationum gab. M. ſ. Elementa calli variationum. Nov. Comm. Petrop. T. X. p. 51. lethodus nova et facilis calculum variationum tracndi. T. XVI. p. 35., vorzüglich aber Institutiones lculi integralis. T. III. Appendix. Weiter entwickelt t Lagrange die Methode in der Théorie des fonctins. Seconde partie. Chap. XII. XIII., und vorzügch in den Leçons sur le calcul des fonctions. Leon XXI. XXII.

Zu leugnen iſt indeß nicht, daß rückſichtlich der Strenge nd Deutlichkeit der Darſtellung noch Manches zu wünhen übrig blieb, und in dieſer Rückſicht haben ſich einige euere deutſche Mathematiker ein unbeſtreitbares Verdienſt m dieſe Wiſſenſchaft erworben. Nicht genug erkannt heint zu ſeyn, was ſchon Crelle in ſeinem Verſuch einer ein algebraiſchen Darſtellung der Rechnung mit veränderchen Größen. I. Gött. 1813. S. 527 — 776 in Beug auf die Darſtellung der Principien der Variationsrechnung geleiſtet hat. Die vielen neuen Zeichen führen einige Schwierigkeit bei dem Studium dieſes Werkes herbei. Die Anwendung auf die Lehre von den Maximis und Miimis lag außer dem Zwecke deſſelben. Als die vollſtänigſten Lehrbücher verdienen alle Empfehlung, vorzüglich:

Analytische Darstellung der Variationsrechnung mit Anwendung derselben auf die Grössten und Kleinsten, von E. H. Dirksen. Berlin. 1823. ., und:

Die Lehre vom Größten und Kleinſten von M. Ohm. Berlin. 1825., wo jedoch auch die nicht immer ganz gewöhn-

hnung einige Schwierigkeit für Anfäng

den Abhandlungen in den allgemein bek
Werken von Lacroix (Traité du cal
II. p. 721. Traité élém. de calc. diff.
Boſſut, Couſin, und dem Cours
athém. pures par Francoeur. T.
p. 478. hebe ich noch aus:
urief Essai de démontrer rigou
theorême fondamentale des équatio
de la differentielle des fonctions
iables et du calcul des variations.
p. T. XIII. p. 154.
sii Opp. T. I. Medial. 1782. 4. p. 41
ilier Principiorum calculi diff. e
m. Tab. 1795. 4. Cap. XX. De prob
ae vocantur, isoperimetricis. Mi
r Methode der Gränzen. Nicht allgemei
bhandlung von Gergonne in den An
T. XIII. 1822. und Exposition des p

erſelben entweder ganz, oder behandeln ihn wenigſtens ehr unvollſtändig, undeutlich und oberflächlich.

Vector, Radius vector heißt in der höhern Geometrie jede von einem beſtimmten Punkte an eine Curve ezogene gerade Linie; in der Lehre von den Kegelſchnitten orzugsweiſe jede von einem Brennpunkte an den Kegelchnitt gezogene Gerade.

Veränderliche Größe (quantitas variabilis) ſt jede Größe, welche unter einer ſolchen Beziehung betrachtet wird, daß ihr jeder willkührliche beſtimmte Werth eigelegt werden kann, die man alſo willkührlich ab- und zunehmen laſſen kann. Veränderliche Größen werden in er Mathematik, zum Unterſchiede von den unveränderichen, beſtändigen oder conſtanten Größen, welche in erſelben Rechnung durchgängig ein und denſelben Werth ehalten, und durch die erſten Buchſtaben des Alphabets ezeichnet werden, immer durch die letzten Buchſtaben des Alphabets x, y, z, v, u. ſ. f., bezeichnet. Iſt AB er Durchmeſſer eines Kreiſes, und von irgend einem Punkte der Peripherie ein Perpendikel PQ auf denſelben gefällt, ſo iſt nach einem ſehr bekannten geometriſchen Satze $PQ^2 = AQ \times BQ$. Bezeichnen wir nun den Radius durch r, PQ durch y, und den Abſtand dieſes Perendikels vom Mittelpunkte durch x, ſo iſt immer die ine der Größen AQ, BQ, $= r - x$, die andere $= r + x$; alſo

$$y^2 = r^2 - x^2 .$$

Man nennt dies die Gleichung des Kreiſes. Sie tellt im Allgemeinen die Relation dar, welche zwiſchen edem der durch y bezeichneten Perpendikel, und deſſen bſtande x vom Mittelpunkte ſtatt findet. Hier ſind alſo ffenbar x und y die veränderlichen Größen, r dagegen ſt, ſo lange die Unterſuchung auf ein und denſelben Kreis ingeſchränkt wird, eine conſtante oder beſtändige Größe, a ſie, wie auch x und y ſich ändern mögen, immer denelben Werth behält, und obige Relation oder Gleichung mmer ſtatt findet.

Veränderung der unabhängigen

röße, welche von einer veränderlichen Größe
ine Art abhängt, ſo daß ſie zugleich mit ihr ſich
ßt eine Function dieſer veränderlichen Größe,
wenn x die veränderliche Größe bezeichnet, im
durch f(x), φ(x), oder ein ähnliches Zei-
eutet. Functionen ſind alſo offenbar auch ver-
rößen. Man unterſcheidet in dieſer Beziehung
hängige und abhängige veränderliche
em man unter jenen ſolche veränderliche Größen
eren Werth durch Nichts bedingt wird, und
hrlich angenommen werden kann. Abhängige
Größen dagegen ſind ſolche, deren Werth auf
Art durch den Werth einer unabhängigen ver-
Größe beſtimmt wird, von dem Werthe einer
derlichen Größe abhängt; alſo alle Functionen
r veränderlichen Größen, jede Function einer
ction, wie z. B. log sin x u. dergl. Die Be-
r veränderlichen Größen und ihrer Functionen,
er durch die willkührlichen Veränderungen jener
ten Veränderungen dieſer, iſt ausſchließlich der

der abhängigen veränderlichen Größe in Bezug auf die ursprüngliche unabhängige veränderliche Größe sollen immer durch Einschließung in Klammern ausgezeichnet werden.

1. Sey y die abhängige, x die ursprüngliche veränderliche Größe, und irgend ein Ausdruck

$$f\left(x, y, \left[\frac{\partial y}{\partial x}\right], \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right], \left[\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right], \dots\right) = F$$

gegeben. Soll nun x als Function einer neuen unabhängigen veränderlichen Größe t betrachtet, und der gegebene Ausdruck auf diese, als unabhängige veränderliche Größe, bezogen werden; so fragt sich, wie derselbe, um dieser Bedingung zu genügen, umgeformt werden müsse.

Es ändere sich t um i, so ist nach dem Taylor'schen Satze, wenn wir die dadurch herbeigeführte Aenderung von x durch k bezeichnen,

$$k = \frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{i}{1} + \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\cdot\frac{i^2}{1.2} + \frac{\partial^3 x}{\partial t^3}\cdot\frac{i^3}{1.2.3} + \dots.$$

Die Aenderung von y ist

$$\frac{\partial y}{\partial t}\cdot\frac{i}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\cdot\frac{i^2}{1.2} + \frac{\partial^3 y}{\partial t^3}\cdot\frac{i^3}{1.2.3} + \dots,$$

so wie auch

$$\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right]\cdot\frac{k}{1} + \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right]\cdot\frac{k^2}{1.2} + \left[\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right]\cdot\frac{k^3}{1.2.3} + \dots.$$

Setzt man hierin für k den vorher gefundenen Werth, ordnet nach den Potenzen von i, und vergleicht die beiden für die Aenderung von y erhaltenen Ausdrücke; so ergeben sich leicht folgende Gleichungen:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \left[\frac{\partial y}{\partial x}\right]\frac{\partial x}{\partial t},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \left[\frac{\partial y}{\partial x}\right]\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right]\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2,$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial t^3} + \left[\frac{\partial y}{\partial x}\right]\frac{\partial^3 x}{\partial t^3} + 3\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right]\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \left[\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right]\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^3,$$

u. s. f. u. s. f.

woraus ferner succesive:

Veränderung der unabhängigen

$$\frac{y}{t}$$

$$\frac{x}{t},$$

$$\frac{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2} - \frac{\frac{\partial y}{\partial t}}{\frac{\partial x}{\partial t}} \cdot \frac{\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2},$$

$$\frac{\frac{\partial^3 y}{\partial t^3}}{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^3} - 3\frac{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2} \cdot \frac{\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2} + 3\frac{\frac{\partial y}{\partial t}}{\frac{\partial x}{\partial t}} \cdot \frac{\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)}{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^4} - \frac{\frac{\partial y}{\partial t}}{\frac{\partial x}{\partial t}} \cdot \frac{\frac{\partial^3 x}{\partial t^3}}{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^3},$$

u. s. f. u. s. f.

man die von Lagrange eingeführte Bezeich-
ifferentialquotienten oder derivirten Functionen
ale Thl. I. S. 821. Taylors Lehrsatz. 4.), so
se Formeln, wenn alle nicht eingeklammerten
unctionen auf der rechten Seite der Gleichheits-
uf die unabhängige veränderliche Größe t bezie-
de einfachere Gestalt an:

$$] = \frac{y'}{x'},$$

$$\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right] = \frac{\partial y}{\partial x},$$

$$\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right] = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial x^2},$$

$$\left[\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right] = \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} - 3\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial x^2} + 3\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial x^4} - \frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial^3 x}{\partial x^3},$$

u. s. f. u. s. f.

Da also hiernach $\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right]$ gefunden wird, wenn man das Differential ∂y, in Bezug auf t als unabhängige veränderliche Größe, durch das Differential ∂x, in Bezug auf t als unabhängige veränderliche Größe, dividirt, und die Differentialquotienten

$$\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right], \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right], \left[\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right], \ldots$$

eben so von einander abhängen, wie $\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right]$ von y abhängt; so erhellet leicht die Richtigkeit und der Sinn folgender Formeln:

$$\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right] = \frac{1}{\partial x}\partial y,$$

$$\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right] = \frac{1}{\partial x}\,\partial\left(\frac{1}{\partial x}\partial y\right),$$

$$\left[\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right] = \frac{1}{\partial x}\,\partial\left(\frac{1}{\partial x}\,\partial\left(\frac{1}{\partial x}\partial y\right)\right),$$

$$\left[\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}\right] = \frac{1}{\partial x}\,\partial\left(\frac{1}{\partial x}\,\partial\left(\frac{1}{\partial x}\,\partial\left(\frac{1}{\partial x}\partial y\right)\right)\right),$$

u. s. f. u. s. f.

Es ist wohl zu bemerken, daß bei diesen Differentiationen kein Differential als constant zu betrachten ist. Entwickelt man die Differentiale wirklich, so erhält man wieder die obigen entwickelten Formeln. Für

$$\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right] = p, \quad \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right] = q$$

ist z. B. der Krümmungshalbmesser

$$r = -\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$$

(Krümmungskreis. 2.). Um diesen Ausdruck auf irgend eine andere unabhängige veränderliche Größe, von welcher

Veränderung der unabhängigen

willkührliche Art abhängt, zu beziehen, muß
em Obigen ſetzen

$$p = \frac{\partial y}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial x^2}.$$

iger Subſtitution erhält man

$$r = -\frac{(\partial x^2 + \partial y^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial x \partial^2 y - \partial y \partial^2 x},$$

Differential conſtant iſt, und alle ſich auf eine
hrliche unabhängige veränderliche Größe be-

ner kann der Fall vorkommen, und kommt in
hr häufig vor, daß in dem Ausdrucke F nicht
ndern y als die unabhängige veränderliche Größe,
nehr als von y abhängig betrachtet werden ſoll,
ſolche gegenſeitige Abhängigkeit der Größen x
bar ſtatt findet.

indem x ſich um i ändert, y die Aenderung k
wird offenbar auch umgekehrt x die Aenderung
wenn y ſich um k ändert. Da nun nach dem

$$\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right] = \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial y}}, \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right] = -\frac{\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^3}, \left[\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right] = -\frac{\frac{\partial^3 x}{\partial y^3}}{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^4} + 3\frac{\left(\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}\right)^2}{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^5},$$

u. ſ. f. u. ſ. f.

der mittelſt der Bezeichnung von Lagrange:

$$[y'] = \frac{1}{x'}, [y''] = -\frac{x''}{x'^3}, [y'''] = -\frac{x'''}{x'^4} + \frac{3x''^2}{x'^5}, \ldots,$$

hebt man nun wieder gleiche Potenzen von ∂y auf, und ezieht, indem man ∂y als conſtant betrachtet, alle Diffe- ntiale auf der rechten Seite der Gleichheitszeichen auf y ls unabhängige veränderliche Größe; ſo wird

$$\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right] = \frac{\partial y}{\partial x}, \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right] = -\frac{\partial^2 x \partial y}{\partial x^3},$$

$$\left[\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right] = -\frac{\partial^3 x \partial y}{\partial x^4} + 3\frac{(\partial^2 x)^2 . \partial y}{\partial x^5},$$

u. ſ. f. u. ſ. f.

luch überzeugt man ſich, wie vorher, leicht von der Rich- gkeit und dem Sinne folgender Formeln:

$$\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right] = \frac{1}{\partial x}\partial y,$$

$$\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right] = \frac{1}{\partial x}\partial\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right] = \frac{1}{\partial x}\partial\left(\frac{1}{\partial x}\partial y\right),$$

$$\left[\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right] = \frac{1}{\partial x}\partial\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right] = \frac{1}{\partial x}\partial\left(\frac{1}{\partial x}\partial\left(\frac{1}{\partial x}\partial y\right)\right),$$

$$\left[\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}\right] = \frac{1}{\partial x}\partial\left[\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right] = \frac{1}{\partial x}\partial\left(\frac{1}{\partial x}\left(\frac{1}{\partial x}\partial\left(\frac{1}{\partial x}\partial y\right)\right)\right),$$

u. ſ. f. u. ſ. f.

mmer iſt hier ∂y als conſtant zu betrachten. Durch ntwickelung dieſer Ausdrücke erhält man die ſchon oben fundenen Formeln.

3. Die hier gefundenen Formeln ſind für den Algorith- us der Differentialrechnung von großer Wichtigkeit. Sey z. B.

$$y = \sin x;$$

ſt bekanntlich, wenn y als Function von x betrachtet ird,

$$\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right] = \cos x.$$

Veränderung der unabhängigen

nan nun aber x als Function von y; ſo iſt nach enen

$$\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right] = \frac{1}{\partial x}\partial y .$$

$$\frac{1}{\partial x}\partial y = \cos x, \quad \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{1}{\cos x};$$

$$\text{d. i. } \frac{\partial \operatorname{Arc\,sin} y}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} .$$

ang x iſt bekanntlich

$$\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right] = \frac{1}{\cos x^2};$$

x als Function von y betrachtet wird,

$$\partial y = \frac{1}{\cos x^2}, \quad \frac{\partial x}{\partial y} = \cos x^2 = \frac{1}{1+\operatorname{tang} x^2};$$

$$\text{d. i. } \frac{\partial \operatorname{Arc\,tang} y}{\partial y} = \frac{1}{1+y^2} .$$

ür $y = \sin x$:

$$\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right] = -\sin x .$$

y die unabhängige veränderliche Größe iſt,

$$\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right] = \frac{\frac{\partial y}{\partial t}}{\frac{\partial x}{\partial t}},$$

$$\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right] = \frac{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2} - \frac{\frac{\partial y}{\partial t}}{\frac{\partial x}{\partial t}} \cdot \frac{\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2},$$

u. ſ. f. u. ſ. f.

aber t eine Function von x und y iſt, welche wir im emeinen durch

$$t = \varphi(x, y)$$

ichnen wollen, ſo kann man offenbar auch umgekehrt x y, wo y von x abhängig iſt, als Functionen von t achten, und eine Aenderung von t wird folglich immer Aenderungen von x und y herbeiführen. Alſo iſt dem Taylor'ſchen Lehrſatze:

$$t + i = \varphi(x + \frac{\partial x}{\partial t} \cdot \frac{i}{1} + \ldots, y + \frac{\partial y}{\partial t} \cdot \frac{i}{1} + \ldots),$$

für

$$\Delta = \frac{\partial x}{\partial t} \cdot \frac{i}{1} + \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \cdot \frac{i^2}{1.2} + \frac{\partial^3 x}{\partial t^3} \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$\Delta' = \frac{\partial y}{\partial t} \cdot \frac{i}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \cdot \frac{i^2}{1.2} + \frac{\partial^3 y}{\partial t^3} \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

dem Taylor'ſchen Lehrſatze für mehrere veränderliche ßen (Taylors Lehrſatz. 7.):

$$i = \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)\frac{\Delta}{1} + \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\right)\frac{\Delta^2}{1.2} + \ldots.$$

$$+ \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)\frac{\Delta'}{1} + \frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y}\frac{\Delta}{1}\cdot\frac{\Delta'}{1} + \ldots.$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right)\frac{\Delta'^2}{1.2} + \ldots.$$

alle Differentialquotienten von t partielle Differentialtienten in Bezug auf x und y ſind. Setzt man nun Δ und Δ' die vorher gefundenen Werthe, entwickelt Potenzen von i, und vergleicht die Coefficienten; ſo ilt man:

Veränderung der unabhängigen

$$\frac{\partial x}{\partial t} + \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial t},$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \left(\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2\,\frac{\partial^2 t}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial y}{\partial t},$$

u. ſ. f. u. ſ. f.

dieſer Gleichungen kann man ſowohl alle Dif-
ienten von x in Bezug auf t, als auch alle
uotienten von y in Bezug auf t eliminiren.
ch z. B.

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{1 - \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial t}}{\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)}.$$

ieſen Ausdruck in die zweite Gleichung, ſo er-
, u. ſ. f. Werden nun die gefundenen Aus-
e obigen Formeln für $\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right]$, $\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right]$, ... ge-
hält man Ausdrücke für dieſe Differentialquo-

Differentialgleichung gegeben seyn, wie wenn z. B., um nur diesen einfachen Fall zu betrachten,

$$\frac{\partial t}{\partial x} = \varphi\left(x, y, \left[\frac{\partial y}{\partial x}\right], \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right], \ldots\right)$$

wäre. Man setze für $\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right]$, $\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right]$, ... in die gegebene Function F die in (1.) entwickelten Ausdrücke:

$$\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right] = \frac{\frac{\partial y}{\partial t}}{\frac{\partial x}{\partial t}},$$

$$\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right] = \frac{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2} - \frac{\frac{\partial y}{\partial t}}{\frac{\partial x}{\partial t}} \cdot \frac{\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2},$$

u. s. f. u. s. f.

und thue ein Gleiches in Bezug auf die Function φ. Den dadurch hervorgehenden Ausdruck dieser Function bezeichne man durch Ω. Nach (2.) ist

$$\frac{\partial t}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} = 1, \text{ d. i. } \Omega \frac{\partial x}{\partial t} = \Omega' = 1;$$

also

$$\frac{\partial \Omega'}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Omega'}{\partial t^2} = \frac{\partial^3 \Omega'}{\partial t^3} = \ldots = 0.$$

Durch die Entwickelung dieser Differentialquotienten nach t erhält man Gleichungen, mittelst welcher man wieder die Differentialquotienten einer der Größen x, y in Bezug auf t eliminiren kann. Die erhaltenen Ausdrücke substituirt man in die schon oben verwandelte Function, welche auf diese Art in einen Ausdruck verwandelt werden wird, der, außer den beiden Größen x und y, nur noch die Differentialquotienten einer dieser beiden Größen in Bezug auf die neue unabhängige veränderliche Größe t enthält.

Der Raum gestattet hier nicht größere Ausführlichkeit; wir verweisen daher auf Lagrange Léçons sur le calcul des fonctions. Paris. 1806, p. 62. Lacroix Traité du calcul diff. et int. T. I. p. 203. sqq., dessen Traité élém. de calc. diff. et int. p. 154.. Francoeur cours complet de Math. pures. T. II. Paris. 1828. p. 280., und vorzüglich auf das angeführte Werk

(S. 373 — 415), wo dieſer Gegenſtand
er Ausführlichkeit und Genauigkeit behandelt,
ſolche Fälle, wo mehrere unabhängige verän-
ßen vorkommen, Rückſicht genommen wird.
ich nur vorher mit den neuen Zeichen des Ver-
rmaßen bekannt machen (Nr. 32.).

ppelung des Würfels, ſiehe Deliſche

lgungslinien (courbes de poursuite) hei-
, bei welchen der Bogen zu dem Unterſchiede
und Subtangente ein gegebenes conſtantes
hat.

er Exponent dieſes Verhältniſſes, und s der
t (Berührende Linie. 13.)

$$s = a\left(x - \frac{y\partial x}{\partial y}\right)$$

ngsgleichung der Aufgabe.

Differentiation erhält man:

$$y^{\frac{1}{a}} = k^{\frac{1}{a}} \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2} - \frac{\partial x}{\partial y} \right\}.$$

Macht man nun diese Gleichung rational; so erhält man leicht:

$$\partial x = \tfrac{1}{2} \partial y \left\{ \left(\frac{k}{y}\right)^{\frac{1}{a}} - \left(\frac{y}{k}\right)^{\frac{1}{a}} \right\},$$

und durch Integration:

$$x = \tfrac{1}{2} \left\{ \frac{k^{\frac{1}{a}} \cdot y^{1-\frac{1}{a}}}{1 - \frac{1}{a}} - \frac{k^{-\frac{1}{a}} \cdot y^{1+\frac{1}{a}}}{1 + \frac{1}{a}} \right\}$$

$$= \frac{a}{2} \left\{ \frac{\sqrt[a]{k y^{a-1}}}{a-1} - \frac{\sqrt[a]{k^{-1} y^{a+1}}}{a+1} \right\} + C.$$

Für $a > 1$, vorausgesetzt daß $y = o$ für $x = o$, ist $C = o$. Für $a = 1$, wo das erste Glied der Gleichung $= \infty$ wird, ist die Differentialgleichung:

$$\partial x = \tfrac{1}{2} \partial y \left\{ \frac{k}{y} - \frac{y}{k} \right\},$$

$$x = \tfrac{1}{2} k \log n y - \tfrac{1}{4} \cdot \frac{y^2}{k} + C.$$

Da man wegen $\log n y = \log n o$ für $y = o$ die Constante nicht so bestimmen kann, daß x, y zugleich verschwinden; so bestimme man C so, daß $y = k$ wird für $x = o$. Dies giebt:

$$x = \tfrac{1}{2} k \log n \frac{y}{k} - \tfrac{1}{4} \cdot \frac{y^2 - k^2}{k}.$$

Bestimmt man, wenn $a < 1$ ist, die Constante auf dieselbe Art; so erhält man:

$$x = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{k^{\frac{1}{a}} y^{1-\frac{1}{a}}}{1 - \frac{1}{a}} - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{k^{-\frac{1}{a}} y^{1+\frac{1}{a}}}{1 + \frac{1}{a}} - \frac{k}{a - \frac{1}{a}}.$$

Erhält a verschiedene Werthe; so erhalten die Curven sehr verschiedene Gestalten. Sie sind von Maupertuis und Bouguer (Mém. de Paris. 1732. p. 1.) zuerst betrachtet. Auch s. m. v. Prittwitz Untersuchungen über Curven, die durch ihre Subtangente rectificirt werden. Lpzg. 1815. Brandes höhere Geom. II. S. 99. Der Ur-

amens wird ſich am einfachſten für den Fall, wo
gen laſſen. Seyen nämlich A, B (Fig. 101.)
welche ſich gleichförmig mit gleicher Geſchwin-
vegen, daß A immer in der Abſciſſenlinie fort-
einen Weg immer nach A hinrichtet, wie z. B. ein
von ſeinem Herrn angerufen wird, indem ſich
ch einer geraden Linie fortbewegt. Sind nun
eitig in A′, B′; ſo iſt A′B′ die Berührende für
Subtangente, und offenbar Bogen BB′ =
′ + A′C′ = AC′ — (— A′C′) = Abſciſſe
ente, da hier die Subtangente als negativ zu
. In dieſem Falle iſt alſo der Bogen dem Un-
iſchen der Abſciſſe und Subtangente gleich, d. i.
für andre Bewegungen erhält man andre Wer-
M. vergl. noch einen Aufſatz von Lehmus
s Journal d. Math. I. S. 61.

ältniß (ratio, λόγος) zweyer gleichartigen
einander iſt nach Euclid (V. Erkl. 3.) die ge-
eziehung, in welcher dieſe beiden Größen in
Größe zu einander ſtehen, ſo daß alſo der Be-

b) Wenn man A mit einer gewissen (ganzen oder gebrochenen) Zahl multiplicirt.

Die erste Art des Verhältnisses nennt man ein arithmetisches, die andere ein geometrisches oder auch bloß ein Verhältniß. Beide Namen sind unpassend. Das erste bezeichnet man durch $A - B$, das zweite durch $A : B$.

Bei den ältern Mathematikern (Clavii Euclides Lib. V. Def. IV.) ist proportio, eigentlich ratio, multiplex ein Verhältniß von der Form $nA : A$, wenn n eine ganze Zahl ist, und zwar proportio dupla, tripla, etc. wenn $n = 2, = 3$, ꝛc. Das Verhältniß $A : A$ heißt ratio aequalitatis, jedes andere ratio inaequalitatis. Verhältnisse von der Form $(n+1)A : nA$, $nA : (n+1)A$, $(n+m)A : nA$, $nA : (n+m)A$, wo $n > m$, $(mn+1)A : nA$, $(mn+p)A : nA$, wo $n > p$, heißen: ratio superparticularis, subsuperparticularis, superpartiens, subsuperpartiens, multiplex superparticularis, multiplex superpartiens; so wie denn die alten Arithmetiker sehr reich an dergleichen Kunstwörtern sind, welche aber alle nicht mehr gebraucht werden.

4. Die Größe D, welche zu A addirt werden muß, um B zu erhalten, heißt die Differenz des Verhältnisses $A - B$. Die Zahl e, mit welcher man A multipliciren muß, um B zu erhalten, heißt der Exponent oder Name von $A : B$. Es ist also immer $A + D = B$, $Ae = B$.

5. Die Differenz läßt sich für jede zwei Größen leicht finden, da immer $D = B - A$. Die schwierigere Aufgabe, den Exponenten zu finden, wird auf folgende Art aufgelöset. Man bestimme, welches durch wiederholte Subtraction immer möglich ist, die ganzen Zahlen $n, n', n'', n''', \ldots$, wo n auch $= o$ seyn kann, so, daß

$$\begin{aligned} B &= nA + R, \\ A &= n'R + R', \\ R &= n''R' + R'', \\ R' &= n'''R'' + R''', \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

$R' < R,\ R'' < R',\ R''' < R'',$ u. ſ. f.

$$\frac{B}{A} = n + \frac{R}{A};$$

$$\frac{A}{R} = n' + \frac{R'}{R},\ \frac{R}{A} = \frac{1}{n' + \frac{R'}{R}},$$

$$\frac{R}{R'} = n'' + \frac{R''}{R'},\ \frac{R'}{R} = \frac{1}{n'' + \frac{R''}{R'}};$$

$$\frac{R'}{R''} = n''' + \frac{R'''}{R''},\ \frac{R''}{R'} = \frac{1}{n''' + \frac{R'''}{R''}};$$

u. ſ. f. u. ſ. f.

h ſucceſive Subſtitution ſogleich:

$$\frac{B}{A} = n + \frac{1}{n'} + \frac{1}{n''} + \frac{1}{n'''} + \ldots$$

$$= n + \frac{1}{n'} + \frac{1}{n''} + \frac{1}{n'''} + \ldots$$

ufgeht, und folglich ein gemeinschaftliches Maaß von A, B ist, diese Größen also commensurabel sind. Hieraus sieht man, daß der obige Kettenbruch, wenn die Größen A, B commensurabel sind, jederzeit abbricht, und also e durch einen rationalen Bruch dargestellt wird. Sind A, B incommensurabel; so bricht der Kettenbruch nie ab, und e ist irrational.

7. Da $B = Ae$ und $e = 1.e$ ist; so entsteht B eben so aus A, wie e aus 1. Folglich sind offenbar die Verhältnisse A:B und 1:e einander gleich, so daß also jedes Verhältniß zweier gleichartigen Größen durch ein Zahlenverhältniß dargestellt werden kann, welches **rational** oder **irrational** ist, jenachdem A und B commensurabel oder incommensurabel sind. Im ersten Falle sey $e =$ dem rationalen Bruche $\frac{b}{a}$. Da $B = Ae = A.\frac{b}{a}$ und $b = a.\frac{b}{a}$ ist; so entsteht B eben so aus A, wie b aus a. Also ist $A:B = a:b$, und jedes Verhältniß commensurabeler Größen kann folglich immer durch das Verhältniß zweier rationalen ganzen Zahlen dargestellt werden. Im Falle der Incommensurabilität kann dies nur annähernd geschehen, wenn man für den Exponenten die successiven Näherungswerthe des obigen Kettenbruchs setzt. Da die Näherungswerthe bekanntlich abwechselnd größer und kleiner als der Werth des ganzen Kettenbruchs sind; so wird mit Hülfe derselben der Zahlenwerth des Exponenten auch leicht zwischen immer engere Gränzen eingeschlossen.

Gleichheit der Verhältnisse.

8. Arithmetische Verhältnisse sind einander **gleich**, wenn ihre Differenzen einander gleich sind, und zwey gleiche arithmetische Verhältnisse bilden eine **arithmetische Proportion**, deren allgemeiner Ausdruck also

$$A - B = A' - B'$$

ist, woraus sich sogleich ergiebt:

$$A + B = A + B,$$

r arithmetiſchen Proportion ſind die Summen
nd letzten und zweiten und dritten Gliedes ein-
. Iſt B = A′; ſo heißt die Proportion eine
n allgemeine Form alſo

A − B = B − C

t die mittlere arithmetiſche Propor-
l, das arithmetiſche Mittel, zwiſchen
und es erhellet leicht, daß $B = \frac{1}{2}(A + C)$.
ortionen ſind faſt von gar keinem Gebrauche in
atik, weshalb dieſe wenigen Bemerkungen hin-
en.

metriſche Verhältniſſe ſind einander gleich,
xponenten einander gleich ſind, weil dann of-
eiden Verhältniſſen das zweite Glied auf einer-
dem erſten entſteht, und zwei gleiche geometri-
niſſe bilden eine geometriſche Proportion
, ἀναλογία). Dieſe bey den Neuern ge-
rklärung hat Euclid in Beziehung auf ganze
Erkl. 20. Bey Größen überhaupt mußte

nd m, nA Z mB und nC Z mD, wo das Zeichen Z grö-
er, gleich oder kleiner bedeutet.

10. Bey keiner der beiden Erklärungen brauchen A, B,
, D alle vier gleichartige Größen zu seyn, sondern nur
, B und C, D. Bey den arithmetischen Proportionen
t dies natürlich anders. Jetzt werden wir nun hauptsäch-
ch zeigen, daß jede der beiden Erklärungen eine unmittel-
are Folge aus der andern ist.

11. Sey daher zunächst

$$A:B = C:D$$

ach der ersten Erklärung, und folglich $B = Ae$, $D = Ce$.
ist nun $nA \gtrless mB$; so ist $nA \gtrless m.Ae$, $nA \gtrless meA$,
$\gtrless me$, $nC \gtrless meC$, $nC \gtrless m.Ce$, $nC \gtrless mD$;
olglich auch

$$A:B = C:D$$

ach der zweiten Erklärung.

Ist dagegen

$$A:B = C:D'$$

ach der zweiten Erklärung; so ist gleichzeitig $nA \gtrless mB$,
$C \gtrless mD$. Sey nun $B = Ae$, $D = Ce'$ (5.); so ist
$A \gtrless m.Ae$, $nC \gtrless m.Ce'$; $nA \gtrless meA$, $nC \gtrless me'C$;
$\gtrless me$, $n \gtrless me'$. Gäbe es nun zwei Werthe von n,
n, für welche $n = me$ wäre; so wäre auch $n = me'$,
lso $e = \frac{n}{m} = e'$. Gäbe es aber nicht zwei solche Wer-
he; so sey zuerst $e' = e + \varepsilon$. Nimmt man nun die
anze Zahl m so an, daß $m\varepsilon > 1$, welches immer mög-
ch, da man bloß $m > \frac{1}{\varepsilon}$ zu nehmen braucht; so erhellet
icht, daß man die ganze Zahl n immer so annehmen kann,
aß sie zwischen me und $me + m\varepsilon$ fällt, oder daß $n > me$,
$< me + m\varepsilon$ ist, d. h. $n > me$, $n < m(e + \varepsilon)$;
$> me$, $n < me'$. Nach dem Obigen ist aber immer
leichzeitig $n > me$, $n > me'$, welches sich einander
iderspricht, so daß also nicht $e' = e + \varepsilon$, oder $e' > e$
eyn kann. Wäre ferner $e' = e - \varepsilon$; so nehme man m
ieder so an, daß $m\varepsilon > 1$ ist. Dann wird man n immer
o annehmen können, daß es $> me - m\varepsilon$, $< me$, d. h.

ε), < me; > me′, < me iſt, da doch im-
n < me, n < me′ ſeyn muß. Demnach
nicht < e ſeyn, ſo daß alſo e′ = e iſt, und
D auch nach der erſten Erklärung proportional
eine andere Art iſt die Verbindung zwiſchen
nd euclidiſchen Theorie der Proportionen herge-
rtz Allgemeine Größenlehre. Halle
61., in welchem Werkchen überhaupt die Lehre
rhältniſſen ſehr deutlich und ſtreng auf ganz ele-
Wege vorgetragen iſt. An dieſem Orte hielt
endung der Kettenbrüche für paſſend. M. ſ.
Aufſätze von Pfleiderer in Hindenburgs
. S. 257. 440., und Expositio et diluci-
. Elem. Eucl. Auct. Pfleiderer Tub. 1782.
bung der euclidiſchen Definition wird man am
den Elementen. VI. ſelbſt kennen lernen, der
ſtrenger als in allen neuern geometriſchen
Die Schwierigkeit der Incommenſurabilität
rmieden.

e vier Größen, welche eine Proportion bilden,

$$A:B = A':B',$$
$$B:C = B':C',$$
$$C:D = C':D',$$
u. ſ. f.

', auch ſo bezeichnet:

$$A:B:C:D:\ldots = A':B':C':D':\ldots.$$

n dieſem Falle ſagt man auch, A, B, C, D, ... ſeyen it A', B', C', D', ... in geordneter Proportion Ordinata proportio). Bei Proportionen von folgen- r Form:

$$A:B = D':E',$$
$$B:C = C':D',$$
$$C:D = B':C',$$
$$D:E = A':B',$$

nd eben ſo bei mehrern Verhältniſſen, ſagt man, dieſe größen ſeyen in zerſtreuter Proportion (Perturbata roportio).

Wenn mehrere Größen A, B, C, D mit eben ſo vie- n A', B', C', D' in geordneter oder zerſtreuter Propor- on ſind, und es iſt $A:D = A':D'$, d. h. es verhält ſich e erſte von jenen zur letzten von jenen, wie die erſte von ieſen zur letzten von dieſen; ſo ſagt man, die Größen A, , A', D' ſeyen aus dem Gleichen proportional ex aequalitate, ex aequo).

14. Gegebene Verhältniſſe A:B, C:D, E:F, G:H uſammenſetzen heißt ein Verhältniß A':B' finden, ir welches, wenn α, α', α'', α''' gewiſſe Größen be- ichnen,

$$A:B = A':\alpha$$
$$C:D = \alpha:\alpha'$$
$$E:F = \alpha':\alpha''$$
$$G:H = \alpha'':B'$$

', und A':B' heißt das aus den gegebenen Verhältniſſen uſammengeſetzte (composita), welches man auch bezeichnet:

$$A':B' = (A:B) + (C:D) + (E:F) + (G:H)$$

Werden n gleiche Verhältniſſe zuſammengeſetzt; ſo heißt as zuſammengeſetzte Verhältniß das nfache von einem

en Verhältniſſe, welches man auch durch
(A:B) bezeichnet, und ratio multipli-
licata, triplicata nennt. Das Dop-
reifache eines Verhältniſſes heißt auch qua-
und rubiſches Verhältniß, weil, wenn
erhältniß in Zahlen iſt, ſein Doppeltes =
d Dreifaches = $a^3 : b^3$ iſt, wie wir unten

r Zuſammenſetzung der Verhältniſſe iſt die
derſelben entgegengeſetzt. Ein Verhältniß
ißt es in mehrere Verhältniſſe zerlegen, durch
menſetzung das gegebene Verhältniß erhalten
s der gefundenen Verhältniſſe heißt ein Theil
n; ein aliquoter Theil, wenn die gefunde-
niſſe unter einander alle gleich ſind. Jedes
nes aliquoten Theils heißt ein aliquanter
ganze oder gebrochene Zahl, welche ein Vielfa-
liquoten oder aliquanten Theil eines Verhält-
nt, heiße der Coefficient deſſelben. Der
te, überhaupt nte Theil eines Verhältniſſes

besonders auf, und für Zahlen würde sich die Auflösung leicht aus VII. 19. (s. unten 39.) ergeben. Nach der neuern Theorie sucht man den Exponenten e des Verhältnisses A:B, der sich auch im Falle der Incommensurabilität durch einen unendlichen Kettenbruch darstellen läßt, und setzt $X = Ce$; so ist $A:B = C:X$ (9.), also X die gesuchte vierte Proportionale. Soll zwischen A, C die mittlere Proportionale gefunden werden; so suche man den Exponenten e des Verhältnisses A:C, und setze $X = A.\sqrt{e}$, weil dann $C = Ae = A.\sqrt{e}.\sqrt{e} = X.\sqrt{e}$, also $A:X = X:C$ ist, indem der Exponent beider Verhältnisse $= \sqrt{e}$. Für Linien löset Euclid diese Aufgabe VI. 13. auf allgemein bekannte Art auf. Soll X so bestimmt werden, daß $A:B = X:C$ ist; so suche man den Exponenten e des Verhältnisses A:B, und setze $X = \frac{1}{e}C$, weil dann $B = Ae$ und $C = Xe$ ist.

17. Wenn A, B, C, D gleichartige Größen sind, und $A = C$, $B = D$ ist; so ist $A:B = C:D$.

Da $nA = nC$, $mB = mD$ ist; so ist zugleich $nA \gtrless mB$, $nC \gtrless mD$, also $A:B = C:D$ (9.).

18. Wenn $A:C = B:C$ ist; so ist $A = B$.

Wäre $A > B$, $= B + \Delta$; so nehme man n so, daß $n\Delta > C$ ist, und bestimme m so, daß zunächst $mC > nB$, also $(m-1)C \leqq nB$ ist. Dann ist $mC - C + C < n(B + \Delta)$, $mC < nA$, da doch $mC > nB$, gegen die Voraussetzung (9.). Wäre $A < B$, $= B - \Delta$; so nehme man wieder $n\Delta > C$, und m so, daß $mC > nA$, $(m-1)C \leqq nA$ ist. Dann ist $mC - C + C < n(A + \Delta)$, $mC < nB$, da doch $mC > nA$, gegen die Voraussetzung. Also $A = B$.

19. Wenn $A:B = C:D$ ist; so ist auch $C:D = A:B$.

Wenn $nA \gtrless mB$ ist; so ist nach der Voraussetzung $nC \gtrless mD$, und folglich auch $nA \gtrless mB$, wenn $nC \gtrless mD$ ist; also $C:D = A:B$ (9.).

nn $A:B = C:D$, $A':B' = C:D$ iſt; ſo iſt
$= A':B'$.

9.) auch $C:D = A':B'$ iſt; ſo iſt zugleich
$nC \gtrless mD$ und $nC \gtrless mD$, $nA' \gtrless mB'$;
gleich $nA \gtrless mB$, $nA' \gtrless mB'$, d. i. $A:B =$

alſo $A:B = \mathfrak{A}:\mathfrak{B}$, $A':B' = \mathfrak{A}':\mathfrak{B}'$, $A:B =$
ließt man leicht, daß auch $\mathfrak{A}:\mathfrak{B} = \mathfrak{A}':\mathfrak{B}'$ iſt.

nn $A:B = C:D$ iſt; ſo iſt auch $B:A = D:C$.

Vorausſetzung iſt zugleich $nA \gtrless mB$, $nC \gtrless$
offenbar auch zugleich $mB \gtrless nA$, $mD \gtrless nC$,
$= D:C$ (9.).

$C:A = C:B$, ſo iſt $A:C = B:C$; alſo
.).

$A:B = C:D$ iſt, wenn α, β ganze Zahlen

$$\alpha A : \alpha B = \beta C : \beta D ,$$
$$\alpha A : \beta B = \alpha C : \beta D ,$$
$$\frac{A}{\alpha} : \frac{B}{\alpha} = \frac{C}{\beta} : \frac{D}{\beta} ,$$

Also $C:D = C:\beta X$ (20), $D = \beta X$ (22), $X = \frac{D}{\beta}$, und folglich

$$\frac{A}{\alpha}:\frac{B}{\beta} = \frac{C}{\alpha}:\frac{D}{\beta}.$$

24. In jeder Proportion $A:B = C:D$ ist für $A \gtrless B$ auch $C \gtrless D$.

Für jedes n, m ist $nA \gtrless mB$, $nC \gtrless mD$; also für $n = m = 1$ zugleich $A \gtrless B$, $C \gtrless D$.

25. Sind A, B, C, D gleichartige Größen, und $A:B = C:D$; so ist für $A \gtrless C$ auch $B \gtrless D$.

Für $A = C$ ist auch $B = D$ (22.). Wäre für $A > C$, $= C + \Delta$ aber $B \lesseqgtr D$; so nehme man $n\Delta > D$, und m so, daß $mD > nC$, $(m-1)D \lesseqgtr nC$ ist. Dann ist $mD - D + D < n(C + \Delta)$, $mD < nA$. Aber $mB \lesseqgtr mD$; also um so mehr $mB < nA$, und folglich zugleich $nA > mB$, $nC < mD$, gegen die Voraussetzung (9.). Für $A < C$ ist $C > A$. Aber $C:D = A:B$ (19.). Also nach dem oben Bewiesenen $D > B$ oder $B < D$. Folglich zugleich $A \gtrless C$, $B \gtrless D$.

26. Sind A, B, C, D gleichartig, und $A:B = C:D$; so ist auch $A:C = B:D$.

Wegen der Voraussetzung ist $nA:nB = mC:mD$ (23.). Also zugleich $nA \gtrless mC$, $nB \gtrless mD$ (25.). Folglich $A:C = B:D$ (9.).

27. Mit den vier Gliedern jeder Proportion gleichartiger Größen kann man folgende acht Veränderungen vornehmen:

1) $A:B = C:D$
2) $A:C = B:D$ (permutando s. vicissim.)
3) $B:A = D:C$ (invertendo.)
4) $B:D = A:C$
5) $C:A = D:B$
6) $C:D = A:B$
7) $D:B = C:A$
8) $D:C = B:A$

2) folgt aus 1) nach (26.); 3) aus 1) nach (22); 4) aus

); 5) aus 2) nach (22.); 6) aus 5) nach (26.);
ch (22.); 8) aus 7) nach (26.).

$A:B = C:D$; ſo iſt

$:B = C + D:D$, (componendo);

$:B + D = A:B = C:D$, (antecedentes et consequentes summando);

$:B = C - D:D$, (dividendo);

$:B - D = A:B = C:D$, (antecedentes et consequentes differentiando);

$B = C:C \pm D$, (convertendo).

und vierten Falle müſſen, wie ſich von ſelbſt
e vier Glieder gleichartig ſeyn.

ebige n, m ſey $n(A+B) \gtrless mB$, $nA+nB$
ſt $mB > nB$, $m > n$. Alſo $nA:(m-n)B$
$-n)D$ (23.), und folglich zugleich $nA \gtrless$
$nC \gtrless mD - nD$ (9.), $n(A+B) \gtrless mB$,
$\gtrless mD$. Da nun nach der Annahme $n(A+B)$
ſo iſt auch $n(C+D) \gtrless mD$. Für $n(A+B)$
auch $n(C+D) > mD$. Denn es iſt $C:D$
9.), und folglich, nach dem ſo eben Bewieſe-

$= C:D$ (Vorsſ.). Alſo $A-C:B-D = A:B$ (20.) $= C:D$.

Ferner ſey $A:A-B = C:X$; ſo iſt nach der dritten ier bewieſenen Proportion: $B:A-B = C-X:X$, $A-B:B = X:C-X$ (22.). Aber $A-B:B = -D:D$. Alſo $X:C-X = C-D:D$ (20.). Folglich nach der erſten hier bewieſenen Proportion: $C:C-X = C:D$. Alſo $C-X = D$ (22.), $X = C-D$, $A:A-B = C:C-D$.

Da $A:B = C:D$ (Vorsſ.), $B:A = D:C$ (22.) t; ſo iſt nach der erſten hier bewieſenen Proportion: $+B:A = C+D:C$. Alſo $A:A+B = C:+D$ (22.).

29. Iſt $A:B = A':B' = A'':B'' = A''':B'''\ldots$, nd alle Größen gleichartig; ſo folgt durch mehrmalige Anendung der zweiten vorher bewieſenen Proportion leicht, aß $A+A'+A''+A'''+\ldots:B+B'+B''+B'''+\ldots = A:B$.

30. Für

$$A:B = A':B',$$
$$B:C = B':C',$$

immer

$$A:C = A':C'.$$

Wäre dies nicht; ſo ſey zuerſt $A:C = A':C'+\Delta$. un nehme man, welches offenbar immer möglich iſt, , m', n ſo, daß $m\Delta > A'+B'$, $m'B' > mC'$, $n'-1)B' \leqq mC'$, $nA' > m'B'$, $(n-1)A' \leqq m'B'$ iſt; iſt auch $m'B' \leqq mC'+B'$, $nA' \leqq m'B'+A'$, d. i. $nA' \leqq mC'+B'+A'$, $nA' < mC'+m\Delta$, $nA' < m(C'+\Delta)$. a aber $m'B' > mC'$, $nA' > m'B'$ iſt; ſo iſt nach der oraussetzung auch $m'B > mC$, $nA > m'B$ (9.), und lglich $nA > mC$. Alſo zugleich $nA > mC$, $nA' < (C'+\Delta)$, welches wegen $A:C = A':C'+\Delta$ nicht yn könnte (9.). Sey nun $A:C = A':C'-\Delta$; ſo muß $':C' = A:C+\Delta'$ ſeyn, ſo daß nämlich C wächſt. Nimmt an nämlich, welches offenbar immer möglich iſt, m und n , daß $m\Delta > A'$, $nA' \leqq mC'$, $(n+1)A' > mC'$; ſo

$' - A' > mC' - m\Delta$, $nA' > m(C' - \Delta)$.
obiger Proportion $nA > mC$ (9.). Wäre
$= A:C - \Delta'$; ſo wäre wegen $nA' \gtreqless mC'$ auch
$- \Delta')$. Aber $nA > mC$ und $nA \gtreqless m(C - \Delta)$
ſich. Folglich iſt $A':C' = A:C + \Delta'$, wenn
$:C' - \Delta$ iſt. Da aber $A':B' = A:B$, $B':C$
orausſ.); ſo kann nach dem zuerſt Bewieſenen nicht
$A:C + \Delta'$, alſo auch nicht $A:C = A':C' - \Delta$
ylich iſt weder $A:C = A':C' + \Delta$, noch $A:C$
$- \Delta$. Alſo $A:C = A':C'$.

ıs

$$\begin{aligned} A:B &= A':B' \\ B:C &= B':C' \\ &\cdots\cdots \\ M:N &= M':N' \\ N:P &= N':P' \end{aligned}$$

ſt mehrmaliger Anwendung von (30.) leicht
$':P'$.

enn

33. Aus

$$A:B = N':P'$$
$$B:C = M':N'$$
$$\cdots\cdots$$
$$M:N = B':C'$$
$$N:P = A':B'$$

olgt mittelst mehrmaliger Anwendung von (32.) leicht: $A:P = A':P'$.

34. Ist nun

$$A:B = \mathfrak{A}:\mathfrak{B}$$
$$A':B' = \mathfrak{A}':\mathfrak{B}'$$
$$A'':B'' = \mathfrak{A}'':\mathfrak{B}''$$

u. s. f.

ist auch $(A:B) + (A':B') + (A'':B'') + \ldots = (\mathfrak{A}:\mathfrak{B}) + (\mathfrak{A}':\mathfrak{B}') + (\mathfrak{A}'':\mathfrak{B}'') + \ldots$ (14.).

Sey $M:N = (A:B) + (A':B') + (A'':B') \ldots$, $\mathfrak{M}:\mathfrak{N} = (\mathfrak{A}:\mathfrak{B}) + (\mathfrak{A}':\mathfrak{B}') + (\mathfrak{A}'':\mathfrak{B}'') \ldots$; so ist (14.):

$$A:B = M:\alpha \;;\; \mathfrak{A}:\mathfrak{B} = \mathfrak{M}:\beta$$
$$A':B' = \alpha:\alpha' \;;\; \mathfrak{A}':\mathfrak{B}' = \beta:\beta'$$
$$A'':B'' = \alpha':\alpha'' \;;\; \mathfrak{A}'':\mathfrak{B}'' = \beta':\beta''$$
$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$
$$A^{(n)}:B^{(n)} = \alpha^{(n-1)}:\alpha^{(n)} \;;\; \mathfrak{A}^{(n)}:\mathfrak{B}^{(n)} = \beta^{(n-1)}:\beta^{(n)}$$
$$A^{(n+1)}:B^{(n+1)} = \alpha^{(n)}:N \;;\; \mathfrak{A}^{(n+1)}:\mathfrak{B}^{(n+1)} = \beta^{(n)}:\mathfrak{N}.$$

Folglich nach der Voraussetzung:

$$M:\alpha = \mathfrak{M}:\beta$$
$$\alpha:\alpha' = \beta:\beta'$$
$$\alpha':\alpha'' = \beta':\beta''$$
$$\cdots\cdots$$
$$\alpha^{(n-1)}:\alpha^{(n)} = \beta^{(n-1)}:\beta^{(n)}$$
$$\alpha^{(n)}:N = \beta^{(n)}:\mathfrak{N}$$

oraus $M:N = \mathfrak{M}:\mathfrak{N}$ (31.).

35. Da man alle Verhältnisse im vorigen Satze als leich annehmen kann; so folgt aus demselben unmittelar, daß für $A:B = \mathfrak{A}:\mathfrak{B}$, auch $n(A:B) = n(\mathfrak{A}:\mathfrak{B})$ st, für jedes ganze n.

36. Ist

$A : B = \mathfrak{A} : \mathfrak{B}$
$B : C = \mathfrak{B} : \mathfrak{C}$
$C : D = \mathfrak{C} : \mathfrak{D}$
$D : E = \mathfrak{D} : \mathfrak{E}$

u. ſ. f.

ch $A + B + C + D + \ldots$ zu irgend einem
er linken Seite des Gleichheitszeichens, wie
$\mathfrak{C} + \mathfrak{D} + \ldots$ zu dem gleichſtelligen Gliede
en Seite. Denn es iſt

$A + B : B = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} : \mathfrak{B}$ (28.)
$B : C = \mathfrak{B} : \mathfrak{C}$ (Vorausſ.)
$A + B : C = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} : \mathfrak{C}$ (30.)
$+ B + C : C = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} : \mathfrak{C}$ (28.)
$C : D = \mathfrak{C} : \mathfrak{D}$ (Vorausſ.)
$+ B + C : D = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} : \mathfrak{D}$ (30.)

u. ſ. f. u. ſ. f.

$D : A = \mathfrak{D} : \mathfrak{A}$ (30. 22.)
$+ B + C : A = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} : \mathfrak{A}$ (30.)

hnliche Art für jede zwei andere Glieder.

Man erhält nämlich leicht $m^2 - m'^2 = \frac{1}{4}(a-b)^2$, woraus erhellet, daß $m^2 - m'^2$ immer eine positive Größe, also $m > m'$ ist. Auch ist

$$m - m' = \frac{(a-b)^2}{4(m+m')},$$

so daß also $m - m'$ desto kleiner ist, je weniger a und b von einander verschieden, und je größer diese Zahlen an sich sind, da m, m' mit a, b wachsen.

40. Für $a:b = c:d$ ist für jedes ganze oder gebrochene n, $a^n:b^n = c^n:d^n$. Denn $b = ae$, $d = ce$, $b^n = a^n.e^n$, $d^n = c^n.e^n$.

41. Aus

$$\begin{aligned} a &: b = c : d; \\ a' &: b' = c' : d', \\ a'' &: b'' = c'' : d'', \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

folgt leicht:

$$aa'a''\ldots : bb'b''\ldots = cc'c''\ldots : dd'd''\ldots,$$

da $b = ae$, $d = ce$; $b' = a'e'$, $d' = c'e'$; $b'' = a''e''$, $d'' = c''e''$; u. s. f.; also $bb'b''\ldots = aa'a''\ldots \times ee'e''\ldots$, $dd'd''\ldots = cc'c''\ldots \times ee'e''\ldots$ ist. Dies nennt man Zusammensetzung der Proportionen, unterschieden von Zusammensetzung der Verhältnisse (14.).

Aus

$$\begin{aligned} a &: b = \alpha:\beta \\ a' &: b' = \beta:\gamma \\ a'' &: b'' = \gamma:\delta \\ a''' &: b''' = \delta:\varepsilon \end{aligned}$$

folgt nach dem Obigen:

$$aa'a''a''' : bb'b''b''' = \alpha\beta\gamma\delta : \beta\gamma\delta\varepsilon,$$

woraus nach (23.)

$$aa'a''a''' : bb'b''b''' = \alpha:\varepsilon.$$

42. Sollen die Verhältnisse a:b, c:d, e:f, g:h in eins zusammengesetzt werden; so suche man successive die vierten Proportionalzahlen x, y, z, β für die willkührlich angenommene Zahl α aus den Proportionen:

$$\begin{aligned} a:b &= \alpha:x \\ c:d &= x:y \\ e:f &= y:z \\ g:h &= z:\beta; \end{aligned}$$

4.):

$:b) + (c:d) + (e:f) + (g:h) = \alpha:\beta.$

$$aceg : bdfh = \alpha:\beta \text{ (41.)}.$$

bdfh das gesuchte zusammengesetzte Verhältniß.

ergiebt sich unmittelbar, daß $n(a:b) =$

nd folglich $\frac{1}{n}(a:b) = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$, weil

$\sqrt[n]{b}) = (\sqrt[n]{a})^n : (\sqrt[n]{b})^n = a:b$ ist. End-

$\frac{m}{n}(a:b) = m.\frac{1}{n}(a:b) = m(\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b})$

$:(\sqrt[n]{b})^m = a^{\frac{m}{n}} : b^{\frac{m}{n}}$.

gebene Verhältnisse, die nicht an einander han-
n leicht an einander hangend gemacht werden,
ie Glieder eines jeden mit dem Producte der
r aller vorhergehenden und dem Producte der
er aller folgenden multiplicirt. Z. B. für vier
a:b, c:d, e:f, g:h erhält man: aceg:bceg,
, bdeg:bdfg, bdfg:hbdf.

ll eine Größe A in mehrere Theile X, Y, Z,

45. Die einfache und zusammengesetzte Regula de tri, letztere von den Rechenmeistern nach der Anzahl der gegebenen Sätze auch Regula quinque, septem, u. s. f. genannt, sind leichte Anwendungen der vorhergehenden Theorie auf im gemeinen Leben vorkommende Größen, unter denen man zwischen Größen, die einander gerade oder verkehrt proportional sind, zu unterscheiden hat. Größen sind nämlich einander gerade proportional, wenn mit einem Wachsen oder Abnehmen der einen auch ein Wachsen oder Abnehmen der andern verbunden ist; ist aber mit einem Wachsen oder Abnehmen der einen ein Abnehmen oder Wachsen der andern verbunden; so heißen sie verkehrt proportional. Waaren und Preise, Arbeiter und Zeit bei gleicher Arbeit, sind Beispiele beider Arten.

46. Die Methode der Rechnung wird aus folgenden Exempeln deutlich werden.

1) 2 Wisp. 12 Scheffel Waizen kosten 83 thlr. 18 gr. 4 pf. Was kosten 120 Wispeln?

Angabe: 2 W. 12 Sch. — 83 thlr. 18 gr. 4 pf.
Frage: 120 W. — x.

Die Größen sind gerade proportional. Also $x > 83$ thlr. 18 gr. 4 pf., so wie 120 W. > 2 W. 12 Sch. ist. Folglich

2 W. 12 Sch. : 120 W. = 83 thlr. 18 gr. 4 pf. : x
1 : 48 = 83 thlr. 18 gr. 4 pf. : x (23.)
670 — 2 — 8 — (8 (39.)
x = 4020 — 16 — — — (6

2) Zur Bekleidung einer Wand sind 120 Ellen Tapeten nöthig, wenn sie 1 Elle breit sind. Wie viel Ellen braucht man, wenn sie $\frac{5}{4}$ breit sind?

Angabe: 1 Elle — 120 Ellen
Frage: $\frac{5}{4}$ — — x —.

Die Größen sind verkehrt proportional. $\frac{5}{4} > 1$, $x < 120$. Also ist die Proportion:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{5}{4} : 1 = 120 : x \\ 5 : 4 = 120 : x \\ 1 : \frac{4}{5} = 24 : x \end{array}\right\} (23.)$$

Also $x = 4 . 24$ (39.) $= 96$.

henmeiſter unterſcheiden zwiſchen gerader und
egula de tri.

die zuſammengeſetzte Regula de tri habe man
rempel:

beiter haben in 3 Tagen in einer Länge von
2 Fuß breit, 6 Fuß hoch Erde aufgedämmt.
460 Fuß in der Länge, 45 in der Breite, 4
einem Tage aufgedämmt werden ſollen; wie
r würden nöthig ſeyn?

nterſcheide Angabe und Frage:

125′ l. 52′ b. 6′ h. 3 T. 120 A.
460′ — 45′ — 4′ — 1 — x —

wiſchengrößen t, u, v, z, u. ſ. f. ein, deren
us folgenden Anſätzen leicht erhellen wird:

125′ l. 52′ b. 6′ h. 3 T. 120 A.
460′ — 52′ — 6′ — 3 — t —
460′ — 45′ — 6′ — 3 — u —
460′ — 45′ — 4′ — 3 — v —
460′ — 45′ — 4′ — 1 — x —

zwei aufeinander folgenden Reihen nur zwei

Die Rechnung wie vorher. Sie giebt $x = 764\frac{4}{13}$, d. h. 764 A. werden nicht ganz in 1 Tage fertig, 765 etwas früher.

Nach der Basedowischen Regel schreibt man die Angabe auf die linke, die Frage auf die rechte Seite eines Vertikalstrichs, wie folgt:

120 A.	x A.
125′ l.	460′ l.
52′ b.	45′ b.
6′ h.	4′ h.
3′ T.	1 T.

Dies nennt man den unberichtigten Aufsatz. Er wird berichtigt, indem man alle Größen, die mit der gesuchten gerade proportional sind, versetzt:

120 A.	x A.
460′ l.	125′ l.
45′ b.	52′ b.
4′ h.	6′ h.
3 T.	1 T.

Die verkehrt proportionalen Größen bleiben stehen. Links und rechts des Strichs wird aufgehoben, was sich aufheben läßt, und etwa vorkommende Brüche durch Multiplication mit einerlei Zahl auf beiden Seiten weggeschafft. Das Product der Zahlen links durch das Product der Zahlen rechts dividirt giebt x. Die Gründe erhellen aus dem obigen Proportionsaufsatze.

Mit dieser Regel dem wesentlichen nach einerlei ist die bei den Rechenmeistern so berühmte, nach dem Holländer de Rees benannte Reesische Regel. Die Fragezahl x setze man oben auf die linke Seite eines Vertikalstrichs, und schreibe jeden Satz der Frage auf die linke oder rechte Seite, jenachdem er mit der Fragezahl verkehrt oder gerade proportional ist, wie folgt:

x A.	
	460′ l.
	45′ b.
	4′ h.
1 T.	

…tze der Angabe werden sodann den gleichnami…der Frage gegenüber geschrieben:

x A.	120 A.
125′ l.	460′ l.
52′ b.	45′ b.
6′ b.	4′ b.
1 T.	3 T.

…wird wie vorher. Das Product aller Zahlen …das Product aller Zahlen links dividirt giebt x. …nnichs Lehrb. d. Math. I. 1. Berlin. …206., vorzüglich aber W. L. Willigs …e Vorstellung der reesischen allge…tegel. 2 Bände. Bremen u. Gött. …). und allgemeine Regel der Rechen…. Holl.) übersetzt von L. M. Kahle, in …gaben: 1739, 1743, 1751.

…ellschaftsregel, Kettenregel oder Regel Mul… Conjointe, Alligationsregel u. s. f. gründen …die Lehre von den Verhältnissen, und sind in …genden gewidmeten Artikeln nachzusehen. S.

48. Jede dieser beiden Erklärungen ist eine Folge aus
:r andern.

Sei zuerst $A:B > A':B'$ nach der ersten Erklärung,
daß $e < e'$ für $B = Ae$, $B' = A'e'$. Man nehme,
elches offenbar immer möglich ist, einen Bruch $\frac{n}{m}$, der
$> e$, $\leqq e'$ ist; so ist $n > me$, $n \leqq me'$, $nA > meA$,
$A' \leqq me'A'$, $nA > m.Ae$, $nA' \leqq m.A'e'$, nA
$> mB$, $nA' \leqq mB'$, also $A:B > A':B'$ nach der Er-
ärung des Euclides. Wäre $A:B < A':B'$, also $A':B'$
$> A:B$; so würde man wie vorher schließen.

Ist dagegen $A:B > A':B'$ nach der Erklärung des
uclides; so gibt es zwei ganze Zahlen n, m, für
elche $nA > mB$, $nA' \leqq mB'$, also, wenn $B = Ae$,
$= A'e'$ (5.) ist: $nA > m.Ae$, $nA' \leqq m.A'e'$,
$A > meA$, $nA' \leqq me'A'$, $n > me$, $n \leqq me'$,
$> e$, $\frac{n}{m} \leqq e'$. Also $e < e'$, und folglich $A:B >$
$':B'$ nach der ersten Erklärung.

Wir folgen vorzüglich wieder der Definition des Eu-
lides.

49. Ist ein Verhältniß $A:B$ größer als ein anderes
$':B'$; so kann es nicht auch zugleich kleiner seyn.

Für zwei ganze Zahlen n, m ist nämlich nach der Vor-
ussetzung $nA > mB$, $nA' \leqq mB'$, und es ist zu be-
eisen, daß es nicht zwei Zahlen n', m' geben kann, für
elche $n'A' > m'B'$, $n'A \leqq m'B$ ist. Könnte nämlich
Beides zugleich statt finden; so wäre auch $nm'A > mm'B$,
$'mA \leqq mm'B$. Also $nm'A > n'mA$, $nm' > n'm$.
Es wäre aber auch $nm'A' \leqq mm'B'$, $n'mA' > mm'B'$.
Also $n'mA' > nm'A'$, $n'm > nm'$, welches dem Obi-
en widerspricht.

50. Wenn $A > B$ ist; so ist für jede dritte mit A
nd B gleichartige Größe C, $A:C > B:C$, und $C:A$
$< C:B$.

etze $A - B = \Delta$ und nehme n ſo, daß
d. i. $nA - nB > C$, $nA > nB + C$ iſt.
e man m ſo, daß $mC > nB$, $(m-1)C \lesseqgtr$
iſt $mC - C \lesseqgtr nB$, $mC \lesseqgtr nB + C$. Alſo
$nB < mC$, und folglich $A:C > B:C$ (47.).
nehme man m ſo, daß $m\Delta > C$, $m(A-B)$
$> mB + C$, und n ſo, daß $nC > mB$,
$\lesseqgtr mB$, alſo $nC \lesseqgtr mB + C$ iſt; ſo iſt um
$C < mA$. Alſo $nC > mB$, $nC < mA$,
A (47.), $C:A < C:B$.
ſt $A:C > B:C$; ſo iſt $A > B$. Iſt $C:A$
o iſt $A > B$.
m erſten Falle $A \lesseqgtr B$; ſo wäre entweder $A:C$
7.), oder $B:C > A:C$ (50.), Beides gegen
ſetzung. Wäre im andern Falle $A \lesseqgtr B$; ſo
der $C:A = C:B$ (17.), oder $C:B < C:A$
des gegen die Vorausſetzung.
enn $A:B > A':B'$ iſt; ſo iſt $B:A < B':A'$.

54. Wenn $A:B = C:D$, $A':B' > C:D$ iſt; ſo iſt auch $A':B' > A:B$.

Denn es iſt $nA' > mB'$, $nC \gtreqless mD$ (47.); $nA \gtreqless mB$, $nC \lesseqgtr mD$ (9.). Alſo $nA' > mB'$, $nA \gtreqless mB$, und folglich $A':B' > A:B$ (47.). Iſt alſo $A:B = C:D$, $C:D < A':B'$; ſo iſt auch $A:B < A':B'$.

55. Iſt $A:B = C:D$, $A':B' = C':D'$, $A:B > A':B'$; ſo iſt $C:D > A':B'$ (53.). Aber $C':D' = A':B'$. Alſo $C:D > C':D'$ (54.).

56. Wenn für vier gleichartige Größen $A:B > A':B'$ iſt; ſo iſt auch $A:A' > B:B'$.

Denn ſey $A:B = A':\mathfrak{A}$ (16.); ſo iſt $A':\mathfrak{A} > A':B'$ (53.). Alſo $A':B' < A':\mathfrak{A}$, $B' > \mathfrak{A}$ (51.). Folglich $B:B' < B:\mathfrak{A}$ (50.). Aber $A:A' = B:\mathfrak{A}$ (26.). Alſo $B:B' < A:A'$ (53.), oder $A:A' > B:B'$.

57. Wenn $A:B > A':B'$, $A':B' > A'':B''$ iſt; ſo iſt $A:B > A'':B''$.

Nach der Vorausſetzung iſt $nA > mB$, $nA' \gtreqless mB'$ (47.). Wäre nun $nA'' > mB''$; ſo wäre $nA'' > mB''$, $nA' \lesseqgtr mB'$, alſo $A'':B'' > A':B'$ (47.), da doch $A':B' > A'':B''$ ſeyn ſoll. Demnach iſt $nA'' \lesseqgtr mB''$, und folglich $nA > mB$, $nA'' \gtreqless mB''$. Alſo $A:B > A'':B''$ (47.).

58. Iſt daher $A:B < A':B'$, $A':B' < A'':B''$; ſo iſt $A'':B'' > A':B'$, $A':B' > A:B$; alſo $A'':B'' > A:B$ (57.), oder $A:B < A'':B''$.

Alſo iſt auch für $A > B$, $C < D$ immer $A:C > B:D$, wenn A, B, C, D gleichartig ſind. Denn ſey $C + \Delta = D$; ſo iſt $A:C + \Delta > B:D$ und $A:C > A:C + \Delta$ (50.). Folglich um ſo mehr $A:C > B:D$ (57.). Eben ſo iſt für $A < B$, $C > D$, immer $A:C < B:D$, da, wie ſo eben bewieſen, $B:D > A:C$, alſo $A:C < B:D$ iſt.

59. Wenn $A:B > A':B'$ iſt; ſo iſt auch $\alpha A:\alpha B > A':\beta B'$, $\alpha A:\beta B > \alpha A':\beta B'$.

Denn $A:B = \alpha A:\alpha B$ (23.), $A:B > A':B'$

; alſo $\alpha A : \alpha B > A' : B'$ (53.). Ferner iſt
$\beta A' : \beta B'$ (23.). Alſo $\alpha A : \alpha B > \beta A' : \beta B'$
ch iſt $nA > mB$, $nA' \leqq mB'$ (47.). Alſo
$n\alpha\beta B$, $n\alpha\beta A' \leqq m\alpha\beta B'$, d. i. $n\beta . \alpha A >$
$\beta . \alpha A' \leqq m\alpha . \beta B'$. Folglich $\alpha A : \beta B >$
47.).

en ſo iſt für $A : B > A' : B'$, auch $\frac{1}{\alpha}A : \frac{1}{\alpha}B >$
, $\frac{1}{\alpha}A : \frac{1}{\beta}B > \frac{1}{\alpha}A' : \frac{1}{\beta}B'$.

m entgegengeſetzten Falle wäre, nach (59.)
$\alpha\left(\frac{1}{\alpha}A\right) : \alpha\left(\frac{1}{\alpha}B\right) \leqq \beta\left(\frac{1}{\beta}A'\right) : \beta\left(\frac{1}{\beta}B'\right)$,
$\beta\left(\frac{1}{\beta}B\right) \leqq \alpha\left(\frac{1}{\alpha}A'\right) : \beta\left(\frac{1}{\beta}B'\right)$, d. i. $A : B$
a doch $A : B > A' : B'$.

enn $A : B > A' : B'$, $B : C > B' : C'$ iſt; ſo iſt
$> A' : C'$.

$nA > mB$, $nA' \leqq mB'$, und $n'B > m'C$,
C' (47.). Alſo $nn'A > mn'B$, $nn'A' \leqq$
$'B > mm'C$, $mn'B' \leqq mm'C'$. Alſo offen-
$'A > mm'C$, $nn'A' \leqq mm'C'$, und folglich

64. Wenn $A:B = A':C'$, $B:C > B':A'$ ist; so ist $A:C > B':C'$.

Sei $B:C = B' + \Delta:A'$, da $B' - \Delta:A' < B':A'$ (50.), $< B:C$ (58.) ist; so ist $A:C = B' + \Delta:C'$ (32.), $> B':C'$ (50.).

65. Wenn $A:B > \mathfrak{A}:\mathfrak{B}$, $A':B' > \mathfrak{A}':\mathfrak{B}'$ ist; so ist auch $(A:B) + (A':B') > (\mathfrak{A}:\mathfrak{B}) + (\mathfrak{A}':\mathfrak{B}')$.

Sei $(A:B) + (A':B') = M:N$, $(\mathfrak{A}:\mathfrak{B}) + (\mathfrak{A}':\mathfrak{B}') = \mathfrak{M}:\mathfrak{N}$; so ist $A:B = M:\alpha$, $A':B' = \alpha:N$, und $\mathfrak{A}:\mathfrak{B} = \mathfrak{M}:\beta$, $\mathfrak{A}':\mathfrak{B}' = \beta:\mathfrak{N}$ (14.). Also $M:\alpha > \mathfrak{M}:\beta$, $\alpha:N > \beta:\mathfrak{N}$ (55.), $M:N > \mathfrak{M}:\mathfrak{N}$ (61.).

Die Erweiterung dieses Satzes auf mehrere Verhältnisse hat keine Schwierigkeit.

66. Nimmt man im vorigen Satze die Verhältnisse auf jeder der beiden Seiten des Zeichens $>$ alle als gleich an; so ergiebt sich augenblicklich, daß, für $A:B > \mathfrak{A}:\mathfrak{B}$, immer $n(A:B) > n(\mathfrak{A}:\mathfrak{B})$, oder, was dasselbe ist, für $A:B < \mathfrak{A}:\mathfrak{B}$, immer $n(A:B) < n(\mathfrak{A}:\mathfrak{B})$ ist.

67. Ist folglich $A:B = \mathfrak{A}:\mathfrak{B}$; so ist $\frac{1}{n}(A:B) = \frac{1}{n}(\mathfrak{A}:\mathfrak{B})$, weil, für $\frac{1}{n}(A:B) \gtrless \frac{1}{n}(\mathfrak{A}:\mathfrak{B})$, $n\left\{\frac{1}{n}(A:B)\right\} \gtrless n\left\{\frac{1}{n}(\mathfrak{A}:\mathfrak{B})\right\}$, d. i. $A:B \gtrless \mathfrak{A}:\mathfrak{B}$ (15.) seyn würde. Demnach ist auch $m\left\{\frac{1}{n}(A:B)\right\} = m\left\{\frac{1}{n}(\mathfrak{A}:\mathfrak{B})\right\}$ (35.), d. i. $\frac{m}{n}(A:B) = \frac{m}{n}(\mathfrak{A}:\mathfrak{B})$ (15.).

68. Ist ferner $A:B > \mathfrak{A}:\mathfrak{B}$; so ist auch $\frac{1}{n}(A:B) > \frac{1}{n}(\mathfrak{A}:\mathfrak{B})$, weil, für $\frac{1}{n}(A:B) \gtrless \frac{1}{n}(\mathfrak{A}:\mathfrak{B})$, auch $n\left\{\frac{1}{n}(A:B)\right\} \gtrless n\left\{\frac{1}{n}(\mathfrak{A}:\mathfrak{B})\right\}$ (35. 66.), d. i. $A:B \gtrless \mathfrak{A}:\mathfrak{B}$ seyn müßte. Also ist auch $\frac{m}{n}(A:B) > \frac{m}{n}(\mathfrak{A}:\mathfrak{B})$ (66.).

69. Wenn $A:B > A':B'$, $A' > B'$ ist; so ist auch $A > B$.

Es ist $nA > mB$, $nA' \gtrless mB'$ (47.). Da nun

so ist offenbar $n < m$. Wäre daher $A \gtrless B$;
$\gtrless mB$, da doch $nA > mB$.
nn $A:B > A':B'$, $A < B$ ist; so ist auch

$nA > mB$, $nA' \gtrless mB'$; also $n > m$, weil
Wäre nun $A' \gtrless B'$; so wäre $nA' > mB'$.
nn $A:B > A':B'$ ist; so ist $A + B : B >$
, $A - B:B > A' - B':B'$, $A - B:A >$
.
r Voraussf. ist $nA > mB$, $nA' \gtrless mB'$ (47.).
$nB > mB + nB$, $nA' + nB' \gtrless mB' + nB'$,
$+ B) > (m + n)B$, $n(A' + B') \gtrless$
B', woraus augenblicklich $A + B : B >$
folgt (47.). Bei den letzten beiden Paa-
ber Verhältnisse muß man natürlich voraus-
$A' > B'$, also auch $A > B$ (69.) ist.
, wegen $nA' \gtrless mB'$, $n < m$. Also
$> mB - nB$, $nA' - nB' \gtrless mB' - nB'$, d. i.
$> (m - n)B$, $n(A' - B') \gtrless (m - n)B$,
eich $A - B:B > A' - B':B'$ (47.). Also

73. Hieraus schließt man leicht, daß für $A:B > \mathfrak{A}:\mathfrak{A}'$, $A':B' > \mathfrak{A}:\mathfrak{A}'$, $A'':B'' > \mathfrak{A}:\mathfrak{A}'$, u. s. f., immer $A + A' + A'' + \ldots : B + B' + B'' + \ldots > \mathfrak{A}:\mathfrak{A}'$ ist.

74. Für $A:A' < \mathfrak{A}:\mathfrak{A}'$, $B:B' < \mathfrak{A}:\mathfrak{A}'$ ist auch $A + B:A' + B' < \mathfrak{A}:\mathfrak{A}'$.

Für $A:A' > B:B'$ ist $A':A < B':B$ (52.), $B':B > A':A$, $B':A' > B:A$ (56.), $B' + A':A' > B + A:A$ (71.), $B' + A':B + A > A':A$ (56.), $A + B:A' + B' < A:A'$ (52.), $A:A' < \mathfrak{A}:\mathfrak{A}'$ (Vorauss.), $A + B:A' + B' < \mathfrak{A}:\mathfrak{A}'$ (58.). Für $A:A' < B:B'$ ist $B:B' > A:A'$, $B:A > B':A'$ (56.), $A:B < A':B'$ (52.), $A':B' > A:B$, $A' + B':B' > A + B:B$ (71.), $A' + B':A + B > B':B$ (56.), $A + B:A' + B' < B:B'$ (52.), $B:B' < \mathfrak{A}:\mathfrak{A}'$ (Vorauss.), $A + B:A' + B' < \mathfrak{A}:\mathfrak{A}'$ (58.). Wäre endlich $A:A' = B:B'$; so wäre $A:B = A':B'$ (26.), $A + B:B = A' + B':B'$ (28.), $A + B:A' + B' = B:B'$ (26.), $B:B' < \mathfrak{A}:\mathfrak{A}'$ (Vorss.), $A + B:A' + B' < \mathfrak{A}:\mathfrak{A}'$ (54.).

Die Erweiterung auf mehrere Verhältnisse ist leicht.

75. Mehrere Sätze über ungleiche Verhältnisse s. m. bei Gartz a. a. O., vorzüglich aber in Propositiones de rationibus inter se diversis demonstrationes, ex solis lib. V. Elem. definitionibus et propositionibus deductae. Auct. Hauber. Tub. 1793.

Gränzen der Verhältnisse.

76. Wenn ein veränderliches Verhältniß immer $\left\{\begin{matrix}\text{kleiner}\\\text{größer}\end{matrix}\right\}$ als ein gegebenes Verhältniß ist, aber so $\left\{\begin{matrix}\text{vergrößert}\\\text{verkleinert}\end{matrix}\right\}$ werden kann, daß es $\left\{\begin{matrix}\text{größer}\\\text{kleiner}\end{matrix}\right\}$ wird, als das gegebene Verhältniß, welches $\left\{\begin{matrix}\text{kleiner}\\\text{größer}\end{matrix}\right\}$ ist, als das erste gegebene Verhältniß; so heißt dieses die Gränze im

e n { des veränderlichen Verhältnisses. Ein
s Verhältniß kann indeß auch bald größer,
seyn, als ein gegebenes Verhältniß, kann
en von beiden Seiten her willkührlich genähert
n diesem Falle mag das gegebene Verhältniß
ie Gränze des veränderlichen heißen, und
cht, daß in diesem Falle eigentlich eine Gränze
und im Abnehmen Statt findet; erstere
rthe des veränderlichen Verhältnisses, welche
tere für die, welche größer sind, als das ge-
ältniß. Setzt man für Verhältniß nur überall
at man die Erklärung der Gränzen veränder-
n. Diese Erklärungen scheinen uns denen im
vorzuziehen zu seyn.

nn L die Gränze im { Wachsen / Abnehmen } von X ist;
Verhältniß der Gleichheit die Gränze im
des Verhältnisses L : X.

Folglich ist A:A die Gränze im Wachsen von L:X (76.).

Wäre L überhaupt die Gränze von X, so daß sich also X von beiden Seiten her der L immer mehr und mehr nähert (76.); so wird der vorige Satz doch noch richtig seyn. Man kann sich nämlich alle Werthe der Veränderlichen X in zwei Klassen getheilt denken, von denen sich die einen von der einen, die andern von der andern Seite her der L immer mehr und mehr nähern. Daher wird sich auch das Verhältniß L:X dem Verhältnisse der Gleichheit nach (77.) immer mehr und mehr von beiden Seiten her nähern, und Letzteres folglich überhaupt die Gränze des erstern seyn.

78. Daß, wenn L irgend eine Gränze von X ist, immer auch L:A die gleichartige Gränze von X:A seyn wird, erhellet von selbst ohne weitere Erläuterung.

79. Ist umgekehrt das Verhältniß der Gleichheit die Gränze im $\left\{\begin{matrix}\text{Abnehmen}\\\text{Wachsen}\end{matrix}\right\}$ von L:X; so ist L die Gränze im $\left\{\begin{matrix}\text{Wachsen}\\\text{Abnehmen}\end{matrix}\right\}$ von X.

Ist A:A die Gränze im Abnehmen von L:X, und L′ irgend eine Größe, welche $< L$ ist; so ist $L:L' > L:L$ (50.), $L:L' > A:A$ (54.). Nach der Voraussetzung aber $L:X > A:A$, $L:X < L:L'$ (76.). Also auch $L:X > L:L$ (54.), $L:X < L:L'$. Folglich hat man $X < L$ (51.), $X > L'$ (51.), $L' < L$. Also L die Gränze im Wachsen von X. Ist dagegen A:A die Gränze im Wachsen von L:X, und L′ irgend eine Größe, welche $> L$ ist; so ist $L:L' < L:L$ (50.), $L:L' < A:A$ (54.). Aber nach der Voraussetzung $L:X < A:A$, $L:X > L:L'$ (76.), oder $L:X < L:L$ (54.), $L:X > L:L'$. Also hat man $X > L$ (51.), $X < L'$ (51.), $L' > L$. Folglich ist L die Gränze im Abnehmen von X.

Wäre das Verhältniß der Gleichheit überhaupt die Gränze von L:X; so nähert sich dieses Verhältniß von beiden Seiten her dem Verhältnisse der Gleichheit. Demnach wird sich nach dem so eben Bewiesenen auch X der

n beiden Seiten her beliebig nähern, und
erhaupt die Gränze von X ſeyn.
ß, wenn L : A irgend eine Gränze von X : A
ch L die gleichartige Gränze von X ſeyn muß,
elbſt, ohne weitere Erläuterung.
nd L, L′ gleichartige Gränzen von X, X′,
hältniß X : X′ iſt immer dem conſtanten Ver-
′ gleich; ſo iſt auch L : L′ = A : A′.
uerſt L, L′ Gränzen im Wachſen von X : X′,
immer L > X, L′ > X′ (76.). Sey nun
A : A′; ſo iſt L — Δ : L′ = A : A′, weil
> L : L′ (50.), > A : A′ (37.) iſt. Nun
welches nach der Vorausſetzung immer mög-
X < Δ (76.), d. i. L — Δ < X; ſo iſt
< X : L′ (50.). Aber X : X′ = A : A′
= L — Δ : L′. Alſo auch X : X′ < X : L′ (54.),
) da doch nach der Vorſ. immer X′ < L′. b) Sey
A′, alſo L : L′ — Δ = A : A′, da L : L′ + Δ
50.) < A : A′ (58.) iſt. Nun nehme man,
er möglich iſt, L′ — X′ < Δ (76.), d. i. L′ — Δ

ſſ.). Alſo iſt auch für Gränzen im Abnehmen L:L' = A:A'.

Sind endlich L, L' überhaupt Gränzen von X, X'; ſeyen φX, ψX und φ'X', ψ'X' die Werthe von X', welche reſpective immer kleiner und immer größer , als L, L'; ſo ſind L, L' die Gränzen im Wach- von φX, φ'X'. Da nun immer X:X' = A:A' ſo iſt auch immer φX:φ'X' = A:A'. Alſo nach n Obigen L:L' = A:A'. Eben ſo kann man dieſe oportion aus den Gränzen im Abnehmen ſchließen.

Dieſer Satz iſt für die Geometrie von großer Wichtig- . M. ſ. den Art. Exhauſtions-Methode. Die ripherie und der Flächenraum des Kreiſes ſind die Grän- im Wachſen der Peripherieen und Flächenräume der in Kreis beſchriebenen regulären Polygone. Die Periphe- n und Flächenräume zweier in zwei Kreiſe beſchriebenen ulären Polygone verhalten ſich aber wie die Halbmeſſer und die Quadrate der Halbmeſſer dieſer Kreiſe. Alſo verhalten die Peripherieen und Flächenräume der Kreiſe eben ſo.

82. Sind L, L' gleichartige Gränzen von X, X', es iſt X:A = X':A'; ſo iſt auch L:A = L':A', X, X' nicht, wie vorher, gleichartige Größen zu ſeyn uchen.

Seyen L, L' Gränzen im Wachſen; alſo L > X, > X'. Sey nun a) L:A > L':A'; ſo iſt L — Δ:A L':A', weil L + Δ:A > L:A (50.), > L':A' 7.). Man mache L — X < Δ, L — Δ < X; ſo L — Δ:A < X:A (50.), L':A' < X:A (54.). er L' > X'. Alſo X':A' < L':A' (50.), und glich X':A' < X:A (58.), da doch immer X':A' = A (Vorausſ.). b) L:A < L':A'. Alſo L:A = — Δ:A', da L':A' < L' + Δ:A' (50.), alſo um mehr L:A < L' + Δ:A' (58.) iſt. Man mache — X' < Δ, L' — Δ < X'; ſo iſt L' — Δ:A' < :A' (50.), L:A < X':A' (54.). Aber L > X, ſo X:A < L:A (50.). Folglich X:A < X':A' 8), da doch X:A = X':A'. Es iſt alſo L:A = : L':A'.

, L′ Gränzen im Abnehmen, alſo $L < X$,
ſo ſey wieder a) $L:A > L':A'$, $L:A =$
, da $L':A' > L' - \Delta:A'$ (50.), alſo um
$A > L' - \Delta:A'$ (57.) iſt. Man mache
Δ, $X' < L' + \Delta$; ſo iſt $L' + \Delta:A' >$
.), $L:A > X':A'$ (53.). Aber $L < X$.
$> L:A$ (50.). Alſo um ſo mehr $X:A >$
), da doch immer $X:A = X':A'$. Ferner
$< L':A'$, alſo $L + \Delta:A = L':A'$, da
$< L:A$ (50.), $< L':A'$ (58.) iſt. Man
$L < \Delta$, $X < L + \Delta$; ſo iſt $L + \Delta:A$
0.), $L':A' > X:A$ (53.). Aber $L' < X'$,
$':A'$ (50.), folglich um ſo mehr $X':A' >$
), da doch immer $X':A' = X:A$. Alſo iſt
$:A'$.

änzen überhaupt beweiſet man den Satz durch
(81.) gebrauchten ganz ähnliches Raiſon-

$L:L'$ die Gränze im $\left\{\begin{matrix}\text{Wachſen}\\\text{Abnehmen}\end{matrix}\right\}$ von $X:X'$;

Gränze von X:X′ iſt; ſo iſt L:L′ die gleichnamige Gränze von Y:Y′.

Iſt L:L′ die Gränze im Wachſen von X:X′; ſo iſt immer L:L′ > X:X′. Alſo nach der Vorausſetzung auch L:L′ > Y:Y′ (54.). Iſt nun A:B irgend ein Verhältniß, welches < L:L′; ſo iſt X:X′ > A:B (76.), und folglich auch Y:Y′ > A:B (53.). Folglich L:L′ die Gränze im Wachſen von Y:Y′ (76.) Ganz auf ähnliche Art wird der Beweis geführt, wenn L:L′ die Gränze im Abnehmen iſt. Iſt aber L:L′ überhaupt die Gränze von X:X′; ſo ſeyen $\varphi(X:X')$, $\varphi'(X:X')$ die Werthe von X:X′, welche ſich von der einen oder andern Seite her dem Verhältniſſe L:L′ beliebig nähern, und $\psi(Y:Y')$, $\psi'(Y:Y')$ die entſprechenden gleichen Werthe von Y:Y′. Es iſt folglich $\varphi(X:X') = \psi(Y:Y')$, $\varphi'(X:X') = \psi'(Y:Y')$, und es nähert ſich alſo nach dem hier bewieſenen $\psi(Y:Y')$ von der einen, $\psi'(Y:Y')$ von der andern Seite her dem Verhältniſſe L:L′ immer mehr und mehr, ſo daß alſo L:L′ überhaupt die Gränze von Y:Y′ iſt.

85. Wenn L die Gränze im Abnehmen, L′ die Gränze im Wachſen von X′ iſt; ſo iſt L:L′ die Gränze im Abnehmen von X:X′.

Nach der Vorausſetzung iſt immer L < X, L′ > X′. Alſo L:L′ < X:X′ (58). Sey ein A > L, A′ < L′, X < A, X′ > A′ (76.); ſo iſt A:A′ > L:L′, X:X′ < A:A′ (58.). Folglich offenbar L:L′ die Gränze im Abnehmen von X:X′ (76.).

86. Iſt L die Gränze im Wachſen von X, L′ die Gränze im Abnehmen von X′; ſo iſt L:L′ die Gränze im Wachſen von X:X′.

Nach der Vorausſetzung iſt immer L > X, L′ < X′. Alſo L:L′ > X:X′ (58.). Sey nun A < L, A′ > L′, X > A, X′ < A′; ſo iſt A:A′ < L:L′, X:X′ > A:A′ (58.). Alſo iſt L:L die Gränze im Wachſen von X:X′ (16.).

87. Die Gränze der Verhältniſſe X:X′, Y:Y′ ſey L:L′; ſo iſt L:L′ auch eine Gränze von X + Y:X′ + Y′.

L′ die Gränze im Wachſen beider Verhältniſſe;
$> X:X'$, $L:L' > Y:Y'$ (76.). $A:A'$ ſey
erhältniß, welches $< L:L'$; ſo iſt $X:X' > A:A'$
A', wenigſtens laſſen ſich die veränderlichen Ver-
nnehmen (76.). Folglich iſt $L:L' > X+Y:$
$+ Y:X'+Y' > A:A'$ (74. 72.). Alſo
ränze im Wachſen von $X+Y:X'+Y'$ (76.).
L′ die Gränze im Abnehmen beider Verhält-
gt man durch ganz ähnliche Schlüſſe, daß $L:L'$
nze im Abnehmen von $X+Y:X'+Y'$ iſt.

r z. B. $L:L'$ die Gränze im Wachſen von
und die Gränze im Abnehmen von $Y:Y'$,
ein Verhältniß, welches $< L:L'$, $A':B'$
Verhältniß, welches $> L:L'$; ſo iſt $L:L'$
$A:B < L:L'$, $X:X' > A:B$ und eben ſo
Y', $A':B' > L:L'$, $Y:Y' < A':B'$ (76.).
$> X:X'$ (57.), und folglich, da auch $A':B'$
, $X+Y:X'+Y' < A':B'$ (74.). Eben
$< Y:Y'$ (58.), $A:B < X:X'$. Alſo $X+Y:$
$A:B$ (72.). Macht nun, welches offenbar

irgend ein Verhältniß, welches $> L:L'$, ſo daß alſo $L' > A$ (51.). Nimmt man folglich $M:L' = B:A$; ſo iſt auch $M > B$ (25) und demnach $L:B > L:M$ (50.). Alſo kann man machen $X:Y < L:B$ (76.). Sey nun $X:Y = L:C$, alſo $L:C < L:B$ (54.), $C > B$ (51.) $C:A > B:A$ (50.), $C:A > M:L'$ (53.). Folglich $Y:X' < C:A$ (76.). Man hat alſo $X:Y = L:C$, $Y:X' < C:A$, woraus $X:X' < L:A$ (63.). Da nun $X:X' > L:L'$, $L:A > L:L'$, $X:X' < L:A$ iſt; ſo iſt $L:L'$ die Gränze im Abnehmen von $X:X'$.

Sind $L:M$, $M:L'$ beides Gränzen im Wachſen von $X:Y$, $Y:X'$; ſo iſt immer $X:Y < L:M$, $Y:X' < M:L'$; alſo $X:X' < L:L'$ (61.). Sey nun wieder $L:A$ irgend ein Verhältniß, welches $< L:L'$ iſt; ſo iſt $L' < A$ (51.). Nimmt man nun $M:L' = B:A$; ſo iſt $M < B$ (25.), $L:B < L:M$ (50.). Man kann alſo $X:Y > L:B$ machen (76.). Ferner ſey $X:Y = L:C$; ſo iſt $L:C > L:B$ (53.), $C < B$ (51.), $C:A < B:A$ (50.), $C:A < M:L'$ (54.), und man kann alſo $Y:X' > C:A$ machen (76.). Alſo hat man $X:Y = L:C$, $Y:X' > C:A$, woraus $X:X' > L:A$ (63.). Da nun $L:L' > X:X'$, $L:A < L:L'$, $X:X' > L:A$ iſt; ſo iſt $L:L'$ die Gränze im Wachſen von $X:X'$ (76.).

Iſt z. B. $L:M$ die Gränze im Abnehmen von $X:Y$, $M:L'$ die Gränze im Wachſen von $Y:X'$, ſo iſt immer $L:M < X:Y$, $M:L' > Y:X'$. Sey nun $L:A$ irgend ein Verhältniß welches $< L:L'$ iſt; ſo iſt $A > L'$ (51.), $M:A < M:L'$ (50.). Folglich kann man $Y:X' > M:A$ machen (76.), und hat immer $X:Y > L:M$. Alſo $X:X' > L:A$ (61.). Ferner ſey $B:L'$ irgend ein Verhältniß, welches $> L:L'$ iſt; ſo iſt $B > L$ (51.), $B:M > L:M$ (50.). Alſo kann man $X:Y < B:M$ machen (76.), und hat immer $Y:X' < M:L'$. Folglich $X:X' < B:L'$ (61.). Macht man nun zugleich $Y:X' > M:A$, $X:Y < B:M$, welches offenbar möglich, da $M:A$, $B:M$ zwei Verhältniſſe ſind, welche $< M:L'$ und $> L:M$ ſind; ſo iſt zugleich $X:X' > L:A$, $X:X' < B:L'$, wo $L:A$, $B:L'$ zwei Verhältniſſe ſind, welche willkührlich

nd > L:L′ ſind. Alſo kann ſich X:X′ dem
tniſſe L:L′ von beiden Seiten her beliebig nä-
ß alſo letzteres überhaupt die Gränze von er-

:M, M:L′ überhaupt Gränzen von X:Y,
beweiſet man den Satz wieder nach der öfte
Methode.

r mehr als zwei Verhältniſſe wird der Satz
malige Anwendung des vorhergehenden bewieſen.

hr ausführlich iſt die Lehre von den Gränzen
tniſſe behandelt in L'Huilier exposition
incip. calc. diff. et int. Tub. 1795. Cap. I.
Simson Opp. posthuma. Glasguae.
man auch Anwendungen auf die Geometrie

ie Lehre von den Verhältniſſen überhaupt ſ. m.
nengießer Verſuch einer allgemeinen Theo-
hältniſſe. Mit einer Vorrede von E. G. Fi-
rlin. 1811. 4.

Verneinte Größen, gleichbedeutend mit egative Größen; ſ. entgegengeſetzte Größen.

Verſchwindungsquotient, ſ. Thl. I. §. 821.

Verſetzungen (Permutationes) gegebener Dinge oder Elemente nennt man alle verſchiedenen Stellungen, welche ſie unter und gegen einander annehmen können, wobei ihre Anzahl nicht verändert wird. Den Inbegriff der Verſetzungen der Elemente a, b, c, d, ... bezeichnet Hindenburg durch P(a, b, c, d, ...), und, wenn die Elemente reſpective α, β, γ, δ, ... Mal wiederholt vorkommen, durch $P(a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} d^{\delta} \ldots)$. Die Anzahl aller möglichen Verſetzungen heißt die Verſetzungs- oder Permutationszahl, und wird für ein, zwei, drei, vier, u. ſ. f. m Elemente nach Hindenburg durch a, b, c, d, ... m, bezeichnet.

1. Hat man zunächſt m verſchiedene Elemente a, b, c, ... m, und bezeichnet den Inbegriff der Verſetzungen dieſer Elemente ohne a, ohne b, ohne c, u. ſ. f., durch $\overset{a}{P}$, $\overset{b}{P}$, $\overset{c}{P}$, u. ſ. f.; ſo erhellet leicht die Richtigkeit folgender Formel:

$$P(a, b, c, \ldots m) = a\overset{a}{P} + b\overset{b}{P} + c\overset{c}{P} + \ldots + m\overset{m}{P}.$$

In dem Aggregat auf der rechten Seite kommen nämlich offenbar alle Permutationen der gegebenen Elemente vor, weil, wenn eine mit dem Anfangselement k fehlte, auch in $k\overset{k}{P}$, alſo auch in P eine fehlen müßte, und ein ganz ähnlicher Schluß zeigt, daß auch keine Permutation in dem genannten Aggregat zwei Mal vorkommen kann, in demſelben alſo P (a, b, c, ... m) richtig entwickelt iſt.

2. Die Verſetzungszahl ergiebt ſich hieraus unmittelbar. Bezeichnen wir nämlich die Verſetzungszahlen für n—3, m—2, m—1 Elemente durch i, k, l; ſo folgt aus der Formel in (1.) ſogleich:

$$m = \underset{(1}{l} + \underset{(2)}{l} + \underset{(3)}{l} + \ldots + \underset{(m)}{l},$$

l = m (m — 1) k = m (m — 1)(m — 2)i,
r gehend, m = m (m — 1)(m — 2)....2.a
r a = 1. Alſo

m = 1.2.3 ..... m .

eine mäßige Anzahl von Elementen wird die
nszahl ſchon ſehr groß. Eine Tiſchgeſellſchaft
rſonen kann ihre Plätze 1. 2. 3 ... 10 =
al wechſeln. In Récreations mathémati-
zanam. Paris. 1696. p. 45. ſind die Ver-
n bis zur 25ſten, welche aus 26 Ziffern be-
hanasii Kircheri Ars magna sciendi.
9. p. 157. bis zur 50ſten berechnet.

men aber unter den gegeben m Elementen α
einander gleich, z. B. = a ſind; ſo ſind of-
die Permutationen identiſch, in welchen die
nente, außer a, einerlei Stellen einnehmen.
ſich nun irgend eine Permutation; ſo kommen
iele Permutationen, in denen b, c, d, ...
ellen einnehmen, vor, als ſich die α Elemente
ſind, unter einander verſetzen laſſen, d. i. (2.)

5. Da für die Elementenreihe $a^\alpha b^\beta \ldots p^\varkappa q r s \ldots$ die Permutationszahl

$$\frac{1.2.3 \ldots m}{1.2.3 \ldots \alpha . 1.2.3 \ldots \beta \ldots 1.2.3 \ldots \varkappa}$$

ihrer Natur nach eine ganze Zahl ist; so folgt hieraus der arithmetische Satz, daß, wofern nur $\alpha + \beta + \ldots + \varkappa$ nicht $> m$ ist, das Product $1.2.3 \ldots m$ immer durch $1.2.3 \ldots \alpha . 1.2.3 \ldots \beta \ldots 1.2.3 \ldots \varkappa$ theilbar ist.

6. Man setze die Permutationszahl $= \frac{p}{q} = r$, wo r eine ganze Zahl. Ist nun m eine Primzahl, nnd nicht alle Elemente gleich; so sind alle Factoren des Menners $< m$. Also geht m in q nicht auf (Zahl. I. 4.). Da nun aber m offenbar in $p = qr$ aufgeht; so muß m in r aufgehen (Zahl. I. 5.). Ist also die Anzahl m der gegebenen Elemente eine Primzahl; so geht m immer in der Permutationszahl auf, wenn nur nicht alle Elemente unter einander gleich sind. (Gauss Disq. arithm. Lips. 1801. p. 34.)

7. Der binomische Lehrsatz für positive ganze Exponenten läßt sich leicht aus der Formel für die Versetzungszahl ableiten. Am Meisten kommen diese Zahlen bei der Entwickelung der Potenzen der Polynomien und der Reversion der Reihen vor.

8. Es sind nun noch Regeln zur wirklichen Aufstellung aller möglichen Permutationen gegebener Elemente nöthig. Da (1.)

$$P(a, b, c, .. m) = {}_a aP + {}_b bP + {}_c cP + .. + {}_m mP$$
$$= {}_m mP + {}_l lP + {}_k kP + .. + {}_a aP$$

ist; so erhält man, diese Formel nur in Worte übersetzend, aus den Permutationen für $m - 1$ Elemente die für m Elemente auf folgende Art. Man schreibe die Permutationen der $m - 1$ Elemente a, b, c, .. l hin, und füge ihnen allen m bei; so erhält man ${}_m mP$. Vertauscht man nun m mit l, dann l mit k, u. s. f.; so erhält man ${}_l lP$, ${}_k kP$, u. s. f., also zusammen P (a, b, c, ... m). So leitet man aus den Permutationen für ein Element die für

dieſen wieder die für drei Elemente ab, u. ſ. f.
gebenen Anzahl von Elementen.

er auch z. B. in Bezug auf vier Elemente,

$= d,$

$) = {}_{c}P + {}_{d}P,$

$, d) = {}_{b}P + {}_{c}P + {}_{d}P,$

$, c, d) = {}_{a}P + {}_{b}P + {}_{c}P + {}_{d}P$

man auch zuerſt d hinſchreiben, dieſem c ver-
dann c mit d vertauſchen, allen dieſen hierauf
b mit c, und dann c mit d vertauſchen, die-
orſetzen, und a mit b, b mit c, c mit d ver-

t man nun die Permutationen für ein, zwei,
f. Elemente in Haken ein, und fängt bei der
, welches offenbar verſtattet iſt, ſowohl von
hinten an; ſo erhält man folgende drei Dar-
r Permutationen für vier Elemente nach den
Regeln:

Alle diese Darstellungen sind involutorisch, die beiden letzten zugleich lexicographisch.

9. Aus der Natur der lexicographischen Anordnung folgt unmittelbar, daß man aus jeder einzelnen Permutation die nächst höhern ableitet, wenn man von der rechten nach der linken Hand zu das erste Element sucht, welches als ein niedrigeres vor einem höhern vorausgeht, dieses mit dem nächst höhern Element rechts vertauscht, und es selbst mit den übrigen Elementen zur rechten Hand in lexicographischer Ordnung folgen läßt, indem die Elemente links völlig ungeändert bleiben. Diese Ableitung der Permutationen aus einander ist besonders in dem Falle anwendbar, wenn identische Elemente vorkommen. Die Permutation, in welcher kein Element mehr als ein niedrigeres vor einem höhern vorausgeht, ist die letzte. Für aabbc sind hiernach die Permutationen:

aabbc
aabcb
aacbb
ababc
abacb
abbac
abbca
abcab
abcba
acabb
acbab
acbba
baabc
baacb
babac
babca
bacab
bacba
bbaac
bbaca
bbcaa
bcaab
bcaba
bcbaa
caabb
cabab
cabba
cbaab
cbaba
cbbaa

10. Der Nutzen dieser Regeln in der Analysis ist sehr eingeschränkt. Anwendung finden sie bei der Bildung von

n, d. i. der Verſetzungen der Buchſtaben eines
er der Worte eines Satzes, ſo daß die Ver-
r einen Sinn giebt, welches aber keine mathe-
endung iſt. Das Wort Roma giebt die Ana-
amo, oram, mora, maro, armo, amor.
des berühmten Calvinus giebt Alcuinus,
elbſt auf dem Titel ſeiner Inſtitutionen nennt.
a française giebt: un Corse la finira, und
bekannte Vers
i sunt dotes, Virgo quod sidera coelo,
Verſetzung der andächtige Jeſuit Bauhuſius
Jungfrau Maria ſich viel beſchäftigt hat, giebt
amme, die wieder einen Hexameter geben, wor-
überhaupt über dergleichen Spielereien, mit
Jac. Bernoulli Ars conjectandi. p. 77.
ſehen iſt. Ueber eine lächerliche Anwendung
ngen der Geſichtstheile auf die Verſchiedenheit
r in J. V. Merbitzii de varietate faciei
ract. phys. Dresd. 1676. ſ. Käſtners Anal.
. 38.
e beſonders wichtige Anwendung finden die Ver-

12. Die Anzahl der Permutationen in jeder einzelnen Ordnung findet man offenbar, wenn man unter den gegebenen Elementen eins von denen, mit welcher die Ordnung anfängt, wegläßt, und für die übrigen die Versetzungszahl sucht. Für $a^4\ b^3\ c^2$ ist die Anzahl der Permutationen von der Ordnung a $=$ num Perm $(a^3\ b^3\ c^2) = 560$, von der Ordnung b $=$ num Perm $(a^4\ b^2\ c^2) = 420$, von der Ordnung c $=$ num Perm $(a^4\ b^3\ c) = 280$.

Versetzungszahl, Permutationszahl, s. Versetzungen.

Vertauschung der unabhängigen veränderlichen Größe, s. Veränderung der unabhängigen veränderlichen Größe.

Vertex, s. Scheitelpunkt.

Verticalwinkel, s. Winkel.

Verwandlung, einer Größe oder eines Ausdrucks ist überhaupt die zu irgend einem Zweck dienliche Veränderung der Form oder Gestalt derselben, ohne daß dadurch der Werth geändert wird. Ueber die Verwandlung der Figuren, Functionen, Gleichungen, Proportionen s. die entsprechenden Artikel. Bey der Verwandlung der Coordinaten wird bloß die Lage der Axen, auf welche die krumme Linie oder Fläche durch Abscissen und Ordinaten bezogen ist, geändert. Die nöthige Anleitung hierzu ertheilt der Artikel Coordinate.

Verwechslung bei Proportionen, (Alternatio) heißt die Vertauschung der Mittelglieder mit einander, welche offenbar nur dann zulässig ist, wenn alle vier Glieder gleichartig sind. (Verhältniß. 26.).

Verwechslung der unabhängigen veränderlichen Größe, s. Veränderung der unabhängigen veränderlichen Größe.

ck oder Polygon heißt jede von einer belie-
gerader Linien, welche seine Seiten genannt
geschlossene ebene Figur. Die Gesammtheit
heißt der Umfang, die Durchschnittspunkte
heißen Spitzen. Jede gerade Linie, welche
und derselben Seite angehörende Spitzen mit
bindet, heißt Diagonale. Die von den
deten innern Winkel nennt man Vielecks-
gonwinkel. Werden die Seiten über die
usverlängert; so erhält man die Außenwin-
ielecks, die aber, wenn die entsprechenden
kel einspringende oder convexe Winkel sind,
s Polygons liegen, und daher in diesem Falle
betrachtet werden sollen. Nach der Anzahl der
t man die Vielecke in Dreiecke, Vierecke,
u. s. f. Sphärische Vielecke, von
es Trigonometrie. (92.) beigebracht worden,
der Oberfläche einer Kugel von Bogen größter
schlossen. Polygones gauches nennen
Schriftsteller solche Vielecke, deren Seiten

seyen Σ und Σ'. Sind nun A, B, C (Fig. 102.) drei auf einander folgende Spitzen irgend eines necks; so wird, wenn man AC zieht, ein Dreieck ABC bestimmt, welches außerhalb oder innerhalb des gegebenen necks fällt, jenachdem der Polygonwinkel bei B concav oder convex ist. Da nun in jedem Dreieck die Winkelsumme $= 2$ ist; so ist, wenn B concav ist, $\Sigma = \Sigma' + 2$, wenn B convex ist aber $\Sigma = \Sigma' - (\alpha + \beta) + 4 - \gamma = \Sigma' - (2 - \gamma) + (4 - \gamma) = \Sigma' + 2$, wie vorher. Folglich bilden für $n = 3, 4, 5, 6, \ldots$ die Winkelsummen die Progression $2, 4, 6, 8, \ldots$, deren $(n-2)$tes Glied, d. i. die Winkelsumme jedes necks, $= 2(n-2) = 2n-4$ ist, immer den rechten Winkel als Einheit angenommen.

4. Hat nun ein neck m concave, m' convexe Winkel, und setzen wir die Summe jener $= S$, dieser $= S'$, die Summen der entsprechenden äußern Winkeln aber $= s$ und $= s'$; so ist offenbar $S + s = 2m$, $S' - s' = 2m'$. Also $S + S' + s - s' = 2(m + m') = 2n$. Aber $S + S' = 2n - 4$ (3). Also $2n - 4 + s - s' = 2n$, $s - s' = 4$. Folglich ist, da die, convexen Polygonwinkeln entsprechenden, Außenwinkel als negativ betrachtet werden, die algebraische Summe aller Außenwinkel eines jeden Vielecks $= 4$. Hat das Vieleck keinen convexen Winkel; so ist $s' = 0$, $s = 4$.

5. Ein neck kann höchstens $n - 3$ convexe Winkel haben, weil, wenn es $n - 2$ hätte, da jeder convexe Winkel > 2 ist, die Summe aller convexen Winkel schon $> 2n - 4$ wäre, da doch die Summe aller Winkel überhaupt immer nur $= 2n - 4$ ist (3.).

6. Ein Vieleck sei durch Diagonalen in Dreiecke getheilt, deren Anzahl $= \Delta$ sei. Die Summe aller Winkel dieser Dreiecke ist $= 2\Delta$, und der Summe aller Winkel des Vielecks offenbar gleich. Also $2\Delta = 2n - 4$ (3.), $\Delta = n - 2$, so daß also die Anzahl der Dreiecke, in welche ein Vieleck durch Diagonalen getheilt werden kann, immer um 2 kleiner ist, als die Anzahl der Seiten. Die Anzahl der Seiten aller dieser Dreiecke ist $= 3(n-2)$,

e Diagonale augenſcheinlich doppelt gerech
wir alſo die Anzahl der Diagonalen, du
olygon in Dreiecke getheilt werden kann, =
$-2) = n + 2\delta$, woraus $\delta = n-3$, d
er Diagonalen, welche ein Polygon in Drei
immer um 3 kleiner als die Anzahl der Seit

habe jetzt einmal ein beliebiges aus a Dr
Vierecken, c Fünfecken, u. ſ. f. beſtehen
in einer Ebene. Die Anzahl der Verb
ſei = K, die Anzahl der Punkte, in welc
ſammenſtoßen, = E, die Anzahl der ein
= S. Die Anzahl der im äußern Umfan
liegenden Linien und Punkte ſei = $\mathfrak{K}$, =
nzahl der innern Linien und Punkte =
iſt offenbar $K = \mathfrak{K} + K'$, $E = \mathfrak{E} +$
nd auch $S = a + b + c + d + \ldots$. Rech
nie im äußern Umfang ein, jede innere z
iſt offenbar $3a + 4b + 5c + 6d + \ldots =$
$= K + K'$, $2a + 3b + 4c + 5d + \ldots$
$' - S$. Die Summe der innern Winkel a

8. Die n Seiten und n Winkel eines Vielecks sollen Stücke desselben heißen. Man kann fragen, wie viele eser Stücke zur Bestimmung des Vielecks nöthig sind. ie Elemente der Geometrie und Trigonometrie lehren, ß zur Bestimmung eines Dreiecks immer 3 Stücke erderlich sind. Sey nun ein neck gegeben, und durch ne Diagonale ein Dreieck abgeschnitten, so daß ein n — 1) eck übrig bleibt. Die Anzahl der nöthigen Bemmungsstücke dieses (n — 1) ecks sey = b′, die des ecks = b. Sind also b′ Stücke des (n — 1) ecks gegen; so ist dadurch die gezogene Diagonale bestimmt, d. i. ne Seite des abgeschnittenen Dreiecks, zu dessen Bemmung, folglich auch zur Bestimmung des ecks, demch nur noch 2 Stücke gegeben zu seyn brauchen. Folgh ist b = b′ + 2, und die Anzahl der nöthigen Beimmungsstücke für das Dreieck, Viereck, Fünfeck, .. neck, also 3, 5, 7, ..., 2n — 3. Es erhellet er leicht, daß unter diesen 2n — 3 nöthigen Bestimungsstücken immer nothwendig wenigstens n — 2 Seiten yn müssen, weil, wenn nur n — 3 Seiten gegeben ären, noch n Winkel gegeben seyn müßten. Da aber rch n — 1 Winkel der nte schon an sich bestimmt wird, dem die Summe aller = 2n — 4 (3.); so wären in r That nur 2n — 4 von einander unabhängige Stücke geben, da doch die Anzahl derselben 2n — 3 seyn muß. lso müssen 2n — 3 Stücke, unter denen wenigstens — 2 Seiten vorkommen, gegeben seyn. Damit ist rigens nicht gesagt, daß durch jede 2n — 3 Stücke, ter denen wenigstens n — 2 Seiten vorkommen, ein ieleck völlig bestimmt wird, indem ja, wie die Trigoometrie (S. diesen Art. 15.) lehrt, schon bei Dreiecken älle vorkommen, wo durch drei Stücke mit wenigstens ner Seite das Dreieck nicht völlig bestimmt wird. Eine llständige Aufzählung aller Fälle bei Polygonen, worin gleich die Bedingungen der Congruenz enthalten seyn ürden, gestattet hier der Raum nicht, da die Unterchung an sich ganz elementar, und keinen Schwierigkein unterworfen ist. M. v. Crelles Geometrie.

5. ff., auch Polygonometrie im Art. Trigo-
V. Ueber die Anzahl der nöthigen Beſtim-
bei Figurennetzen ſ. einen Aufſatz von Oli-
elles Journal d. Math. Thl. I. H. 3.

Vergleichung der Vielecke.

Vielecke können in dreifacher Rückſicht mit
reinſtimmen, und in eben dieſen Beziehungen
verglichen werden. Uebereinſtimmung rück-
Größe heißt Gleichheit; Vielecke, die in
re Form mit einander übereinſtimmen, heißen
Vielecke; Uebereinſtimmung rückſichtlich der
Größe heißt Congruenz. Die hierher ge-
terſuchungen werden als völlig elementar, und
s ſelbſt in den Elementen des Euclides ent-
füglich übergangen, um für ſchwierigere Un-
den Raum zu ſparen. In Bezug auf die
r Aehnlichkeit der Vielecke, ſo wie ihre Ver-
nd Theilung ſ. m. den Art. Figur. Thl. II.

terſuchung auf Vielecke in einer Ebene zu beſchränken, ſo mehr, da ſie ſich leicht auch auf den Raum über- ipt ausdehnen laſſen wird, wenn ſie für den ſpeciellern l richtig aufgefaßt worden. Carnot hat den Punkt mittlern Entfernungen in die Geometrie eingeführt,) in ſeiner Géométrie de position viele merkwürdige jenſchaften deſſelben bewieſen. Uebrigens lehrt die Me- nik, daß dieſer Punkt mit dem Schwerpunkte mehrerer chen Maſſen in den Spitzen des Vielecks einerlei iſt.

11. Zuvörderſt iſt zu zeigen, daß es für jedes Vieleck en Punkt der mittlern Entfernungen giebt. Nimmt n nämlich zwei willkührliche auf einander ſenkrechte Axen und bezeichnet die Coordinaten der Spitzen des Viel- s durch $x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3;$ u. ſ. f.; ſo iſt, an die Seitenzahl $= n$ iſt, der Punkt, deſſen Coor- aten

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots}{n},$$

$$y = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + \ldots\ldots}{n},$$

), der Punkt der mittleren Entfernungen. Um dies zu peiſen iſt zu zeigen, daß dieſe Gleichungen, oder wenig- ns die Ordinatengleichung, für jede zwei andere Axen n ſo ſtatt finden. Sind dieſe Axen zuerſt den primiti- n parallel, die Coordinaten ihres Durchſchnittspunktes Bezug auf die primitiven Axen a, b; ſo iſt, wenn die ten Coordinaten durch Indices von den primitiven unter- eden werden, offenbar

$$x' = x - a,\ x'_1 = x_1 - a,\ x'_2 = x_2 - a, \ldots\ldots;$$
$$y' = y - b,\ y'_1 = y_1 - b,\ y'_2 = y_2 - b, \ldots\ldots;$$

nn nur a, b immer mit den gehörigen Zeichen genom- n werden. Nach der Vorausſetzung iſt aber

$$x - a = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots}{n} - a,$$

$$y - b = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + \ldots\ldots}{n} - b;$$

$$x - a = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots - na}{n},$$

$$y - b = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + \ldots\ldots - nb}{n};$$

$$= \frac{(x_1 - a) + (x_2 - a) + (x_3 - a) + \ldots}{n},$$

$$= \frac{(y_1 - b) + (y_2 - b) + (y_3 - b) + \ldots}{n};$$

$$= \frac{x'_1 + x'_2 + x'_3 + \ldots}{n},$$

$$= \frac{y'_1 + y'_2 + y'_3 + \ldots}{n};$$

unſere Gleichungen auch für das neue, dem pri- rallele, Syſtem gelten. Auch ſind ſie für jede auf den primitiven ſenkrechte Axen richtig, weil bar x und y vertauſchen kann. Iſt nun aber ir- nderes Syſtem gegeben; ſo kann man ſich, weil un- ungen für alle parallelen Syſteme gelten, wenn s gelten, deſſen Axen durch den Anfang des pri- Syſtems gehend denken. Auch laſſen ſich, wie die Augen fällt, dieſe beiden Syſteme in immer Lage jederzeit ſo weit fortrücken, daß das gege- ck ganz zwiſchen die Schenkel des Winkels x'Ay .) fällt, und man alſo, ohne der Allgemeinheit , nur die beiden in der Figur dargeſtellten Fälle,

$$y\cos\alpha = \frac{y_1\cos\alpha + y_2\cos\alpha + y_3\cos\alpha + \dots}{n},$$

$$x\sin\alpha = \frac{x_1\sin\alpha + x_2\sin\alpha + x_3\sin\alpha + \dots}{n};$$

$$\sin\alpha + x\cos\alpha = \frac{(y_1\sin\alpha + x_1\cos\alpha) + (y_2\sin\alpha + x_2\cos\alpha) + \dots}{n},$$

$$\cos\alpha - x\sin\alpha = \frac{(y_1\cos\alpha - x_1\sin\alpha) + (y_2\cos\alpha - x_2\sin\alpha) + \dots}{n};$$

i. nach dem ſo eben Bewieſenen:

$$x' = \frac{x'_1 + x'_2 + x'_3 + \dots}{n},$$

$$y' = \frac{y'_1 + y'_2 + y'_3 + \dots}{n}.$$

Die beiden Ausdrücke für x, y gelten alſo für jedes ſyſtem, und der durch dieſe Coordinaten beſtimmte Punkt alſo der Punkt der mittlern Entfernungen des Vielks. (10.)

12. Legt man durch den Punkt der mittlern Entfernungen irgend eine gerade Linie als Axe der y; ſo iſt $y = 0$, ıd folglich auch

$$y_1 + y_2 + y_3 + \dots = 0,$$

h. die Summe der Entfernungen aller Spitzen des Vielks von jeder durch den Punkt der mittlern Entfernunen gehende gerade Linie $= 0$. Eine ſolche Linie heißt ne Axe der mittlern Entfernungen. Umgekehrt hen alle Axen, für welche

$$y_1 + y_2 + y_3 + \dots = 0$$

E, durch einen Punkt, nämlich durch den Punkt der ittlern Entfernungen. Denn man erhält denſelben (11) rch die Coordinaten

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots}{n},$$

$$y = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + \dots}{n}.$$

t nun $y_1 + y_2 + y_3 + \dots = 0$; ſo iſt auch $y = 0$, d der Punkt der mittlern Entfernungen muß alſo in der e liegen, auf welcher die y ſenkrecht ſind, d. i. in der ebenen.

urch eine ganz einfache geometriſche Betrachtung
genblicklich, daß im Dreieck für jede von einer
h der Mitte der Gegenſeite gezogene gerade Li-
e $y_1 + y_2 + \ldots = 0$ iſt. Daher ſind dieſe
n Linien Axen der mittlern Entfernungen (12.),
den ſich in einem Punkte (Dreieck. 16.),
dem Punkte der mittlern Entfernungen des

o leicht erhellet, daß der Punkt der mittlern Ent-
eines Parallelogramms der Durchſchnittspunct
n Diagonalen iſt.

ieht man vom Punkte der mittlern Entfernun-
llen Spitzen des Vielecks gerade Linien $z_1, z_2,$
und bezeichnet die Winkel, welche dieſe Linien
einer durch den Punkt der mittlern Entfernun-
nen geraden Linie, die man als Axe, den Punkt
n Entfernungen als Anfang der x annehmen
chließen, dieſe Winkel immer nach einer Seite
bis 360° gezählt, durch $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$;

ie Perpendikel $y_1, y_2, y_3, \ldots$ von ihren Spitzen ge-
illt sind. Nimmt man nun auf das Vorzeichen des a
nd der x gehörig Rücksicht; so folgt aus Elem. II. 12.
3. und dann ferner mittelst (14.) sogleich, daß immer

$$z'_1{}^2 = z_1^2 + a^2 - 2ax_1 = z_1^2 + a^2 - 2az_1 \cos\alpha_1 ,$$
$$z'_2{}^2 = z_2^2 + a^2 - 2ax_2 = z_2^2 + a^2 - 2az_2 \cos\alpha_2 ,$$
$$z'_3{}^2 = z_3^2 + a_2 - 2ax_3 = z_3^2 + a^2 - 2az_3 \cos\alpha_3 ,$$

u. s. f. u. s. f.

olglich durch Addition (14.):

$$z'_1{}^2 + z'_2{}^2 + z'_3{}^2 + \ldots = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + \ldots + na^2$$

. h. die Summe der Quadrate der Entfernungen irgend
ines Punktes in der Ebene eines ecks von dessen n Win-
elspitzen ist immer der Summe der Quadrate der Ent-
ernungen des Punktes der mittlern Entfernungen von
en n Winkelspitzen nebst dem nfachen Quadrate der Ent-
ernung des erstern Punktes von dem Punkte der mittlern
Entfernungen gleich. Mittelst (13.) ergeben sich hieraus
icht specielle merkwürdige Sätze für Dreieck und Pa-
allelogramm.

16. Eine unmittelbare Folge hieraus ist, daß die
Entfernungen des Punktes der mittlern Entfernungen
on des Vielecks Spitzen die kleinste Quadratensumme
eben.

17. Beschreibt man aus dem Punkte der mittlern Ent-
ernungen mit willkührlichem Radius r einen Kreis; so ist
ür jeden Punkt der Peripherie dieses Kreises die Summe
er Quadrate seiner Entfernungen von den Spitzen des
Vielecks eine constante Größe, nämlich

$$= z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + \ldots + nr^2 \quad (15.) .$$

18. Setzt man letztere Größe $= q^2$; so erhält man

$$r = \sqrt{\frac{q^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 - \ldots}{n}} .$$

Die Peripherie des aus dem Punkte der mittlern Entfer-
ungen mit diesem Radius beschriebenen Kreises ist also
er geometrische Ort der Punkte, für welche die Summe
er Quadrate der Entfernungen von den Spitzen des Viel-
ks eine constante Größe, nämlich $= q^2$ ist, wie schon

us bewelſet. Apollonius ebene Oerter, ſtellt von R. Simſon, überſ. von Camerer. 06. S. 263 — 310. Ein ähnlicher Satz läßt ; analoge Art von der Kugel beweiſen. M. ſ. Lehrbuch der Statik. Halle. 1826. S. 624.

on jeder der n Spitzen ziehe man jetzt an n Spitzen gerade Linien $\overset{1}{z}_1, \overset{1}{z}_2, \overset{1}{z}_3, \ldots$; $\ldots$; $\overset{3}{z}_1, \overset{3}{z}_2, \overset{3}{z}_3, \ldots$; $\ldots$ $\overset{n}{z}_1, \overset{n}{z}_2, \overset{n}{z}_3, \ldots$, von dem Punkte der mittlern Entfernungen an en gezogenen geraden Linien durch $\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a}, \ldots$,

$$(\overset{1}{a})^2 + (\overset{2}{a})^2 + (\overset{3}{a})^2 + \ldots = S;$$

(15.):

$$(\overset{1}{z}_2)^2 + (\overset{1}{z}_3)^2 + \ldots = S + n(\overset{1}{a})^2,$$

$$(\overset{2}{z}_2)^2 + (\overset{2}{z}_3)^2 + \ldots = S + n(\overset{2}{a})_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(\overset{n}{z}_2)^2 + (\overset{n}{z}_3)^2 + \ldots = S + n(\overset{n}{a})^2.$$

20. Im Parallelogramm ABCD (Fig. 104.) ist (13. 19.) $AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 + AC^2 + BD^2 = 4(AE^2 + CE^2 + BE^2 + DE^2) = 2(4AE^2 + 4BE^2) = 2(AC^2 + BD^2)$, $AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2$, die Summe der Quadrate der vier Seiten der Summe der Quadrate der beiden Diagonalen gleich.

21. Ist Σ' die Summe der Quadrate der Entfernungen irgend einer Spitze A des Vielecks von allen übrigen, und K der Punkt der mittlern Entfernungen; so ist, wenn S, Σ ihre vorige (19.) Bedeutung behalten:

$$\Sigma = nS \text{ (19.)}, \quad \Sigma' = S + n.AK^2 \text{ (15.)};$$

woraus durch Elimination von S:

$$AK = \frac{1}{n}\sqrt{(n\Sigma' - \Sigma)},$$

mittelst welcher Formel die Entfernung jeder Spitze von dem Punkte der mittlern Entfernungen berechnet werden kann.

22. Die Mittelpunkte der die n Spitzen je zwei verbindenden geraden Linien haben mit den Spitzen einerlei Punkt der mittlern Entfernungen. Die Coordinaten der Mittelpunkte jener Linien sind nämlich offenbar:

$$\begin{array}{llll}
\frac{1}{2}(x_1 + x_2), & \frac{1}{2}(x_2 + x_1), & \frac{1}{2}(x_3 + x_1), & \ldots; \\
\frac{1}{2}(x_1 + x_3), & \frac{1}{2}(x_2 + x_3), & \frac{1}{2}(x_3 + x_2), & \ldots; \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \\
\frac{1}{2}(x_1 + x_n), & \frac{1}{2}(x_2 + x_n), & \frac{1}{2}(x_3 + x^n), & \ldots; \\
\frac{1}{2}(y_1 + y_2), & \frac{1}{2}(y_2 + y_1), & \frac{1}{2}(y_3 + y_1), & \ldots; \\
\frac{1}{2}(y_1 + y_3), & \frac{1}{2}(y_2 + y_3), & \frac{1}{2}(y_3 + y_2), & \ldots; \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \\
\frac{1}{2}(y_1 + y_n), & \frac{1}{2}(y_2 + y_n), & \frac{1}{2}(y_3 + y_n), & \ldots;
\end{array}$$

wobei wir aber jede verbindende Linie doppelt gerechnet haben, so daß jede Coordinate in dieser Darstellung offenbar $2(n-1)$mal vorkommt. Die Summen der Abscissen und Ordinaten der Mittelpunkte sind also

$$\frac{1}{2}(n-1)|x_1 + x_2 + x_3 \ldots|,$$
$$\frac{1}{2}(n-1)|y_1 + y_2 + y_3 \ldots|,$$

und folglich, da es überhaupt $\frac{1}{2}n(n-1)$ Verbindungslinien, also eben so viele Mittelpunkte derselben giebt, wenn die Coordinaten des Punktes der mittlern Entfer-

$$(n-1)(n-2)\Sigma = 8\Sigma',$$
$$n(n-1)(n-2)S = 8\Sigma',$$

raus ſich wieder merkwürdige Sätze ergeben

jedem Vierecke ABCD (Fig. 105.), welches rechtwinklig iſt, iſt, wenn wir den Winkel A ſetzen, immer $ABCD - 2 \cdot \Delta ABC = \sin 2A$. Sey $AB = b$, $AC = c$; ſo iſt

$$AD = b\sec\varphi = c\sec(A-\varphi),$$
$$b\cos(A-\varphi) = c\cos\varphi,$$
$$\tang\varphi = \frac{c - b\cos A}{b\sin A}.$$

enn man zugleich b, c vertauſcht:

$$BD = \frac{c - b\cos A}{\sin A},\quad CD = \frac{b - c\cos A}{\sin A};$$
$$AD^2 = \frac{b^2 + c^2 - 2bc\cos A}{\sin A^2}.$$

ſtitution der gefundenen Werthe für BD, CD nun leicht:

$$ABCD = \tfrac{1}{2}b \cdot BD + \tfrac{1}{2}c \cdot CD$$
$$= bc\sin A^2 - (b^2 + c^2 - 2bc\cos A)\cos A$$

wenn N die letzte Spitze des gegebenen Vielecks ist. Die Summe der Vierecke ist offenbar = I, die der Dreiecke = I'. Also

$$I - 2I' = -\tfrac{1}{4}\{K'A^2 \cdot \sin 2A + K'B^2 \cdot \sin 2B + K'C^2 \cdot \sin 2C + \ldots\}$$

und, wenn das Viereck gleichwinklich ist;

$$I - 2Y = -\tfrac{1}{4}\{K'A^2 + K'B^2 + K'C^2 + \ldots\}\sin 2A.$$

Soll nun, indem A und I constant bleiben, I' constant bleiben; so muß $K'A^2 + K'B^2 + K'C^2 + \ldots$ constant bleiben. Diese Quadratensumme bleibt aber (17.) constant, wenn K' in der Peripherie eines aus dem Punkte der mittlern Entfernungen des Vielecks beschriebenen Kreises liegt. Dies giebt folgenden Satz: Fället man aus irgend einem Punkte der Peripherie eines aus dem Punkte der mittlern Entfernungen eines gleichwinkligen Vielecks beschriebenen Kreises auf dessen Seiten Perpendikel, und verbindet deren Fußpunkte durch gerade Linien; so ist der Inhalt des dadurch entstehenden eingeschriebenen Vielecks eine constante Größe. Dieser Satz für regelmäßige Polygone ist von L'Huilier (Bibliothèque universelle. 1824. p. 169.) gefunden, von Sturm und von einem Ungenannten (Annales d. Math. T. XV. p. 250. p. 45.) bewiesen, und von Steiner (Crelles Journal. B. I. S. 51.) noch mehr erweitert.

IV. Punkte kleinster Entfernung.

27. Man habe irgend zwei Punkte M, M' in der Ebene eines Vielecks. Die durch M und M' gehende gerade Linie nehme man als Axe der x an, M sey der Anfang der Coordinaten, die Entfernungen der Spitzen von M sollen durch $r_1, r_2, r_3, \ldots$, ihre Entfernungen von M' durch $r'_1, r'_2, r'_3, \ldots$, die Coordinaten wie vorher, die Entfernung des Punktes M' von M durch k, bezeichnet werden; so ist (15.):

$$r'_1 = Y(r_1^2 + k^2 - 2kx_1) = r_1 Y(1 - c_1),$$
$$r'_2 = Y(r_2^2 + k^2 - 2kx_2) = r_2 Y(1 - c_2),$$
$$r'_3 = Y(r_3^2 + k^2 - 2kx_3) = r_3 Y(1 - c_3),$$

u. s. f. u. s. f.

$$= \frac{k(2x_1 - k)}{r_1^2}, \quad c_2 = \frac{k(2x_2 - k)}{r_2^2} \ldots\ldots$$

nan die Quadratwurzeln nach dem binomischen
nd ordnet nach Potenzen von k; so wird:

$$: r_1 - k\frac{x_1}{r_1} + k^2\left(1 - \frac{x_1^2}{r_1^2}\right)\cdot\frac{1}{2r_1} + \ldots,$$

$$: r_2 - k\frac{x_2}{r_2} + k^2\left(1 - \frac{x_2^2}{r_2^2}\right)\cdot\frac{1}{2r_2} + \ldots,$$

$$: r_3 - k\frac{x_3}{r_3} + k^2\left(1 - \frac{x_3^2}{r_3^2}\right)\cdot\frac{1}{2r_3} + \ldots,$$

u. s. f. u. s. f.

il

$$= x_1^2 + y_1^2, \; r_2^2 = x_2^2 + y_2^2, \ldots\ldots;$$

$$- \frac{x_1^2}{r_1^2} = \frac{y_1^2}{r_1^2}, \; 1 - \frac{x_2^2}{r_2^2} = \frac{y_2^2}{r_2^2}, \ldots\ldots$$

nan auf beiden Seiten addirt:

$$- k\left\{\frac{x_1}{r_1} + \frac{x_2}{r_2} + \frac{x_3}{r_3} + \ldots\right\}$$

$$- k^2\left\{\frac{1}{2r_1}\cdot\frac{y_1^2}{r_1^2} + \frac{1}{2r_2}\cdot\frac{y_2^2}{r_2^2} + \frac{1}{2r_3}\cdot\frac{y_3^2}{r_3^2} + \ldots\right\}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots$$

ichnung Σr ... $\Sigma r'$ leicht verständlich, kann wird

$$\frac{x_1}{r_1} + \frac{x_2}{r_2} + \frac{x_3}{r_3} + \ldots = 0$$

seyn. Das zweite Glied

$$k^2 \cdot \left\{ \frac{1}{2r_1} \cdot \frac{y_1^2}{r_1^2} + \frac{1}{2r_2} \cdot \frac{y_2^2}{r_2^2} + \frac{1}{2r_3} \cdot \frac{y_3^2}{r_3^2} + \ldots \right\}$$

ist offenbar immer positiv, und man kann wieder k^2 so klein nehmen, daß der absolute Werth jenes Gliedes die Summe aller folgenden übertrifft, so daß also, für kleine k, immer $\Sigma r' > \Sigma r$ ist. Folglich giebt es in der Ebene jedes Vielecks Punkte, für welche die Summe ihrer Entfernungen von den Spitzen des Vielecks kleiner ist als die Summe der Entfernungen aller in ihrer Nähe liegenden Punkte von diesen Spitzen. Jene Punkte nennt man Punkte kleinster Entfernung, und sie sind, da man offenbar auch x mit y vertauschen kann, der Bedingung unterworfen, daß

$$\frac{x_1}{r_1} + \frac{x_2}{r_2} + \frac{x_3}{r_3} + \ldots = 0,$$

$$\frac{y_1}{r_1} + \frac{y_2}{r_2} + \frac{y_3}{r_3} + \ldots = 0,$$

ist.

28. Man denke sich nun die Coordinatenaxen durch den Punkt kleinster Entfernung M gelegt, schneide von ihm an auf den von ihm nach den Spitzen gezogenen geraden Linien gleiche Stücke ϱ ab, und bezeichne die Coordinaten der Endpunkte A_1, A_2, A_3, ... dieser Stücke durch ξ_1, v_1; ξ_2, v_2; ξ_3, v_3; ....; so erhellet auch ohne Figur augenblicklich, daß

$$\frac{x_1}{r_1} = \frac{\xi_1}{\varrho}, \quad \frac{x_2}{r_2} = \frac{\xi_2}{\varrho}, \quad \frac{x_3}{r_3} = \frac{\xi_3}{\varrho}, \ldots;$$

$$\frac{y_1}{r_1} = \frac{v_1}{\varrho}, \quad \frac{y_2}{r_2} = \frac{v_2}{\varrho}, \quad \frac{y_3}{r_3} = \frac{v_3}{\varrho}, \ldots;$$

und folglich wegen der Bedingungsgleichungen (27.), wenn man zugleich mit ϱ multiplicirt:

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \ldots = 0,$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots = 0.$$

Dies sind aber die Bedingungsgleichungen für den Punkt der mittlern Entfernungen der Punkte A_1, A_2, A_3, ... Folglich ist jeder Punkt der kleinsten Entfernung eines Vielecks der Mittelpunkt der Entfernungen der Punkte,

erhält, wenn man auf den, von dem Punkte
fernung nach den Spitzen gezogenen geraden
ieſem Punkte aus willkührliche, aber gleiche,
neidet.

umgekehrt ein Punkt M in der Ebene eines
Punkt mittlerer Entfernungen der gleich weit
fernten Punkte A_1, A_2, A_3, ...; ſo iſt,
ch die Coordinatenaxen wieder durch M gelegt
die vorige Bezeichnung beibehält (12.);

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \ldots = 0,$$
$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots = 0,$$

vorher folgt, daß

$$\frac{x_1}{r_1} + \frac{x_2}{r_2} + \frac{x_3}{r_3} + \ldots = 0,$$
$$\frac{y_1}{r_1} + \frac{y_2}{r_2} + \frac{y_3}{r_3} + \ldots = 0,$$

Punkt kleinſter Entfernung des Vielecks, der
folglich auch umgekehrt richtig iſt.

ereck iſt alſo der Durchſchnittspunkt der Diago-
Punkt kleinſter Entfernung, weil, wenn man

Beſchaffenheit, daß die von ihm nach den Spitzen gezoge-
en geraden Linien gleiche Winkel (jeder $= \frac{4}{3}R$) einſchlie-
en, und nur einen. Wären alle drei Winkel eines
Dreiecks $< \frac{4}{3}R$; ſo wäre die Summe aller $< 2R$. Folg-
ch muß es wenigſtens einen geben, welcher $\geqq \frac{4}{3}R$. Die-
r Winkel ſey BAC (Fig. 106.). Ueber AB und AC be-
ſchreibe man zwei Kreisabſchnitte, deren jeder einen Win-
el $= \frac{4}{3}R$ faßt (Elem. III. 33.); ſo müſſen die Bogen
ieſer Segmente ſich nothwendig zwiſchen den Schenkeln
es Winkels BAC ſchneiden, weil dieſer Winkel $< \frac{4}{3}R$,
$\leqq \frac{4}{3}R$ iſt, und jede der beiden durch A an die Bogen gezo-
enen Berührenden mit AB und AC einen Winkel $= \frac{4}{3}R$
inſchließt, indem jeder dieſer beiden Winkel dem Winkel
n entgegengeſetzten Kreisabſchnitte gleich (Elem. III. 32.),
lſo die Ergänzung von $\frac{4}{3}R$ zu $2R$ (Elem. III. 22.),
. i. $= \frac{2}{3}R$ iſt. Da nun der Durchſchnittspunkt M der
eiden Bogen zwiſchen den Schenkeln von BAC liegt; ſo
uß M nothwendig innerhalb des Dreiecks liegen, weil der
er Spitze A zugekehrte Winkel BMC $= \frac{8}{3}R$ ein converer
Winkel iſt, welches nicht möglich wäre, wenn M außer-
alb des Dreiecks läge. Da nun AMB $=$ AMC $= \frac{4}{3}R$
t; ſo iſt auch BMC $= \frac{4}{3}R$, und folglich die drei von
AM, BM, CM eingeſchloſſenen Winkel einander gleich.
Da die beiden Bogen der Kreisabſchnitte, welche $\frac{4}{3}R$
aſſen, ſich nur in einem Punkte ſchneiden können; ſo
iebt es auch nur einen Punkt wie M.

32. Da es in jedem Dreieck, deſſen Winkel alle $< \frac{4}{3}R$
nd, innerhalb immer einen Punkt giebt, für welchen die von
ihm an die Spitzen gezogenen Linien gleiche Winkel einſchlie-
en; ſo giebt es für jedes ſolche Dreieck immer auch einen
Punkt kleinſter Entfernung innerhalb (30.). Auch giebt es
ur einen Punkt kleinſter Entfernung. Gäbe es nämlich
wei M, M′; ſo müßten wenigſtens zwei der von AM′,
BM′, CM′, gebildeten Winkel ungleich ſeyn, weil es nur
einen Punkt giebt, wo dieſe Winkel gleich ſind (31.).
Der Punkt M′ wäre aber der Punkt der mittlern Entfer-
ungen auf AM′, BM′, CM′ von M′ gleich weit entfern-
er Punkte (28.). Folglich müßten, wenn man die den

chen Winkel zugleich als Schenkel angehörende
AM′, BM′, CM′ als Axe annähme, die Or-
auf den beiden andern Linien gleichweit von
n Punkte einander gleich seyn (12.), welches
n der Ungleichheit der Winkel offenbar un-

nun ein Dreieck einen Winkel BAC (Fig. 107.),
R ist; so kann der Punkt kleinster Entfernung
alb liegen, weil sonst AMB = AMC =
also nothwendig MAB′ $< \frac{2}{3}$ R, MAC $< \frac{2}{3}$ R,
seyn müßte. In einer Seite des Dreiecks
r Punkt kleinster Entfernung überhaupt eben
gen, als außerhalb des Dreiecks, weil sich von
n Punkte nie nach den Spitzen drei, gleiche
einander einschließende, gerade Linien ziehen
es doch in vorliegendem Falle möglich seyn
). Daher muß der Punkt kleinster Entfer-
i Seiten zugleich, d. h. in einer Spitze des
gen. Da aber offenbar BA + BC > AB + AC,
> AB + AC ist; so muß der Punkt kleinster
in der Spitze C des stumpfen Winkels

Wir wollen annehmen, der Satz gelte für das 2neck. Hat man nun ein $(2n+2)$eck, so schneide man durch die Diagonale, welche die Winkelspitzen (1) und $(2n)$ mit einander verbindet, ein Viereck ab, so daß ein 2neck übrig bleibt. Die an der gezogenen Diagonale liegenden Winkel des 2ecks seyen $(1)'$, $(2n)'$, die des Vierecks $'(1)$, $'(2n)$; so hat man nach der Annahme, und nach dem Art. Viereck (9.)

$$(1)' + (3) + (5) + \ldots + (2n-1) = (2) + (4) + (6) + \ldots + (2n)',$$
$$'(1) + (2n+1) = '(2n) + (2n+2).$$

Woraus, da offenbar $(1)' + '(1) = (1)$, $(2n)' + '(2n) = (2n)$ ist, durch Addition sogleich folgt:

$$(1) + (3) + (5) + \ldots + (2n-1) + (2n+1) = (2) + (4) + (6) + \ldots + (2n) + (2n+2).$$

Der Satz gilt also für das $(2n+2)$eck, wenn er für das 2neck gilt. Er gilt aber für das Viereck, da für dieses immer $(1) + (3) = (2) + (4)$ (Viereck. 9.). Also ist er allgemein.

36. Hat man ein eingeschriebenes Vieleck von $2n-1$, d. i. einer ungeraden Anzahl von Seiten; so theile man durch einen nach irgend einer Spitze gezogenen Radius den Winkel an derselben in zwei Winkel, und bezeichne, diese beiden Winkel mit eingeschlossen, alle Winkel des Vielecks durch (1), (2), (3), $\ldots$ $(2n-1)$, $(2n)$; so hat man auch hier

$$(1) + (3) + \ldots + (2n-1) = (2) + (4) + \ldots + (2n).$$

Ist nämlich in Fig. 108. der Radius CA gezogen; so denke man sich durch A eine Tangente gezogen, und durch eine Diagonale, welche dem Winkel A gegenüber liegt, ein Dreieck abgeschnitten, so daß ein $(2n-2)$eck übrig bleibt. In diesem ist (35.):

$$(1)' + (3) + \ldots + (2n-3) = (2) + (4) + \ldots + (2n-2)'.$$

Aber (Elem. III. 32.) $\alpha = '(2n-2)$, $\beta = '(1)$, auch $\alpha + (2n) = 90^0$, $\beta + (2n-1) = 90^0$, d. i.

$$'(1) + (2n-1) = '(2n-2) + (2n).$$

Dies, zu obiger Gleichung addirt, giebt, da

$'(1) = (1)$, $(2n-2)' + '(2n-2) = (2n-2)$
beweiſende Gleichung.

Sätze ſind Erweiterungen des Satzes vom ein-
n Viereck.

ehr leicht überzeugt man ſich, daß in jedem
en Vieleck von gerader Seitenzahl, die Summe
ten, 5ten, ... Seite der Summe der 2ten,
, ... gleich iſt. In einem umſchriebenen
ungerader Seitenzahl dagegen iſt die Summe
4ten, 6ten, ..., und des erſten Theils der
, bis an ihren Berührungspunkt, gleich der
s zweiten Theils der 1ten Seite, von ihrem
punkte an, und der 3ten, 5ten, 7ten, ...
e Beweiſe beider Sätze folgen ſogleich aus dem
die beiden von einem Punkte außerhalb eines
denſelben gezogenen Berührenden einander

einen Kreis ſey ein Vieleck beſchrieben, und
eiſe ein concentriſcher Kreis verzeichnet. Zieht

$$= (r^2 + R^2)(a + b + c + d + \ldots) - 2rR(a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma + \ldots).$$

us (Fig. 109.) erhellet aber sogleich, daß die Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ den Winkeln gleich sind, welche die Seiten des Polygons mit einer durch O auf OP senkrecht gezogenen Linie OP′ einschließen, diese Winkel nach der Richtung der Seiten nach einer Seite hin ebenfalls von 0° bis 360° gezählt. Folglich ist (Trigonometrie. 176.)

$$b = a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma + \ldots,$$

so

$$AP^2.a + BP^2.b + CP^2.c + DP^2.d + \ldots = (r^2 + R^2)(a + b + c + d + \ldots),$$

ud folglich die Summe

$$AP^2.a + BP^2.b + CP^2.c + DP^2.d + \ldots$$

ne constante Größe, wo auch der Punkt P in der Peripherie des zweiten, mit dem eingeschriebenen concentrischen, Kreises liegen mag. Wird der Punkt in der Peripherie des eingeschriebenen Kreises selbst angenommen; so obige Summe

$$= 2r^2(a + b + c + d + \ldots).$$

Ueber in und um den Kreis beschriebene Vielecke, besonders auch über die schwierige Aufgabe, in einen Kreis n Vieleck zu beschreiben, dessen Seiten durch gegebene Punkte gehen, vergl. den Art. Kreis (115.). Eine erkwürdige Eigenschaft des eingeschriebenen Sechsecks auch im Art. Transversale (35. 36.).

VI. Reguläre Vielecke.

39. Vielecke deren Seiten und Winkel einander gleich nd, heißen reguläre oder regelmäßige Polygone. Die Elemente lehren, daß um und in jedes Polygon dieser Art ein Kreis beschrieben werden kann, oder daß jedes reguläre Polygon centrisch nach den Spitzen und Seiten ist. Der Halbmesser des um das Polygon beschriebenen Kreises heißt der große Radius oder auch bloß der Radius, der Halbmesser des in das Polygon beschriebenen Kreises der kleine Radius des Polygons, der gemeinschaftliche Mittelpunkt

des Centrum des Polygons, der von zwei
zwei kleinen Radien eingeschlossene Winkel der
nkel, ein Perpendikel von dem Mittelpunkte
ite heißt auch Apothema. Ist das Polygon
s neck; so ist der Centriwinkel $= \frac{4R}{n}$, der
Umfange $= \frac{2(n-2)R}{n}$ (3.). Der Polygon-
inkel machen immer zusammen $2R = 180°$.

rs wichtig ist die Beschreibung der regulären
und um den Kreis. Die Elemente lehren,
schreibung dann allemal möglich ist, wenn der
so viele gleiche Theile geometrisch theilen läßt,
eschreibende Polygon Seiten hat. Wir wer-
wir dies als hinlänglich bekannt voraussetzen,
diesen Gegenstand zurück kommen.

r Mittelpunkt eines regulären Polygons ist
Punkt der mittlern Entfernungen. Man
ervon auf folgende einfache Art überzeugen.
enzahl gerade; so nehme man den Durchmesser

In jedem regulären neck iſt die Summe der Quadrate r von irgend einem Punkte in ſeiner Ebene nach den pitzen gezogenen Linien gleich der nfachen Summe der uadrate des Radius des umſchriebenen Kreiſes und der n Mittelpunkt mit jenem Punkte verbindenden geraden nie (15.).

Einen allgemeinern Satz, von Lentheric bewieſen, in den Annales d. Math. T. XVI. p. 20.

Die Summe der Quadrate der Entfernungen eines unktes in der Peripherie irgend eines, mit einem regu- ren Polygon von n Seiten einerlei Mittelpunkt haben- n, Kreiſes von allen Spitzen des Polygons iſt gleich der fachen Summe des Quadrats des Halbmeſſers des gege- nen Kreiſes und des Quadrats des Halbmeſſers r des Po- gons, alſo eine conſtante Größe, wo man auch den unkt in der Peripherie annehmen mag (17.). Iſt der reis, in deſſen Peripherie der Punkt angenommen wird, m das Polygon beſchrieben; ſo iſt beſagte Quadraten- mme offenbar $= 2nr^2$. Theilt man alſo die Peripherie nes Kreiſes in n gleiche Theile, und zieht von irgend nem Punkte in der Peripherie nach allen Theilpunkten erade Linien; ſo iſt, wenn r der Radius des Kreiſes iſt, ie Summe der Quadrate dieſer Linien $= 2nr^2$, alſo ine conſtante Größe, wo man auch den Punkt in der Peripherie annehmen mag.

Die Summe der Quadrate aller Seiten und Diago- alen eines regulären ecks iſt dem mit n^2 multiplicirten Quadrate des Radius des umſchriebenen Kreiſes gleich 19.). Iſt a die Seite des regulären Dreiecks, r der Radius des umſchriebenen Kreiſes; ſo iſt $3a^2 = 9r^2$, $a = r\sqrt{3}$, $r = a:\sqrt{3}$.

Fällt man von irgend einem Punkte in der Peripherie nes mit einem regulären Polygon einerlei Mittelpunkt abenden Kreiſes auf die Seiten des Polygons Perpen- ikel, und verbindet deren Fußpunkte durch gerade Linien; o iſt der Inhalt des entſtehenden Vielecks eine conſtante Größe, wo auch der angenommene Punkt in der Peripherie des Kreiſes liegen mag (26.).

Vieleck.

nan von irgend einem Punkte in der Ebene eines
Vielecks, deſſen Seite = s ſey, auf alle Sei-
ndikel p, p′, p″, p‴, ..., wobei die vom
enen Punkte aus in das Polygon hinein ge-
rpendikel als negativ angeſehen werden ſollen;
n P der Inhalt des Polygons, offenbar

$$P = \tfrac{1}{2}(p + p' + p'' + p''' + \dots)s .$$

der Halbmeſſer des eingeſchriebenen Kreiſes, und
zahl = n; ſo iſt $P = \frac{1}{2} n \varrho s$. Alſo

$$p + p' + p'' + p''' + \dots = n\varrho ,$$

ſumme aller von irgend einem Punkte auf die
es regulären necks gefällten Perpendikel iſt dem
inen Radius gleich, alſo eine conſtante Größe.
(38.) das um den Kreis beſchriebene Polygon
ſ iſt a = b = c = ..., a + b + c + ...
enn n die Seitenzahl, wodurch ſich die dortige
n

$$P^2 + BP^2 + CP^2 + \dots = n(R^2 + r^2)$$

. Zieht man alſo von irgend einem Punkte in der
ines mit einem umſchriebenen regulären Polygon

lbiren läßt, ſo kann man obige Zahlen auch willkührlich
t verdoppeln und halbiren, wodurch man andere geo-
etriſche Theilungen erhält. Alles dieſes iſt aus den Ele-
enten bekannt. Maſcheroni macht in ſeiner Géome-
ie du compas (Ueberſ. v. Grüſon. Berlin. 1825.)
:ſe und andere Theilungen zur praktiſchen Anwendung
ſchickter, indem er, den Gebrauch des Lineals vermei-
nd, ſie bloß mit dem Zirkel auszuführen lehrt. Re-
ıldinus (De resolutione et compositione mathe-
atica. Lib. II. f. 367.) glaubte eine allgemeine Regel
r Beſchreibung jedes regulären Polygons in den Kreis
funden zu haben, deren Unrichtigkeit aber ſchon Wolf
Elementa Analyseos finitor. §. 292.) nachgewieſen
t, und in der That iſt ſeit Euclid die Theorie der Ein-
eilung des Kreiſes in gleiche Theile um keinen Schritt
eſentlich gefördert worden, bis im Jahre 1801 Gauß
ne ſeiner glänzendſten Entdeckungen bekannt machte.
r hat nämlich folgenden merkwürdigen Satz gefunden:
Wenn die Seitenzahl n eines regulären Polygons eine
rimzahl, und $n-1 = 2^{\alpha}\,3^{\beta}\,5^{\gamma}\,\ldots$ iſt; ſo läßt ſich
e Eintheilung des Kreiſes in n gleiche Theile immer auf
e Auflöſung von α Gleichungen des 2ten, β Gleichungen
s 3ten, γ Gleichungen des 5ten Grades u. ſ. f.
rückführen. Der Beweis dieſes Satzes beruht auf
ɔr feinen Unterſuchungen der höhern Arithmetik, und
ingt unmittelbar mit der Auflöſung einer gewiſſen merk-
ürdigen Klaſſe von Gleichungen zuſammen, kann aber
er, ohne zu große Weitläufigkeit nicht mitgetheilt
erden. Wir haben daher dieſe merkwürdige und wich-
ge Theorie in die Zuſätze zu dieſem Werke, in den
rtikel Gleichung, verwieſen, wo ſie ganz und im Zu-
mmenhange dargeſtellt werden ſoll. Der 7te Abſchnitt
De aequationibus circuli sectiones definientibus)
:r Disquisitiones arithmeticae (Lips. 1801.) des
:rühmten deutſchen Geometers giebt über dieſen Gegen-
and die vollſtändigſte und beſte Belehrung, hängt aber
nig mit dem Gegenſtande des ganzen Werkes zuſammen.
uch in Legendre Théorie des nombres. V. Partie.

480. iſt eine klare Darſtellung dieſer Unter-
egeben. Außerdem ſ. m. noch eine Abhand-
bel in Crelles Journal. IV. 2. 5. 131.
rſuchung zugleich noch erweitert iſt. Iſt alſo
2^α; ſo wird zu der Eintheilung des Kreiſes in
heile nur die Auflöſung von α quadratiſchen
erfordert, und ſolche Theilungen ſind alſo
ch die Elementargeometrie ausführbar, weil
tiſche Gleichung ſich bloß mittelſt der geraden
es Kreiſes conſtruiren läßt. Für $n = 17$,
$= 2^4$, iſt alſo die elementar-geometriſche
n möglich. Nach dieſen allgemeinen Bemerkun-
r nun zur Conſtruction der euclidiſchen regulären
und des regulären 17ecks in den Kreis über,
i aber vorzüglich uns des Calcus bedienen.

s der Seite $AB = a$ (Fig. 112.) eines ecks
ßt ſich immer die Seite $AD = a'$ des 2ecks
nden. Denn es iſt, den Radius $= 1$ geſetzt,
$+ DE^2 = \frac{1}{4}a^2 + (1 - \sqrt{(1 - \frac{1}{4}a^2)})^2$
$\sqrt{(1 - \frac{1}{4}a^2)}$. Alſo

multipliciren. Aber a' bezieht sich immer auf den us = 1.

5. Die Seite des umschriebenen ecks sey = b; (Fig. 113.) AF = ½b. Aber AF : AE = CE, ½b : ½a = 1 : $\sqrt{(1-\frac{1}{4}a^2)}$, woraus

$$b = \frac{2a}{\sqrt{(4-a^2)}}.$$

6. Ein von zwei Radien und einer Seite eines einiebenen regulären Polygons gebildetes gleichschenk. Dreieck wollen wir ein Bestimmungsdreieck n. Der Winkel an dessen Spitze ist der Centriwinder Winkel an der Grundlinie der halbe Polygonl des regulären Vielecks. Der Centriwinkel des reen Vierecks ist = 90°. Folglich die Seite = $\sqrt{2}$. (43.) die Seite des eingeschriebenen regulären Vier- Achtecks, Sechzehnecks, u. s. f.:

$\sqrt{2}$,
$\sqrt{(2-\sqrt{2})}$,
$\sqrt{(2-\sqrt{(2+\sqrt{2})})}$;
$\sqrt{(2-\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{2})})})}$,
$\sqrt{(2-\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{2})})})})}$,
u. s. f. u. s. f.

r den Radius = 1 gesetzt. Folglich sind (45.) die e des umgeschriebenen regulären Vierecks, Achtecks, zehnecks, u. s. f:

2,
$2\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}$,
$2\sqrt{\frac{2-\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{2+\sqrt{(2+\sqrt{2})}}}$,
$2\sqrt{\frac{2-\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{2})})}}{2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{2})})}}}$,
$2\sqrt{\frac{2-\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{2})})})}}{2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{2})})})}}}$,
u. s. f. u. s. f.

h verschiedene Reductionen kann man diesen Aus- en einfachere Gestalten geben. Das Gesetz ist aber nicht so einleuchtend. Für das Achteck erhält man . die Seite = $2(\sqrt{2}-1)$. Die Hälfte dieser

$\sqrt{2}-1$, nämlich = der Differenz zwiſchen
s eingeſchriebenen Vierecks und dem Radius.
gen dieſer Art würden ſich hier und im Folgen-
anſtellen laſſen. Da ſie ſich aber alle leicht er-
rden ſie der Kürze wegen größtentheils über-

r Centriwinkel des eingeſchriebenen regulären
$= 60^0$, und eben ſo groß der halbe Poly-
das Beſtimmungsdreieck demnach ein gleichſei-
glich die Seite des regulären Sechsecks dem
h, $= 1$, ſo daß ſich alſo der Radius genau
Peripherie herumtragen läßt, wodurch ſogleich
ung des regulären Sechsecks in den Kreis ge-
e Seite des eingeſchriebenen regulären Drei-
(44.) $= \sqrt{3}$, und folglich die Seiten des
nen regulären Dreiecks, Sechsecks, Zwölf-
.:

$\sqrt{3}$,
1,
$\sqrt{(2-\sqrt{3})}$,

r ausgedrückt, $= 2(2 - \sqrt{3})$, also das Doppelte Seite des eingeschriebenen regulären Zwölfecks.

Der Centriwinkel des regulären Zehnecks ist . Also der halbe Polygonwinkel $= 90^0 - 18^0$. Im Bestimmungsdreieck ist also der Winkel an ndlinie doppelt so groß als der Winkel an der Spitze. ABC (Fig. 114.) das Bestimmungsdreieck für das dessen Seite AB, und man halbirt den Winkel rch AD; so überzeugt man sich leicht, daß ADC, eichschenklige Triangel, also $CD = AD = AB$, Triangel ABC, ABD ähnlich sind, woraus $= AB:BD$, oder, für $AB = x$, $1:x = x:$ $x^2 = 1 - x$, $x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$. Nach (44.) ch hieraus leicht die Seite des eingeschriebenen re- Fünfecks $= \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$. Also hat man (43.) die es eingeschriebenen regulären Fünfecks, Zehnecks, ecks, u. s. f.:

$$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}},$$

$$\tfrac{1}{2}(\sqrt{5}-1),$$

$$r\left(2-\sqrt{\tfrac{5+\sqrt{5}}{2}}\right),$$

$$r\left(2-r\left(2+\sqrt{\tfrac{5+\sqrt{5}}{2}}\right)\right),$$

$$r\left(2-r\left(2+r\left(2+\sqrt{\tfrac{5+\sqrt{5}}{2}}\right)\right)\right),$$

$$r\left(2-r\left(2+r\left(2+r\left(2+\sqrt{\tfrac{5+\sqrt{5}}{2}}\right)\right)\right)\right),$$

u. s. f. u. s. f.

umschriebenen Vielecke von gleicher Seitenzahl er- nach (45.), $\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} = \alpha$ setzend:

$$2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}},$$

$$\frac{(\sqrt{5}-1).\sqrt{2}}{\sqrt{(5+\sqrt{5})}},$$

$$2\sqrt{\frac{2-\alpha}{2+\alpha}},$$

$$2\sqrt{\frac{2-r(2+\alpha)}{2+r(2+\alpha)}},$$

$\sqrt{\frac{2-\sqrt{(2+\sqrt{(2+a)})}}{2+\sqrt{(2-\sqrt{(2+a)})}}}$,

$\sqrt{\frac{2-\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+a)})})}}{2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+a)})})}}}$,

u. ſ. f. u. ſ. f.

iten des umſchriebenen Fünf- und Zehnecks
er ausgedrückt, auch $2r(5-2r5)$ und

$1+\frac{1}{4}(r5-1)^2 = \frac{1}{2}(5-r5)$ iſt; ſo
s Quadrat des Radius und das Quadrat der
hnecks dem Quadrate der Seite des Fünfecks
er Radius, die Seite des Zehnecks und die
infecks bilden folglich ein rechtwinkliges Dreieck,
enuſe die Seite des Fünfecks iſt. Die Seite
iſt $= r\frac{5}{4}-\frac{1}{2} = r(1+(\frac{1}{2})^2)-\frac{1}{2}$, oder,
it r multiplicirt, $= r\left(r^2+\left(\frac{r}{2}\right)^2\right)-\frac{r}{2}$.
nmittelbar folgende einfache Conſtruction der
ehn- und Fünfecks im Kreiſe. Man halbire
den Halbmeſſer CB in D, ziehe CE ſenkrecht
he DE, und beſchreibe mit dieſem Radius

es Fünfecks, wie der Radius zur Diagonale des Fünfecks. Vollendet man den aus D (Fig. 115.) beschriebenen Bogen zum Halbkreise, und zieht EG; so ist, weil FEG ein rechter Winkel, $FC:FE = CE:EG$, folglich EG die Diagonale des Fünfecks.

Zieht man im eingeschriebenen Zehneck (Fig. 117.) die Diagonalen AB, AC, AD, AE; so ist AB der Durchmesser $= 2$, AE die Seite des Fünfecks $= \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$. Ferner ist $AC^2 = AB^2 - BC^2 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$, wenn man $AB = 2$, und für BC die Seite des Zehnecks setzt (48.). Also ist $AC = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$ = der Diagonale des Fünfecks (50.). Endlich ist $AD^2 = AB^2 - BD^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, wenn man $AB = 2$, und für BD die Seite des Fünfecks (48.) setzt. Die Diagonalen des Zehnecks sind also:

$AB = 2$, der Durchmesser;

$AC = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$, Diagonale des Fünfecks;

$AD = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$, und

$AE = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$, Seite des Fünfecks.

In Fig. 115. ist $CG^2 = EG^2 - CE^2 = \frac{5+\sqrt{5}}{2} - 1$ (50.) $= \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $CG = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$, die dritte Diagonale AD (Fig. 117.) des Zehnecks. Das Dreieck FEG (Fig. 115.) enthält also die Seiten und alle Diagonalen des regulären Fünf- und Zehnecks.

51. Da man nach dem Bisherigen das reguläre Sechs- und Zehneck in den Kreis beschreiben, also auch den 6ten und 10ten Theil der Peripherie geometrisch finden kann; so kann man den Kreis in 15 gleiche Theile theilen, da $\frac{1}{10} - \frac{1}{6} = \frac{1}{15}$, und folglich auch das reguläre Funfzehneck in den Kreis beschreiben.

Mit Hülfe einiger trigonometrischen Sätze ist die Berechnung der Seite des Funfzehnecks leicht. Es ist nämlich $\frac{1}{30} = \frac{1}{12} - \frac{1}{20}$, die ganze Peripherie als Einheit ge-

des Centrum des Polygons, der von zwei
zwei kleinen Radien eingeſchloſſene Winkel der
ikel, ein Perpendikel von dem Mittelpunkte
te heißt auch Apothema. Iſt das Polygon
neck; ſo iſt der Centriwinkel $= \frac{4R}{n}$, der
Umfange $= \frac{2(n-2)R}{n}$ (3.). Der Polygon-
inkel machen immer zuſammen $2R = 180^{\circ}$.

rs wichtig iſt die Beſchreibung der regulären
und um den Kreis. Die Elemente lehren,
ſchreibung dann allemal möglich iſt, wenn der
ſo viele gleiche Theile geometriſch theilen läßt,
ſchreibende Polygon Seiten hat. Wir wer-
wir dies als hinlänglich bekannt vorausſetzen,
dieſen Gegenſtand zurück kommen.

r Mittelpunkt eines regulären Polygons iſt
Punkt der mittlern Entfernungen. Man
rvon auf folgende einfache Art überzeugen.
nzahl gerade; ſo nehme man den Durchmeſſer

In jedem regulären neck ist die Summe der Quadrate der von irgend einem Punkte in seiner Ebene nach den Spitzen gezogenen Linien gleich der nfachen Summe der Quadrate des Radius des umschriebenen Kreises und der den Mittelpunkt mit jenem Punkte verbindenden geraden Linie (15.).

Einen allgemeinern Satz, von Lentheric bewiesen, s. in den Annales d. Math. T. XVI. p. 20.

Die Summe der Quadrate der Entfernungen eines Punktes in der Peripherie irgend eines, mit einem regulären Polygon von n Seiten einerlei Mittelpunkt habenden, Kreises von allen Spitzen des Polygons ist gleich der nfachen Summe des Quadrats des Halbmessers des gegebenen Kreises und des Quadrats des Halbmessers r des Polygons, also eine constante Größe, wo man auch den Punkt in der Peripherie annehmen mag (17.). Ist der Kreis, in dessen Peripherie der Punkt angenommen wird, um das Polygon beschrieben; so ist besagte Quadratensumme offenbar $= 2nr^2$. Theilt man also die Peripherie eines Kreises in n gleiche Theile, und zieht von irgend einem Punkte in der Peripherie nach allen Theilpunkten gerade Linien; so ist, wenn r der Radius des Kreises ist, die Summe der Quadrate dieser Linien $= 2nr^2$, also eine constante Größe, wo man auch den Punkt in der Peripherie annehmen mag.

Die Summe der Quadrate aller Seiten und Diagonalen eines regulären necks ist dem mit n^2 multiplicirten Quadrate des Radius des umschriebenen Kreises gleich (19.). Ist a die Seite des regulären Dreiecks, r der Radius des umschriebenen Kreises; so ist $3a^2 = 9r^2$, $a = r\sqrt{3}$, $r = a:\sqrt{3}$.

Fällt man von irgend einem Punkte in der Peripherie eines mit einem regulären Polygon einerlei Mittelpunkt habenden Kreises auf die Seiten des Polygons Perpendikel, und verbindet deren Fußpunkte durch gerade Linien; so ist der Inhalt des entstehenden Vielecks eine constante Größe, wo auch der angenommene Punkt in der Peripherie des Kreises liegen mag (26.).

an von irgend einem Punkte in der Ebene eines
Vielecks, deſſen Seite = s ſey, auf alle Sei-
dikel p, p′, p″, p‴, ..., wobei die vom
nen Punkte aus in das Polygon hinein ge-
pendikel als negativ angeſehen werden ſollen;
P der Inhalt des Polygons, offenbar

$$P = \tfrac{1}{2}(p + p' + p'' + p''' + \dots)s .$$

er Halbmeſſer des eingeſchriebenen Kreiſes, und
hl = n; ſo iſt $P = \frac{1}{2} n \varrho s$. Alſo

$$p + p' + p'' + p''' + \dots = n\varrho ,$$

umme aller von irgend einem Punkte auf die
s regulären necks gefällten Perpendikel iſt dem
nen Radius gleich, alſo eine conſtante Größe.
38.) das um den Kreis beſchriebene Polygon
iſt a = b = c = ..., a + b + c + ...
nn n die Seitenzahl, wodurch ſich die dortige

$$^2 + BP^2 + CP^2 + \dots = n(R^2 + r^2)$$

Zieht man alſo von irgend einem Punkte in der
nes mit einem umſchriebenen regulären Polygon

biren läßt, so kann man obige Zahlen auch willkührlich verdoppeln und halbiren, wodurch man andere geotrische Theilungen erhält. Alles dieses ist aus den Elenten bekannt. Mascheroni macht in seiner Géome- du compas (Uebers. v. Grüson. Berlin. 1825.) e und andere Theilungen zur praktischen Anwendung hickter, indem er, den Gebrauch des Lineals vermeid, sie bloß mit dem Zirkel auszuführen lehrt. Reldinus (De resolutione et compositione mathetica. Lib. II. f. 367.) glaubte eine allgemeine Regel Beschreibung jedes regulären Polygons in den Kreis unden zu haben, deren Unrichtigkeit aber schon Wolf lementa Analyseos finitor. §. 292.) nachgewiesen , und in der That ist seit Euclid die Theorie der Einlung des Kreises in gleiche Theile um keinen Schritt entlich gefördert worden, bis im Jahre 1801 Gauß e seiner glänzendsten Entdeckungen bekannt machte. hat nämlich folgenden merkwürdigen Satz gefunden: nn die Seitenzahl n eines regulären Polygons eine imzahl, und $n-1 = 2^{\alpha} 3^{\beta} 5^{\gamma} \ldots$ ist; so läßt sich Eintheilung des Kreises in n gleiche Theile immer auf Auflösung von α Gleichungen des 2ten, β Gleichungen 3ten, γ Gleichungen des 5ten Grades u. s. f. ückführen. Der Beweis dieses Satzes beruht auf r feinen Untersuchungen der höhern Arithmetik, und igt unmittelbar mit der Auflösung einer gewissen merkrdigen Klasse von Gleichungen zusammen, kann aber r, ohne zu große Weitläufigkeit nicht mitgetheilt rden. Wir haben daher diese merkwürdige und wich- e Theorie in die Zusätze zu diesem Werke, in den tikel Gleichung, verwiesen, wo sie ganz und im Zuammenhange dargestellt werden soll. Der 7te Abschnitt e aequationibus circuli sectiones definientibus) Disquisitiones arithmeticae (Lips. 1801.) des ühmten deutschen Geometers giebt über diesen Gegend die vollständigste und beste Belehrung, hängt aber ig mit dem Gegenstande des ganzen Werkes zusammen. ch in Legendre Théorie des nombres. V. Partie.

480. iſt eine klare Darſtellung dieſer Unter-
egeben. Außerdem ſ. m. noch eine Abhand-
bel in Crelles Journal. IV. 2. 5. 131.
rſuchung zugleich noch erweitert iſt. Iſt alſo
$^{\alpha}$; ſo wird zu der Eintheilung des Kreiſes in
heile nur die Auflöſung von α quadratiſchen
erfordert, und ſolche Theilungen ſind alſo
ch die Elementargeometrie ausführbar, weil
iſche Gleichung ſich bloß mittelſt der geraden
es Kreiſes conſtruiren läßt. Für $n = 17$,
$= 2^4$, iſt alſo die elementar-geometriſche
möglich. Nach dieſen allgemeinen Bemerkun-
r nun zur Conſtruction der euclidiſchen regulären
und des regulären 17ecks in den Kreis über,
aber vorzüglich uns des Calcus bedienen.

s der Seite $AB = a$ (Fig. 112.) eines ecks
ßt ſich immer die Seite $AD = a'$ des 2ecks
den. Denn es iſt, den Radius $= 1$ geſetzt,
$+ DE^2 = \frac{1}{4}a^2 + (1 - \sqrt{(1 - \frac{1}{4}a^2)})^2$
$\sqrt{(1 - \frac{1}{4}a^2)}$. Alſo

multipliciren. Aber a′ bezieht sich immer auf den
us = 1.

5. Die Seite des umschriebenen ecks sey = b;
(Fig. 113.) AF = ½b. Aber AF : AE =
CE, ½b : ½a = 1 : r(1 − ¼a²), woraus

$$b = \frac{2a}{r(4-a^2)}.$$

6. Ein von zwei Radien und einer Seite eines ein-
iebenen regulären Polygons gebildetes gleichschenk-
Dreieck wollen wir ein Bestimmungsdreieck
n. Der Winkel an dessen Spitze ist der Centriwin-
der Winkel an der Grundlinie der halbe Polygon-
l des regulären Vielecks. Der Centriwinkel des re-
en Vierecks ist = 90°. Folglich die Seite = r2.
(43.) die Seite des eingeschriebenen regulären Vier-
Achtecks, Sechzehnecks, u. s. f.:

$$r2,$$
$$r(2-r2),$$
$$r(2-r(2+r2)),$$
$$r(2-r(2+r(2+r2))),$$
$$r(2-r(2+r(2+r(2+r2)))),$$
u. s. f. u. s. f.

r den Radius = 1 gesetzt. Folglich sind (45.) die
des umgeschriebenen regulären Vierecks, Achtecks,
zehnecks, u. s. f:

$$2,$$
$$2r\frac{2-r2}{2+r2},$$
$$2r\frac{2-r(2+r2)}{2+r(2+r2)},$$
$$2r\frac{2-r(2+r(2+r2))}{2+r(2+r(2+r2))},$$
$$2r\frac{2-r(2+r(2+r(2+r2)))}{2+r(2+r(2+r(2+r2)))},$$
u. s. f. u. s. f.

b verschiedene Reductionen kann man diesen Aus-
en einfachere Gestalten geben. Das Gesetz ist aber
nicht so einleuchtend. Für das Achteck erhält man
. die Seite = 2(r2 − 1). Die Hälfte dieser

$\sqrt{2}-1$, nämlich = der Differenz zwiſchen
s eingeſchriebenen Vierecks und dem Radius.
en dieſer Art würden ſich hier und im Folgen-
anſtellen laſſen. Da ſie ſich aber alle leicht er-
rden ſie der Kürze wegen größtentheils über-

Centriwinkel des eingeſchriebenen regulären
$= 60^0$, und eben ſo groß der halbe Poly-
das Beſtimmungsdreieck demnach ein gleichſei-
glich die Seite des regulären Sechsecks dem
, $= 1$, ſo daß ſich alſo der Radius genau
Peripherie herumtragen läßt, wodurch ſogleich
ung des regulären Sechsecks in den Kreis ge-
Seite des eingeſchriebenen regulären Drei-
(44.) $= \sqrt{3}$, und folglich die Seiten des
nen regulären Dreiecks, Sechsecks, Zwölf-
:

$\sqrt{3}$,
1,
$\sqrt{(2-\sqrt{3})}$,

r ausgedrückt, $= 2(2-\sqrt{3})$, also das Doppelte Seite des eingeschriebenen regulären Zwölfecks.

Der Centriwinkel des regulären Zehnecks ist '. Also der halbe Polygonwinkel $= 90^0 - 18^0$. Im Bestimmungsdreieck ist also der Winkel an ndlinie doppelt so groß als der Winkel an der Spitze. ABC (Fig. 114.) das Bestimmungsdreieck für das , dessen Seite AB, und man halbirt den Winkel ırch AD; so überzeugt man sich leicht, daß ADC, eichschenklige Triangel, also $CD = AD = AB$, Triangel ABC, ABD ähnlich sind, woraus $= AB:BD$, oder, für $AB = x$, $1:x = x:$ $x^2 = 1-x$, $x = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$. Nach (44.) ich hieraus leicht die Seite des eingeschriebenen re= Fünfecks $= \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$. Also hat man (43.) die des eingeschriebenen regulären Fünfecks, Zehnecks, ecks, u. s. f.:

$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$,

$\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$,

$\sqrt{(2-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}})}$,

$\sqrt{(2-\sqrt{(2+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}})})}$,

$\sqrt{(2-\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}})})})}$,

u. s. f. u. s. f.

umschriebenen Vielecke von gleicher Seitenzahl er= nach (45.), $\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} = \alpha$ setzend:

$2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}}$,

$\frac{(\sqrt{5}-1).\sqrt{2}}{\sqrt{(5+\sqrt{5})}}$,

$2\sqrt{\frac{2-\alpha}{2+\alpha}}$,

$2\sqrt{\frac{2-\sqrt{(2+\alpha)}}{2+\sqrt{(2+\alpha)}}}$,

$\sqrt{\frac{2-\sqrt{(2+\sqrt{(2+a)})}}{2+\sqrt{(2-\sqrt{(2+a)})}}}$,

$\sqrt{\frac{2-\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+a)})})}}{2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+a)})})}}}$,

u. ſ. f. u. ſ. f.

iten des umſchriebenen Fünf- und Zehnecks
er ausgedrückt, auch $2r(5-2\sqrt{5})$ und

$1+\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)^2 = \frac{1}{2}(5-\sqrt{5})$ iſt; ſo
s Quadrat des Radius und das Quadrat der
ehnecks dem Quadrate der Seite des Fünfecks
der Radius, die Seite des Zehnecks und die
ünfecks bilden folglich ein rechtwinkliges Dreieck,
enuſe die Seite des Fünfecks iſt. Die Seite
iſt $= r\sqrt{\frac{5}{4}}-\frac{1}{2} = r\sqrt{(1+(\frac{1}{2})^2)}-\frac{1}{2}$, oder,
nit r multiplicirt, $= r\sqrt{(r^2+(\frac{r}{2})^2)}-\frac{r}{2}$.
nmittelbar folgende einfache Conſtruction der
ehn- und Fünfecks im Kreiſe. Man halbire
) den Halbmeſſer CB in D, ziehe CE ſenkrecht
[redacted]

es Fünfecks, wie der Radius zur Diagonale des Fünfecks. Vollendet man den aus D (Fig. 115.) beschriebenen Bogen zum Halbkreise, und zieht EG; so ist, weil FEG in rechter Winkel, $FC : FE = CE : EG$, folglich EG die Diagonale des Fünfecks.

Zieht man im eingeschriebenen Zehneck (Fig. 117.) die Diagonalen AB, AC, AD, AE; so ist AB der Durchmesser $= 2$, AE die Seite des Fünfecks $= \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$. Ferner ist $AC^2 = AB^2 - BC^2 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$, wenn man $AB = 2$, und für BC die Seite des Zehnecks setzt (48.). Also ist $AC = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$ = der Diagonale des Fünfecks (50.). Endlich ist $AD^2 = AB^2 - BD^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, wenn man $AB = 2$, und für BD die Seite des Fünfecks (48.) setzt. Die Diagonalen des Zehnecks sind also:

$AB = 2$, der Durchmesser;

$AC = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$, Diagonale des Fünfecks;

$AD = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$, und

$AE = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$, Seite des Fünfecks.

In Fig. 115. ist $CG^2 = EG^2 - CE^2 = \frac{5+\sqrt{5}}{2} - 1$ (50.) $= \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $CG = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$, die dritte Diagonale AD (Fig. 117.) des Zehnecks. Das Dreieck FEG (Fig. 115.) enthält also die Seiten und alle Diagonalen des regulären Fünf- und Zehnecks.

51. Da man nach dem Bisherigen das reguläre Sechs- und Zehneck in den Kreis beschreiben, also auch den 6ten und 10ten Theil der Peripherie geometrisch finden kann; so kann man den Kreis in 15 gleiche Theile theilen, da $\frac{1}{10} - \frac{1}{15} = \frac{1}{30}$, und folglich auch das reguläre Funfzehneck in den Kreis beschreiben.

Mit Hülfe einiger trigonometrischen Sätze ist die Berechnung der Seite des Funfzehnecks leicht. Es ist nämlich $\frac{1}{30} = \frac{1}{12} - \frac{1}{20}$, die ganze Peripherie als Einheit ge-

ſo $\sin\frac{1}{30} = \sin\frac{1}{12}.\cos\frac{1}{20} - \cos\frac{1}{12}.\sin\frac{1}{20}$
e. 24.). Ferner iſt $\sin\frac{1}{12} = \frac{1}{2}\,\text{chord}\,\frac{1}{6} = \frac{1}{2}$
o $\cos\frac{1}{12} = \sqrt{(1-\sin^2\frac{1}{12})} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$;
chord $\frac{1}{10} = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$ (48.), $\cos\frac{1}{20}$
$-\sin^2\frac{1}{20}) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$. Folglich nach obi-

$\text{in}\,\frac{1}{30} = \frac{1}{8}\{\sqrt{(10+2\sqrt{5})}-\sqrt{15}+\sqrt{3}\}$.
$\frac{1}{10} = 2\sin\frac{1}{30}$. Alſo die Seite des Funf-

$= \frac{1}{4}\{\sqrt{(10+2\sqrt{5})}-\sqrt{15}+\sqrt{3}\}$.
ndet man nun auch die Seite des ein- und um-
30, 60, 120ecks, u. ſ. f. Die Conſtruction
necks ergiebt ſich ſogleich.

e Beſchreibung des regulären Siebzehnecks in
welche wir aus der ſchon oben (42.) erwähn-
nen Theorie von Gauß hier ausheben, beruht,
die Sache darſtellen wollen, vorzüglich auf der
g der Reihe

$$\frac{\pi}{n+1} - \cos\frac{2\pi}{2n+1} + \cos\frac{3\pi}{2n+1} - \ldots.$$

$$S = \cos\frac{\pi}{2n+1} - 2\left\{S \mp \cos\frac{n\pi}{2n+1}\right\}.\cos\frac{\pi}{2n+1}$$
$$+ 1 - \left\{S \pm \cos\frac{(n-1)\pi}{2n+1} \mp \cos\frac{n\pi}{2n+1}\right\},$$
$$2S\left(1 + \cos\frac{\pi}{2n+1}\right) = \cos\frac{\pi}{2n+1} \pm \cos\frac{(n+1)\pi}{2n+1}$$
$$\pm \cos\frac{(n-1)\pi}{2n+1} + 1 \mp \cos\frac{(n-1)\pi}{2n+1} \pm \cos\frac{n\pi}{2n+1}$$
$$= 1 + \cos\frac{\pi}{2n+1} \mp \cos\frac{n\pi}{2n+1} \pm \cos\frac{n\pi}{2n+1},$$

a $\frac{(n+1)\pi}{2n+1} + \frac{n\pi}{2n+1} = \pi$ iſt. Alſo $S = \frac{1}{2}$ für jedes anze poſitive n.

53. Dies giebt

$$\left.\begin{array}{l}\cos\frac{\pi}{17} - \cos\frac{2\pi}{17} + \cos\frac{3\pi}{17} - \cos\frac{4\pi}{17}\\ + \cos\frac{5\pi}{17} - \cos\frac{6\pi}{17} + \cos\frac{7\pi}{17} - \cos\frac{8\pi}{17}\end{array}\right\} = \frac{1}{2},$$

ine Gleichung mit 8 unbekannten Größen. Da es nun ier vorzüglich auf die Beſtimmung von $\frac{\pi}{17}$ oder $\cos\frac{\pi}{17}$ nkommt; ſo ſind zwiſchen dieſen acht Unbekannten noch andere Gleichungen zu ſuchen. Setzen wir

$$\cos\frac{3\pi}{17} + \cos\frac{5\pi}{17} - \left(\cos\frac{6\pi}{17} - \cos\frac{7\pi}{17}\right) = X,$$
$$\cos\frac{2\pi}{17} + \cos\frac{8\pi}{17} - \left(\cos\frac{\pi}{17} - \cos\frac{4\pi}{17}\right) = Y;$$

) haben wir die Gleichung:

$$X - Y = \frac{1}{2}.$$

54. Multiplicirt man nun die beiden Ausdrücke für X, Y mit einander, und zerlegt das Product jeder zwei Cosinus nach Goniometrie. (27.), ſo daß z. B.

$$\cos\frac{5\pi}{17}.\cos\frac{8\pi}{17} = \frac{1}{2}\cos\frac{13\pi}{17} + \frac{1}{2}\cos\frac{3\pi}{17}$$
$$= -\frac{1}{2}\cos\frac{4\pi}{17} + \frac{1}{2}\cos\frac{3\pi}{17},$$

)odurch der Factor von π nie 8 überſteigt; ſo findet man, aß dieſes Product die Hälfte der in (53.) ſummirten Reihe 4 Mal enthält, woraus

$$XY = 1.$$

Dieſe Gleichung, in Verbindung mit der vorigen,

ſtimmung von X und Y hin, und es erhellet, quadratiſche Gleichungen erforderlich ſind.

zen wir nun

$$\cos\frac{5\pi}{17} - \cos\frac{6\pi}{17} - \cos\frac{7\pi}{17} = X',\quad \cos\frac{6\pi}{17} - \cos\frac{7\pi}{17} = X'';$$

$$\cos\frac{8\pi}{17} - \cos\frac{\pi}{17} = Y',\quad \cos\frac{\pi}{17} - \cos\frac{4\pi}{17} = Y'';$$

nach einer ganz ähnlichen Methode wie vorher, '' der Hälfte der in (53.) ſummirten Reihe o haben wir:

$$X' - X'' = X,\ Y' - Y'' = Y;$$

$$X'X'' = \tfrac{1}{4},\ Y'Y'' = \tfrac{1}{4};$$

ſtimmung von X', X'', Y', Y'' hinreichende , und es fällt in die Augen, daß zu dieſer ebenfalls nur quadratiſche Gleichungen er- d.

n iſt ferner immer nach derſelben Zerlegung

$$\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{5\pi}{17} = \tfrac{1}{2}\left(\cos\frac{8\pi}{17} + \cos\frac{2\pi}{17}\right),$$

ur Gleichungen des zweiten Grades erforderlich ſind. at man nun $x_1 = \cos\frac{\pi}{17}$ gefunden; ſo iſt die Seite des 5iebenzehnecks offenbar

$$= 2r\sin\frac{\pi}{17} = 2r\sqrt{\left(1-\cos^2\frac{\pi}{17}\right)}.$$

lach gehöriger Rechnung findet man, wenn $r = 1$, die 5eite des Siebzehnecks = der Quadratwurzel aus fol=ndem Ausdruck:

$$\tfrac{1}{16} - \tfrac{1}{16}\sqrt{17} - \tfrac{1}{16}\sqrt{(34-2\sqrt{17})} - \tfrac{1}{16}\sqrt{(17+3\sqrt{17}-\sqrt{(170+38\sqrt{17})})}.$$

57. Um aus den obigen Formeln eine Conſtruction des 5iebenzehnecks abzuleiten, iſt es zuvörderſt nöthig, ihnen ne etwas veränderte Geſtalt zu geben. Zu dem Ende enke man ſich von jeder unbekannten Größe das Doppelte enommen, und dieſe Doppelten durch beigefügte obere der untere Jndices von den primitiven Größen unterſchie=en; ſo nehmen obige Gleichungen, ſo weit wir hier ihrer edürfen, folgende Geſtalt an:

$$X_1 - Y_1 = 1,\ X_1 Y_1 = 4.$$
$$X'_1 - X''_1 = X_1,\ Y'_1 - Y''_1 = Y_1;$$
$$X'_1 X''_1 = 1,\ Y'_1 Y''_1 = 1.$$
$$x'_2 + x'_8 = Y_1,\ x'_2 \cdot x'_8 = X''_1.$$

Werden die erſtern aufgelöſt; ſo erhält man:

$$X_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{17} + \tfrac{1}{2},\ Y_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{17} - \tfrac{1}{2};$$
$$X'_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{(4+X_1^2)} + \tfrac{1}{2}X_1,$$
$$X''_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{(4+X_1^2)} - \tfrac{1}{2}X_1;$$
$$Y'_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{(4+Y_1^2)} + \tfrac{1}{2}Y_1,$$
$$Y''_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{(4+Y_1^2)} - \tfrac{1}{2}Y_1.$$

Setzen wir nun, wie immer, den Radius = 1; ſo wird er 17te Theil der Peripherie auf folgende Art durch Con=ruction gefunden. Durch A (Fig. 118.) errichte man uf den Radius CA das Perpendikel AB = dem doppel=en Radius = 2, halbire AC in D, und mache DE = lD; ſo iſt $BD^2 = 4 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$, $BD = DE = \frac{1}{2}\sqrt{17}$, $:E = \frac{1}{2}\sqrt{17} + \frac{1}{2} = X_1$, $AE = \frac{1}{2}\sqrt{17} - \frac{1}{2} = Y_1$. Halbire AE in F, AB in G, und nimm FH = FG; ſo ſt $FG^2 = 1 + \frac{1}{4}Y_1^2$, $FG = FH = \frac{1}{2}\sqrt{(4+Y_1^2)}$, $AH = \frac{1}{2}\sqrt{(4+Y_1^2)} + \frac{1}{2}Y_1 = Y'_1$, EH =

$Y_1^2) - \frac{1}{2}Y_1 = Y''_1$. Errichte den ſenkrech-
CI, halbire CE in K, nimm KL = KI; ſo
$1 + \frac{1}{4}X_1^2$, $KI = KL = \frac{1}{2}\sqrt{(4+X_1^2)}$,
$\sqrt{(4 + X_1^2)} + \frac{1}{2}X_1 = X'_1$, $CL =$
$X_1^2) - \frac{1}{2}X_1 = X''_1$. Beſchreibt man nun
nd AH Halbkreiſe, deren erſter das Perpen-
M ſchneidet, zieht durch M eine Parallele MN
an den zweiten Halbkreis, und fällt von N
s Perpendikel NP; ſo iſt $NP^2 = CM^2 =$
$= PH.PA$, und $AH = PH + PA$. Da
$= 1$; ſo hat man nach dem Obigen:

$$PH + PA = Y'_1,\ PH.PA = X''_1.$$

ungen, mit

$$x'_2 + x'_8 = Y'_1,\ x'_2.x'_8 = X''_1$$

verbunden mit der Bemerkung, daß $x'_2 =$
der doppelte Coſinus des kleinern Winkels,
geben $PH = x'_2$, $PA = x'_8$. Aber x'_8
$= 2\cos\frac{8\pi}{17} = 2\sin\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{8\pi}{17}\right) = 2\sin\frac{\pi}{34}$

58. Noch ſind einige Inhaltsbeſtimmungen übrig. Inhalt eines regulären ecks im Kreiſe iſt offenbar:

$$I = \tfrac{1}{2} n r^2 \sin \frac{2\pi}{n};$$

Inhalt des umſchriebenen ecks dagegen:

$$I' = n r^2 \operatorname{tang} \frac{\pi}{n}.$$

Umfang des umſchriebenen ecks iſt immer $P' = n \operatorname{tang} \frac{\pi}{n}$. Für $r = 1$ iſt $I' = n \operatorname{tang} \frac{\pi}{n}$, und für $= 1$ auch $P' = n \operatorname{tang} \frac{\pi}{n}$. Alſo iſt das Verhältniß Fläche eines umſchriebenen ecks zum Quadrate des ius einerlei mit dem Verhältniß ſeines Umfangs zum chmeſſer.

Der Inhalt eines in einen Kreis beſchriebenen regulä- Polygons von 2n Seiten iſt:

$$i = n r^2 \sin \frac{\pi}{n}.$$

i iſt

$$\begin{aligned} I.I' &= \tfrac{1}{2} n^2 r^4 \sin \frac{2\pi}{n} \operatorname{tang} \frac{\pi}{n} \\ &= n^2 r^4 \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n} \operatorname{tang} \frac{\pi}{n} \\ &= n^2 r^4 \left(\sin \frac{\pi}{n} \right)^2. \end{aligned}$$

$I.I' = i^2$, d. h. das eingeſchriebene reguläre Polygon 2n Seiten iſt das geometriſche Mittel zwiſchen dem nd um den Kreis beſchriebenen regulären Polygon von Seiten.

Der Inhalt des regulären Polygons von 2n Seiten den Kreis iſt:

$$i' = 2 n r^2 \operatorname{tang} \frac{\pi}{2n}.$$

r (Goniometrie. 38.)

$$\operatorname{tang} \frac{\pi}{2n} = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{1 + \cos \frac{\pi}{n}},$$

$$\cos\frac{\pi}{n} = \frac{nr^2 \sin\frac{\pi}{n}}{nr^2 \operatorname{tang}\frac{\pi}{n}} = \frac{i}{I'};$$

$$i' = \frac{2iI'}{I'+i}.$$

dem Obigen

$$I'+i = \frac{i(I+i)}{I}.$$

$$i' = \frac{2I.I'}{I+i}.$$

rſtern Ausdrucke für i' folgt leicht, daß

$$I' : i = I' - i' : i' - i,$$

m den Kreis beſchriebene reguläre Polygon i'
iten iſt das harmoniſche Mittel (S. harmoni-
tion) zwiſchen dem in den Kreis beſchriebenen
von $2n$ Seiten, und dem um den Kreis be-
I' von n Seiten.

man den Radius $= 1$; ſo iſt die Seite des
nacſchriebenen Quadrats $= \sqrt{2}$, $= 2$, alſo

Offenbar ist $I_3 =$ der Summe der beiden Trapezien $A_1 a_3$, $A_2 a_3$, weniger dem Trapezio $A_1 a_2$. Also (Trapezium. 1.)

$$I_3 = \tfrac{1}{2}(y_3 + y_1)(x_3 - x_1) + \tfrac{1}{2}(y_2 + y_3)(x_2 - x_3) - \tfrac{1}{2}(y_2 + y_1)(x_2 - x_1)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right|$$

und, obgleich diese Formel nur für den in der Figur dargestellten Fall entwickelt ist, so überzeugt man sich doch bald von ihrer Allgemeinheit, wenn nur die Coordinaten mit den gehörigen Zeichen genommen werden. S. z. B. m. Lehrb. d. Statik. Halle. 1826. S. 254. Ein Viereck läßt sich in zwei Dreiecke $A_1 A_2 A_3$, $A_1 A_3 A_4$ zerlegen, deren Flächenräume:

$$\tfrac{1}{2}\left|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right|,$$

$$\tfrac{1}{2}\left|x_1(y_3 - y_4) + x_3(y_4 - y_1) + x_4(y_1 - y_3)\right|.$$

Folglich

$$I_4 = \tfrac{1}{2}\left|x_1(y_2 - y_4) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_4 - y_2) + x_4(y_1 - y_3)\right|.$$

Ein Fünfeck läßt sich in ein Viereck $A_1 A_2 A_3 A_4$ und ein Dreieck $A_1 A_4 A_5$ zerlegen. Der Inhalt des Vierecks ist der obige, der des Dreiecks

$$\tfrac{1}{2}\left|x_1(y_4 - y_5) + x_4(y_5 - y_1) + x_5(y_1 - y_4)\right|.$$

Durch Addition erhält man leicht den Inhalt des Fünfecks. Hieraus folgt, daß allgemein für irgend ein neck der Inhalt $I_n =$

$$\tfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} x_1(y_2 - y_n) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_4 - y_2) + \ldots \\ \ldots + x_{n-1}(y_n - y_{n-2}) + x_n(y_1 - y_{n-1}) \end{array}\right\}$$

eine auch zu praktischen Rechnungen sehr brauchbare Formel. In Puissant Traité de Topographie. Paris. 1820. p. 263. findet man ein vollständig berechnetes Beispiel, Gauß aber wird nicht als Erfinder genannt.

60. Folgende Tafel enthält einige numerische Bestimmungen für Umfang und Flächeninhalt einiger regulären Polygone:

Vieleckiger Körper.

geschriebene Vielecke.		Umschriebene.
ang chmesser.	Fläche zum Quadrat des Halbmessers.	Umfang zum Durchm. Fläche zum Quadrat des Halbmessers.
80762	1,2990381	3,1961524
84271	2,0000000	4,0000000
89262	2,3776413	3,6327126
00000	2,5980762	3,4641016
14674	2,8284271	3,3137085
01699	2,9389262	3,2491969
58285	3,0000000	3,2153903
86753	3,0505248	3,1883484
14451	3,0614674	3,1825978
37418	3,0705541	3,1778507

zelnen begränzenden ebenen Figuren heißen Seitenflächen, die Gesammtheit aller heißt Oberfläche. Die Durchschnittslinien der Seitenflächen werden Kanten genannt, die Durchschnittspunkte der Kanten Ecken. An jeder Ecke liegt ein Körperwinkel, die Neigungswinkel der Seitenflächen gegen einander heißen Flächenwinkel. Dieser Artikel ist allgemeinen Untersuchungen über die Polyeder gewidmet. Einzelne vieleckige Körper, z. B. das Prisma, das Parallelepipedon, die Pyramide u. s. f., s. m. in besondern Artikeln.

I. Allgemeine Eigenschaften beliebiger Polyeder.

1. Man denke sich ein Netz an einander hängender ebener Figuren, welche in einer Ebene liegen können oder nicht, und bezeichne die Anzahl aller ebenen Figuren, Kanten und Ecken desselben durch S, K, E. Um zwischen diesen drei Größen eine Gleichung zu finden, stelle man sich vor, daß zu dem Netze eine neue Figur mit n Seiten hinzu komme, welche n′ Seiten mit dem Netze gemein, n″ nicht mit demselben gemein habe, und bezeichne durch S′, K′, E′ in Bezug auf das neue Netz dasselbe, was S, K, E in Bezug auf das primitive bedeuten; so erhellet augenblicklich die Richtigkeit folgender Gleichungen:

$$n = n' + n'', \quad S' = S + 1, \quad K' = K + n''.$$

Zugleich aber ist auch klar, daß die hinzukommende Figur, welche n′ Seiten mit dem primitiven Netze gemein hat, n′ + 1 Eckpunkte mit demselben gemein, also n″ — 1 Eckpunkte mit demselben nicht gemein hat, da immer

$$n = n' + n'' = (n'+1) + (n''-1)$$

seyn muß. Also ist

$$E' = E + n'' - 1.$$

Man hat also jetzt

$$\begin{aligned} E' &= E + n'' - 1 \\ S' &= S + 1 \\ -K' &= -K - n''; \end{aligned}$$

nn man auf beiden Seiten addirt, ſogleich

):

$$E' + S' - K' = E + S - K,$$

die Größe $E + S - K$ für alle Netze eine
öße iſt. Für ein aus einer einzigen Figur be-
tz iſt aber

$$E = K,\ S = 1,\ E + S - K = 1;$$

alle Netze

$$+ S - K = 1,\ E + S = K + 1;$$

mme der Anzahl der Ecken und Figuren iſt um
als die Anzahl der Kanten.

erkwürdige Gleichung iſt zuerſt von Cauchy
rden (Journal de l'école polytechnique.
. 16. p. 80.).

n ein völlig umſchloſſenes Polyeder mit S Sei-
K Kanten und E Ecken; ſo denke man ſich
Seitenfläche hinweg, wodurch man ein Net
figuren, K Kanten und E Ecken erhält, in
nach dem Vorigen

Denke man sich nun wieder, daß zu diesem Netze ein neues Polyeder hinzu komme, für welches P', S', K', E' dasselbe bedeuten, was P, S, K, E in Bezug auf das primitive Netz bezeichnen. Sey ferner s die Anzahl der Seiten, k die Anzahl der Kanten, und e die Anzahl der Ecken, welche das neu hinzukommende Polyeder nicht mit dem primitiven Netze gemein hat; so ist nach dem zuerst bewiesenen Satze von Cauchy

$$e + s - k = 1.$$

Zugleich erhellet aber augenblicklich die Richtigkeit folgender Gleichungen:

$$E' = E + e,\ S' = S + s;\ K' = K + k,\ P' = P + 1;$$

oder

$$\begin{aligned} E' &= E + e, \\ S' &= S + s, \\ -K' &= -K - k, \\ -P' &= -P - 1. \end{aligned}$$

Folglich, wenn man addirt:

$$E' + S' - K' - P' = E + S - K - P + e + s - k - 1.$$

Aber nach dem Obigen

$$e + s - k - 1 = 0.$$

Also

$$E' + S' - K' - P' = E + S - K - P.$$

Folglich $E + S - K - P$ für jedes Netz von Polyedern eine constante Größe. Ist nun $P = 1$, so ist nach dem Euler'schen Satze

$$E + S = K + 2,$$

$$E + S - K - P = 2 - 1 = 1.$$

Also ist in jedem Netze von Polyedern

$$E + S - K - P = 1,\ E + S = K + P + 1;$$

d. i. in jedem Netze von Polyedern ist die Summe der Anzahl der Ecken und Seitenflächen um Eins größer als die Summe der Anzahl der Polyeder, welche das Netz bilden, und die Anzahl der Kanten.

Diesen merkwürdigen Satz hat ebenfalls Cauchy gefunden.

Mit dem Beweise der vorhergehenden Sätze haben sich mehrere Mathematiker beschäftigt. Gewöhnlich gründet

ı auf die Formel für den Flächeninhalt ſphä-
one (Trigonometrie. 92.), worüber u. A.
Elém. de Géométrie. Onzième éd. p. 228.
ſch Sammlung geometriſcher Aufgaben. II.
. S. 93. nachzuſehen ſind. Auf dieſe Weiſe
ß der Euler'ſche Satz bewieſen werden, und über-
ie Anwendung des Satzes von den ſphäriſchen
ei einem an ſich ſo einfachen Satze einer guten
ıt gemäß zu ſeyn. Andere Beweiſe haben ge-
by (a. a. O. Crelles Journal der Math. I.
, Rothe (Kastners Archiv für die ge-
ıturlehre. B. IV. S. 306.), Steiner in
ournal. I. 4. S. 364. Den hier mitgetheil-
für den Euler'ſchen und den erſten Satz von
ıbe ich zuerſt in Crelles Journal. II. 4.
ben; er iſt ſodann wiederholt worden in dem
s sciences mathém. par Férussac. Avril.
5., und in einer Abhandlung von Gergonne
ıles de Mathématiques. T. XIX. p. 333.
Abhandlung hat Gergonne auch den zwei-
ın Cauchy auf die obige Art bewieſen, in

ind die Winkelsummen der einzelnen Seitenflächen (Viel-
ck. 3.) $2n-4$, $2n'-4$, $2n''-4$, $2n'''-4$, ... ;
olglich die Summe aller Winkel

$$= 2(n + n' + n'' + n''' + \ldots) - 4S ,$$

der, da offenbar

$$n + n' + n'' + n''' + \ldots = W = 2K$$

t (2.), obige Summe $= 4K - 4S = 4(K-S)$
$= 4(E-2)$ (1.).

4. Wird ein Polyeder von m Seitenflächen von gera-
er und n Seitenflächen von ungerader Seitenzahl be-
ränzt; so ist n immer eine gerade Zahl. Sind nämlich
α, $2\alpha'$, $2\alpha''$, ꝛc., $2\gamma+1$, $2\gamma'+1$, $2\gamma''+1$, ꝛc. die
Seitenzahlen der einzelnen Seitenflächen; so ist offenbar

$$W = 2(\alpha + \alpha' + \alpha'' + \ldots + \gamma + \gamma' + \gamma'' + \ldots) + n .$$

Da nun (2.) W immer eine gerade Zahl ist; so ist es auch.
Der Satz gilt auch, wenn $m = o$.

5. Die Anzahl der Dreiecke, Vierecke, Fünfecke,
ſ. w., welche ein Polyeder begränzen, ſey a, b, c, d, ...;
ist offenbar $S = a + b + c + d + \ldots$, und
$V = 2K = 3a + 4b + 5c + 6d + \ldots$. Aber (1.)
$+ S = K + 2$, $2E + 2S = 2K + 4$. Alſo

$$2E + 2a + 2b + 2c + 2d + \ldots .$$
$$= 4 + 3a + 4b + 5c + 6d + \ldots ,$$
$$2(E-2) = a + 2b + 3c + 4d + \ldots ,$$

lglich $a + 2b + 3c + 4d + \ldots$ immer eine gerade Zahl,
wie nach dem Obigen auch $3a + 4b + 5c + 6d + \ldots$. Die
lbe Summe aller ebenen Winkel ist $= a + 2b + 3c + 4d + \ldots$
1.), immer für den rechten Winkel als Einheit.

6. Sey

$$b + 2c + 3d + 4e + \ldots = p ;$$

ist

$$K = \tfrac{1}{2}(3a + 4b + 5c + 6d + \ldots) \quad (5.)$$
$$= \tfrac{3}{2}(a + b + c + d + \ldots)$$
$$+ \tfrac{1}{2}(b + 2c + 3d + 4e + \ldots) = \tfrac{3}{2}S + \tfrac{1}{2}p .$$

Da nun ferner $E = K - S + 2$ (1.); so ist $E =$
$+ \tfrac{1}{2}S + \tfrac{1}{2}p$. Alſo, weil p in gewiſſen Fällen zwar
$= o$, aber nie negativ ſeyn kann, immer $K \geqq \tfrac{3}{2}S$, $E \geqq$

)a jede Ecke wenigſtens von 3 ebenen Win-
virb; ſo iſt $W \geqq 3E$. Aber $W = 2K$ (2.).
E, oder $K \geqq \frac{3}{2}E$.

$K \geqq 3S$, $2K \geqq 3E$. Aber $S = K - E + 2$,
$S + 2$ (1.). Alſo $2K \geqq 3K - 3E + 6$,
$\cdot 3S + 6$, $3E \geqq K + 6$, $3S \geqq K + 6$,
$\cdot 6$, $K \leqq 3S - 6$.

n man $K + 6 + \alpha = 3E$, $K + 6 + \beta = 3S$
nun auch $K = \frac{3}{2}E + \gamma$, $K = \frac{3}{2}S + \delta$
verden kann; ſo iſt

$+ 6 + \alpha = 3E$, $\frac{3}{2}S + \delta + 6 + \beta = 3S$;
$+ \gamma + 6 = \frac{3}{2}E$, $\beta + \delta + 6 = \frac{3}{2}S$;
$= 4 + \frac{3}{2}(\alpha + \gamma)$, $S = 4 + \frac{3}{2}(\beta + \delta)$.

n weder die Anzahl der Ecken, noch der Sei-
in einem Polyeder < 4 ſeyn. Da $K =$
(1.); ſo erhält man leicht

$$K = 6 + \tfrac{3}{2}(\alpha + \beta + \gamma + \delta),$$

ahl der Kanten kann alſo nie < 6 ſeyn. Die
yramide, in welcher $E = 4$, $S = 4$, $K = 6$,
Körper mit der geringſten Anzahl von Ecken.

0. Dieſe Tabelle giebt zu folgenden Bemerkungen nlaſſung.

) Kein Körper kann 7 Kanten haben, weil, für : 7, S zwiſchen die Gränzen $2 + \frac{7}{3}$, $\frac{14}{3}$, d. i. $4\frac{1}{3}$, fallen müßte, zwiſchen denen keine ganze Zahl liegen

) Kein Körper kann von lauter ſolchen Figuren ein- ɔſſen werden, die mehr als 5 Seiten haben. Hätten ch alle Seitenflächen mehr als 5 Seiten, ſo wäre ar $W \leqq 6S$, $2K \leqq 6S$ (2.), $K \leqq 3S$, da doch er Tabelle $K \leqq 3S - 6$, alſo immer $< 3S$ iſt.

Es giebt keinen Körper, deſſen Ecken alle von 6 ehrern ebenen Winkeln gebildet würden. Wäre dies h der Fall; ſo wäre $W \leqq 6E$, $2K \leqq 6E$ (2.), E, da doch nach der Tabelle $K \leqq 3E - 6$, alſo $< 3E$ iſt.

Auch ergiebt ſich hieraus folgende Tabelle für die ben eckigen Körper.

Anzahl der			Namen der Körper.
en- en.	Ecken.	Kanten.	
	4	6	Tetraedrum tetragonum
	5	8	Pentaedrum pentagonum
	6	9	— — — hexagonum
	5	9	Hexaedrum pentagonum
	6	10	— — — hexagonum
	7	11	— — — heptagonum
	8	12	— — — octogonum
	6	11	Heptaedrum hexagonum
	7	12	— — — heptagonum
	8	13	— — — octogonum
	9	14	— — — enneagonum
	10	15	— — — decagonum
	6	12	Octaedrum hexagonum
	7	13	— — — heptagonum
	8	14	— — — octogonum
	9	15	— — — enneagonum
	10	16	— — — decagonum
	11	17	— — — endecagonum
	12	18	— — — dodecagonum
	etc.	etc.	etc.

. Karſtens Lehrbegriff. II. 1. S. 569.

per, welche von lauter **Dreiecken** eingeſchloſſen,
cken alle entweder von **fünf oder ſechs** ebenen
ildet werden, haben immer **12 Ecken** der erſten
nzahl der Ecken der erſten **Art** ſey $=$ V, die der
VI; ſo iſt $E = V + VI$, $W = 5.V + 6.VI$
. Alſo $6.V + 6.VI = 6E$, $5.V + 6.VI$
$= 6E - 2K$. Da nun alle Seitenflächen
); ſo iſt $W = 3S = 2K$ (2.), $E + S =$
), $2E + 2S = 2K + 4$, $2E + 2S =$
$2E = S + 4$, $6E = 3S + 12$, $V =$
$- 3S = 12$.
$5.V + 6.VI = 2K$, $5.V + 5.VI = 5E$,
$- 5E = 3S - 5E$. Aber $2E = S + 4$,
$+ 10$, $VI = \frac{1}{2}S - 10$, und $E = V + VI$
$10 + 12 = \frac{1}{2}S + 2$, auch $E = VI + 12$.
n Polyeder werde wieder von a **Dreiecken**,
, c Fünfecken, u. ſ. f. eingeſchloſſen. Werden
zwei mit einander verbunden; ſo iſt die Anzahl
ungslinien offenbar $= \frac{E(E-1)}{2}$. Will man
er Diagonalen D haben; ſo muß man hiervon

woraus folgt, daß das letztere Aggregat immer eine gerade Zahl ist. Also ist auch $3^2.a + 5^2.c + 7^2.e + \ldots$ immer eine gerade Zahl.

13. Wichtig und interessant ist auch noch die Frage, wie viele Stücke eines Polyeders gegeben seyn müssen, wenn dasselbe völlig bestimmt seyn soll. Sey eine Seitenfläche ein neck, so sind zu deren Bestimmung $2n-3$ Stücke nöthig (Vieleck. 8.). Außerhalb dieses ecks liegen $E-n$ Ecken des Polyeders. Zur Bestimmung der Lage eines Punktes im Raume sind aber immer 3 Stücke, z. B. seine drei Coordinaten in Bezug auf ein gewisses System, nöthig, welches $3(E-n)+2n-3 = 3E-n-3$ Bestimmungsstücke giebt. Diese Anzahl ist aber zu groß. Bezeichnet man nämlich die Seitenzahlen der übrigen Seitenflächen durch n', n'', n''', ...; so liegen immer n', n'', n''' .... Ecken des Polyeders in einer Ebene. Die Lage einer Ebene wird aber durch 3 Punkte bestimmt, und, wenn also die Lage des n'ecks z. B. einmal durch 3 Punkte bestimmt ist; so braucht man zur Bestimmung der übrigen $n'-3$ Punkte in dieser Ebene nur noch $2(n'-3)$ Bestimmungsstücke. Oben rechneten wir $3(n'-3)$ Bestimmungsstücke für diese $n'-3$ Punkte, also $n'-3$ zu viel, welches für alle übrigen Seitenflächen mit n'', n''', .., Seiten eben so gilt. Folglich muß die Summe $(n'-3)+(n''-3)+(n'''-3)+\ldots$ von dem obigen $3E-n-3$ abgezogen werden. Die Summe dieser Reihe ist $= n' + n'' + n''' + \ldots - 3(S-1) = n + n' + n'' + n''' + \ldots - n - 3(S-1) = W - n - 3(S-1) = 2K - n - 3(S-1)$ (2.). Also die Anzahl der nöthigen Bestimmungsstücke $= 3E - n - 3 - 2K + n + 3(S-1) = 3(E+S) - 2K - 6 = 3(K+2) - 2K - 6$ (1.) $= K$, d. h. die Anzahl der nöthigen Bestimmungsstücke eines Polyeders ist immer der Anzahl seiner Kanten gleich, woraus man aber nicht etwa schließen darf, daß durch jede K Stücke ein Polyeder völlig bestimmt werde, indem ja dann z. B. jedes Prisma durch seine Kanten völlig bestimmt seyn müßte, welches offenbar nicht der Fall ist, da man

behaltung der Grundfläche durch verſchiedene Seitenkanten mit denſelben Kanten ſehr verismen conſtruiren kann. Der Sinn unſers ein der, daß die Anzahl der nöthigen Beſtimeben ſo groß iſt wie die Anzahl der Kanten, aber weiter auf die richtige Auswahl der nömmungsſtücke ankommen würde.

leichung der Polyeder mit einander im Allgemeinen.

Bezug auf die Vergleichung zweier Polyeder ſind vier Arten denkbar.

der heißen einander gleich, oder nach Le. a. O. p. 276.) äquivalent, wenn ſie liche Räume einſchließen.

gruente, oder nach Legendre (a. a. O.) olyeder ſind ſolche, welche ſich ſo in einander daß ſie nur ein einziges Polyeder derſelben Art ihre Oberflächen ſich alſo völlig decken. Poly-

rung enthaltene Satz, wenigstens so allgemein ausgesprochen, ein falscher Satz ist, welches sogleich erhellet, wenn man sich ober- und unterhalb ein und derselben Seitenfläche eines Polyeders ein und dieselbe Pyramide beschrieben denkt, wodurch man, wenn man die erste Pyramide als zu dem Polyeder addirt, die zweite als davon subtrahirt ansieht, zwei Polyeder mit denselben Seitenflächen erhält, welche offenbar nicht congruent. Dem Geiste der Elemente des Euclides ist es indeß ganz gemäß, nur Polyeder mit lauter auswärts gehenden Körperwinkeln, convexe Polyeder, zu betrachten, und es wird sich also fragen, ob vielleicht der in der obigen Erklärung enthaltene Satz unter der Einschränkung auf convexe Polyeder richtig ist, welche Frage in III. beantwortet werden wird. Robert Simson läßt die Erklärung in seiner Bearbeitung der Elemente ganz weg, und fügt einige Erläuterungen bei, die den obigen ähnlich sind. In der französischen Uebersetzung des Simsonschen Euclides von Friedrich Castillon (Berlin. 1767. 8.) ist bei genannter Erklärung nur bemerkt: omise.

c) Symmetrische Polyeder sind solche, welche über einer gemeinschaftlichen Grundfläche auf beiden Seiten derselben so liegen, daß die Spitzen ihrer in gleicher Anzahl vorhandenen körperlichen Winkel je zwei in ein und derselben auf der gemeinschaftlichen Grundfläche senkrechten Linie in gleichen Entfernungen von der Grundfläche auf beiden Seiten derselben liegen. Daß diese Erklärung sich leicht noch einigermaßen erweitern ließe, und die Bedingung einer gemeinschaftlichen Grundfläche nur größerer Einfachheit wegen eingeführt worden, fällt in die Augen. Daß symmetrische Polyeder wegen der umgekehrten Ordnung, in der ihre einzelnen, wenn auch gleichen, Theile liegen, nicht zur Deckung gebracht werden können, also nicht congruent, sondern nur gleich sind, erhellet leicht. Euclid hat diesen Unterschied übersehen, und ist deshalb, besonders XI. 28., in Fehler verfallen. Der Begriff der Symmetrie ist von den französischen Geometern, besonders von Legendre, in die Geometrie eingeführt. M. v. d. Art. Symmetrie.

nliche Polyeder sind nach Euclid (XI.
che, welche von einer gleichen Anzahl ähnlicher
eschlossen werden; eine Erklärung, auf welche
merkungen wie in (b) anwendbar sind. Ro-
son erklärt daher ähnliche Polyeder als solche,
liche Winkel in der Ordnung, wie sie auf ein-
, gleich sind, und welche von gleich vielen ähn-
en eingeschlossen werden. Indeß scheint diese
einige überflüssige Bedingungen zu enthalten,
r zu erörtern hier der Raum fehlt. Legen-
D. p. 163. 164.) giebt daher folgende Erklä-
ei dreieckige Pyramiden sind ähnlich, wenn sie
, ähnlich gelegene, und gleich gegen einander
eitenflächen haben. Polyeder sind ähnlich,
i ähnliche Grundflächen haben, und die außer-
en liegenden Ecken durch ähnliche und ähnlich
seitige Pyramiden bestimmt werden. Obgleich
re Schriftsteller, z. B. Kramp (Elemens
Cologne. 1806. p. 270. 276.) hiervon ab-
Definitionen geben; so werden wir in diesem

zen Stücke gleich. Sey (Fig. 120.) $A = A'$, $AC = A'C'$, $AB = A'B'$. Man fälle von C, C′ auf ABD, A′B′D′ die Perpendikel CE, C′E′, von E, E′ auf AD, BD, A′D′, B′D′ die Perpendikel EF, EG, E′F′, E′G′, und ziehe CF, CG, C′F′, C′G′, welche auch auf AD, BD, A′D′, B′D′ senkrecht seyn werden; so läßt sich leicht aus der Voraussetzung zeigen, daß $\measuredangle CFE \cong \measuredangle C'F'E'$ ist, woraus $CE = C'E'$, $FE = F'E'$. Auch ist klar, daß, wegen der gleichen Bogen AC, A′C′, $FD = F'D'$ ist. Also $\measuredangle FDE \cong \measuredangle F'D'E'$, und folglich $ED = E'D'$, $\angle EDF = \angle E'D'F'$, woraus, da, wegen der gleichen Bogen AB, A′B′, auch $\angle ADB = \angle A'D'B'$ ist, leicht $\angle EDG \angle E'D'G'$, $\measuredangle EDG \cong \measuredangle E'D'G'$, $EG = E'G'$, $\measuredangle CEG \cong \measuredangle C'E'G'$, $\angle CGE = \angle C'G'E'$, d. i. $B = B'$ folgt. Durch eine ähnliche Construction, indem man von B, B′ Perpendikel auf CAD, C′A′D′ fällt, zeigt man, daß $C = C'$. Da wegen der Congruenz der Dreiecke CEG, C′E′G′ auch $CG = C'G'$ ist; so ist auch $BC = B'C'$. Dieser Satz ist in vielen Lehrbüchern durch das Princip der Deckung bewiesen, welches aber nur zulässig seyn würde, wenn die gleichen Stücke in beiden Dreiecken ganz in einerlei Ordnung lägen. Er liegt den folgenden Untersuchungen zum Grunde, und mußte daher hier vorausgeschickt werden.

17. Mit Hülfe dieses Satzes lassen sich folgende Sätze ganz eben so wie die entsprechenden Sätze bei ebenen Dreiecken beweisen: 1) Im gleichschenklichen sphär. Dreiecke sind die Winkel an der Grundlinie gleich, und umgekehrt. 2) Der größern Seite steht der größere Winkel gegenüber, und umgekehrt. 3) Sind in zwei sphär. Dreiecken zwei Seiten gleich, die eingeschlossenen Winkel aber ungleich; so steht dem größern Winkel eine größere Seite gegenüber, und umgekehrt.

18. Wir werden nun allgemein untersuchen, ob mit denselben Seitenflächen eines convexen Polyeders in derselben Aufeinanderfolge, indem man ihnen verschiedene Neigungen giebt, ein von jenem verschiedenes Polyeder beschrieben werden kann. Zwei dreiseitige körperliche Ecken

nt, wenn ſie von gleichen ebenen Winkeln in
nung eingeſchloſſen werden, wovon man ſich ſo
ugt, wenn man ſich die beiden Ecken mit ein
n ähnlich liegenden Seitenflächen auf einander
mit den andern Seitenflächen Kegelflächen be
kt, welche ſich, ſo wie ihre Durchſchnittslinien,
beiden Ecken, offenbar decken werden. Da
man bei angedeuteter Unterſuchung nur Poly
chten, bei denen keine Ecke weniger als vierſeitig
le Veränderung der Neigung der Seitenflächen
Theil des Polyeders Einfluß haben kann, wel
hält, wenn man ſich nach und nach alle dreiſei
abgeſchnitten denkt. Hiernächſt ſind folgende
ufig zu beweiſen.

enn in einem ſphäriſchen Vielecke ABCDEF
) alle Seiten bis auf eine, AF, gegeben ſind,
ſt einen der, der Seite AF nicht anliegenden,
verändern, indem alle übrigen Winkel unge
n; ſo nimmt AF mit dem veränderten Winkel
u und ab, wenn das Polygon immer conve

ie es vorher abgenommen hat. Nehmen mehrere der
icht an AF liegenden Winkel zugleich zu, oder zugleich ab;
ist aus dem Vorigen klar, daß durch dieses mehrfache
u- oder Abnehmen auch eine mehrfache Zu- oder Ab-
ahme von AF hervorgebracht werden wird, wenn nur
is Polygon immer convex bleibt.

20. In einem convexen sphärischen Polygon von mehr
s drei, z. B. n, Seiten, dessen Seiten constant blei-
n, indem sich die Winkel ändern, bezeichne man alle
rößer gewordenen Winkel durch +, alle kleiner gewor-
nen durch —, die ungeändert gebliebenen Winkel dage-
n durch kein Zeichen; so müssen in der Reihe dieser Zei-
en immer wenigstens vier Zeichenwechsel vorkommen.

1) Man denke sich irgend eine Seite des Polygons;
stehen derselben n—2 Winkel gegenüber. Hätten sich,
dem vielleicht einige ungeändert geblieben wären, diese
—2 Winkel bloß vermehrt, oder bloß vermindert; so müßte
ach jene Seite größer oder kleiner geworden seyn (19.),
a doch die Seiten constant bleiben sollen. Also können
icht lauter +, oder lauter — Zeichen, sondern + und
- Zeichen, d. i. es müssen wenigstens zwei Zeichenwechsel
orkommen.

2) Kämen nun (Fig. 122.) bloß zwei Zeichenwechsel
or, so denke man sich in dem ursprünglichen unverän-
rten Polygon durch zwei willkührliche, in beiden Poly-
nen aber gleich gelegene, Punkte α, β in AB, FE den
ogen eines größten Kreises $\alpha\beta$ gelegt; so müßte, da die der
β gegenüber liegenden Winkel im Polygon αAHGFβ nur
genommen, die der $\alpha\beta$ gegenüber liegenden Winkel im
olygon αBCDEβ nur abgenommen haben, $\alpha\beta$ sich zu-
leich vergrößert und vermindert haben (19.), welches
sammen nicht statt finden kann.

3) Eben so wenig können bloß drei Reihen von Zei-
en vorkommen, weil die erste und dritte Reihe immer
us gleichen Zeichen bestehen, sich daher an einander an-
hließen, und daher doch eigentlich nur zwei Zeichenreihen,
nd zwei Zeichenwechsel existiren würden.

muß es wenigſtens vier Zeichenwechſel geben.

ſchreibet man aus der Spitze einer convexen Ecke von mehr als drei Seiten mit willkühr- us eine Kugel; ſo umſchließt die Ecke ein ſphä- xes Polygon, von deſſen Seiten die Ecke ein- Winkel gemeſſen werden, und deſſen Winkel winkeln der Ecke gleich ſind. Alſo iſt der vorige elbar auf convexe körperliche Ecken von mehr ten anwendbar.

n läßt ſich beweiſen, daß durch Veränderung en der Seitenflächen eines convexen Polyeders ehr als dreiſeitigen körperlichen Ecken (18.), ie Seitenflächen ſelbſt ungeändert bleibt, und rdnung keine Veränderung erleidet, kein von nen verſchiedenes convexes Polyeder erzeugt .

le Neigungswinkel der Seitenflächen ſollen ung erlitten haben. Die Anzahl aller Zeichen- llen Ecken des Polyeders ſey = n; ſo iſt, da

Die größte Anzahl der Zeichenwechsel auf den Seiten einer ebenen Figur erhält man aber, wenn man die Zeichen immer abwechseln läßt. Jenachdem die Figur $2m$ oder $2m+1$ Seiten hat, ist die Folge der Zeichen:

$$\begin{array}{cccccccccccc} (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) & \ldots\ldots & (2m-1) & (2m) \\ - & + & - & + & - & + & \ldots\ldots & - & + & , \\ + & - & + & - & + & - & \ldots\ldots & + & - & , \end{array}$$

oder

$$\begin{array}{ccccccccccccc} (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) & \ldots\ldots & (2m-1) & (2m) & (2m+1) \\ - & + & - & + & - & + & \ldots\ldots & - & + & - & , \\ + & - & + & - & + & - & \ldots\ldots & + & - & + & . \end{array}$$

Denkt man sich jede dieser Reihen in einen Kreis geschrieben; so ist klar, daß man in jedem Falle $2m$ Zeichenwechsel erhält, die Seitenzahl mag gerade oder ungerade seyn, als größte Anzahl der Zeichenwechsel. Wird nun das Polyeder von a Dreiecken, b Vierecken, c Fünfecken, u. s. f. eingeschlossen; so ist also die Anzahl der Zeichenwechsel auf jeder Art von Figuren überhaupt

$$\leqq 2a,\ \leqq 4b,\ \leqq 4c,\ \leqq 6d,\ \leqq 6e,\ \text{etc.},$$

$$n \leqq 2a + 4b + 4c + 6d + 6e + \ldots .$$

Aber (5.)

$$2K = 3a + 4b + 5c + 6d + 7e + \ldots ,$$

$$S = a + b + c + d + e + \ldots ,$$

$$4E = 4K - 4S + 8 \quad (1.)$$

$$= 8 + 2a + 4b + 6c + 8d + 10e + \ldots .$$

Also offenbar $n \leqq 4E - 8$, oder immer $n < 4E$, da doch nach dem Obigen $n \geqq 4E$ seyn muß. Folglich ist die angenommene Veränderung aller Neigungswinkel der Seitenflächen unsers Polyeders unstatthaft.

2) Haben nicht alle Neigungswinkel der Seitenflächen eine Veränderung erlitten; so nehme man auf die Kanten, an welchen sich die Neigungswinkel nicht geändert haben, gar keine Rücksicht, wodurch man ein Polyeder erhält, das nicht bloß von ebenen Figuren, sondern zum Theil von nicht in einer Ebene liegenden Figurennetzen als Seitenflächen eingeschlossen wird, bei welchem aber nun an allen Kanten die Neigungswinkel sich geändert haben. Auf ein solches Polyeder ist das vorige Raisonne-

lls völlig anwendbar, wenn nur der Euler-
uch für ſolche Polyeder ſeine Richtigkeit behält,
That der Fall iſt. Denn man betrachte bei
der, wo $E + S = K + 2$ iſt (1.), ein Netz
eitenflächen als eine Seitenfläche, und be-
nzahl der Ecken, Kanten und Figuren dieſes
E', K', S'; ſo iſt nach Cauchy's Satze
$S' = K' + 1$. Die Anzahl der Ecken, Kan-
tenflächen des ſo betrachteten Polyeders ſey E_1,
ie Anzahl der äußern und innern Ecken und
Netzes dagegen E'', K'' und E''', K'''; ſo iſt
$E'' + E''' + S' = K'' + K''' + 1$,
ffenbar $E'' = K''$ iſt:
$$E''' + S' = K''' + 1 .$$
ittelſt der Gleichung
$$E + S = K + 2$$
raction:
$$E - E''' + S - S' = K - K''' + 1 .$$
ogleich erhellet:
$E_1 = E - E'''$, $K_1 = K - K'''$,

24. Da ein ebenes Dreieck bloß durch seine Seiten bestimmt wird; so wird auch ein von lauter Dreiecken eingeschlossenes Polyeder bloß durch seine Kanten bestimmt, und zwei Polyeder, deren sämmtliche Seitenflächen Dreiecke sind, sind congruent, wenn die Kanten gegenseitig in einerlei Ordnung gleich sind.

IV. Symmetrische Polyeder.

25. Zunächst ist zu beweisen, daß in zwei von gleichen ebenen Winkeln eingeschlossenen dreiseitigen körperlichen Ecken bei A und H (Fig. 123.) die Seitenflächen gleich gegen einander geneigt sind. Nimmt man nämlich AK $=$ PH, fällt von K und P auf die gegenüber liegenden Seitenflächen die Perpendikel KN, PQ, und von N, Q auf AC, AD, HF, HG die Perpendikel LN, MN, QT, QS, und zieht LK, KM, PT, PS, welche auch auf AC, AD, HF, HG senkrecht seyn werden; so folgt aus der Voraussetzung leicht, daß $\triangle$AKL $\cong$ PHS, $\triangle$AKM $\cong$ $\triangle$PHT, also KL $=$ PS, KM $=$ PT, so wie auch AL $=$ HS, AM $=$ HT, also ALNM $\cong$ HTQS, und folglich LN $=$ QS, MN $=$ QT, also $\triangle$KLN $\cong$ $\triangle$PSQ, $\triangle$KMN $\cong$ $\triangle$PQT, $\angle$ KLN $=$ $\angle$ PSQ, $\angle$ KMN $=$ $\angle$ PTQ. Die Gleichheit der dritten Neigungswinkel folgt eben so, wenn man nur die Punkte K, P in AD, FH oder AC, GH annimmt.

26. In zwei symmetrischen Polyedern sind alle ähnlich liegenden Seitenflächen congruent, und alle gleich gegen einander geneigt.

Sey ABCDE (Fig. 124.) die gemeinschaftliche Grundfläche der beiden Polyeder (14?c.), und M, N; M′, N′ correspondirende Ecken derselben; so sind MM′, NN′ auf der gemeinschaftlichen Grundfläche, also auch auf mn senkrecht, und es ist Mm $=$ M′m, Nn $=$ N′n (14. c.), also offenbar Trap. MNmn $\cong$ Trap. M′N′mn, MN $=$ M′N′, so daß also je zwei correspondirende Spitzen beider Polyeder gleich weit von einander entfernt sind. Kommen noch die Ecken P, P′ dazu; so ist eben so MP $=$ M′P′,

, alſo $\triangle MNP \cong \triangle M'N'P'$ und folglich jede drei correſpondirenden Ecken der beiden Polytene Dreiecke einander congruent. Kommen die Ecken Q, Q′ hinzu, und die Dreiecke Q liegen in einer Ebene; ſo läßt ſich zeigen, N′P′, N′P′Q′ in einer Ebene liegen müſſen. nämlich MQ, M′Q′; ſo ergiebt ſich aus dem mittelbar, daß $\triangle MPQ \cong \triangle M'P'Q'$, $\angle MPQ$ Q′ iſt. Da aber nach dem Obigen auch $\angle MPN$ N′, $\angle NPQ = \angle N'P'Q'$, und, weil MPN, ner Ebene liegen, $\angle MPQ = \angle MPN$ iſt; ſo iſt auch $\angle M'P'N' + \angle N'P'Q' =$ welches nicht der Fall ſeyn könnte, wenn N′P′Q′ nicht in einer Ebene lägen (Elem. Aus allem Bisherigen erhellet, daß alle Seier beiden Polyeder aus lauter congruenten derſelben gegenſeitigen Lage zuſammengeſetzt, zwei correſpondirende congruent ſind. Um zu aß zwei in NP, N′P′ z. B. zuſammenſtoßende n gleich gegen einander geneigt ſind, denke der MQ, M′Q′ gezogen; ſo werden nach dem

wird, bei dessen Beweise Euclides (XI. 28.) den Unterschied zwischen Congruenz und Symmetrie übersehen hat (S. d. a. Art.), läßt sich auf folgende Art streng beweisen. Man denke sich die Diagonale AB (Fig. 125.) in n gleiche Theile getheilt, und durch alle Theilpunkte mit den Seitenflächen des Parallelepipedons parallele Ebenen gelegt; so wird dadurch das Parallelepipedon offenbar in n^2 congruente Parallelepipeda getheilt, von denen n um die Diagonale liegen. Jedes dieser Parallelepipeda sey $= p$, der Inhalt des gegebenen $= P$; so ist $p = \frac{P}{n^2}$. Auf jeder Seite der Diagonalfläche liegen $\frac{n^2-n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ Parallelepipeda, deren jedes $= p$, und, setzen wir die beiden Prismen, in welche das gegebene Parallelepipedon durch die Diagonalfläche getheilt wird, $= P'$ und $= P''$; so ist offenbar $P' > \frac{n(n-1)}{2} p$, $P'' > \frac{n(n-1)}{2} p$. Also

$$P' = \frac{n(n-1)}{2} p + \Delta = \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{P}{n^2} + \Delta,$$

$$P'' = \frac{n(n-1)}{2} p + \Delta'' = \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{P}{n^2} + \Delta'',$$

$$P' = \frac{n-1}{2n} P + \Delta, \quad P'' = \frac{n-1}{2n} P + \Delta'',$$

wo offenbar sowohl Δ als Δ'' kleiner als die Summe der um die Diagonale liegenden Parallelepipeda ist, d. i. $\Delta < np, < n \cdot \frac{P}{n^2}, < \frac{P}{n}$; $\Delta'' < np, < n \cdot \frac{P}{n^2}, < \frac{P}{n}$. Wäre nun nicht $P' = P''$, also auch nicht $\Delta = \Delta''$; so sey zunächst $\Delta > \Delta''$, $= \Delta'' + \delta$, $\Delta - \Delta'' = \delta$. Nimmt man, welches offenbar immer möglich ist (M. s. Elem. X. 1.), n so groß, daß $\frac{P}{n} < \delta$ ist; so ist um so mehr nach dem Obigen $\Delta < \delta$, $\Delta - \Delta'' < \delta$, gegen das obige $\Delta - \Delta'' = \delta$. Wäre ferner $\Delta < \Delta''$, $\Delta'' = \Delta + \delta'$, $\Delta'' - \Delta = \delta'$; so nehme man n so groß, daß $\frac{P}{n} < \delta'$ ist; so ist um so mehr $\Delta'' < \delta'$, $\Delta'' - \Delta < \delta'$, gegen $\Delta'' - \Delta = \delta'$. Also muß $\Delta = \Delta''$, $P' = P''$ seyn.

Einen andern Beweis hat Pfaff gegeben im Art. Prisma des Probehefts zu der von Ersch und Gruber

nen Encyklopädie. Auch ſ. Lorenz Grund-
ath. N. A. v. Gerling. Helmſt. 1820.
nd die bekannten Schriften von Karſten.

V. Aehnliche Polyeder.

ei ähnliche dreieckige Pyramiden (14. d.) ſind
ähnlichen Dreiecken eingeſchloſſen, und haben
rliche Winkel, alſo auch gleiche Flächenwinkel.
ung ähnlicher dreieckiger Pyramiden (14. d.)
) (Fig. 126.) $\triangle ABC \sim \triangle abc$, $\triangle ABD \sim$
die Neigungswinkel an den Kanten AB, ab
er gleich; ſo kann man ſich die beiden Pyrami-
ſo in einander gelegt denken, wie die Figur
ß $\triangle BEG \sim \triangle ABD$, $\triangle BEF \sim \triangle ABC$ iſt,
pt die Pyramide BEFG mit abcd einerlei iſt.
B : BE = BD : BG = BC : BF, folglich
$\triangle BGF \sim \triangle bcd$. Alſo BD : BG = AD : GE
, AB : BE = AC : EF = AD : EG, BC : BF
F = CD : FG; folglich $\triangle ACD \sim \triangle EFG \sim$

rallel sind. Bezeichnet man nun diese beiden Dreiecke durch F, f, ihre Entfernungen von B aber durch E, e; so ist $F:f = CD^2 : FG^2 = BD^2 : BG^2 = E^2 : e^2$; aber auch $E:e = E:e$; also $F.E : f.e = E^3 : e^3$. Sind aber P, p die Volumina der beiden Pyramiden; so ist $P:p = \frac{1}{3}F.E : \frac{1}{3}f.e = F.E : f.e = E^3 : e^3$, und da, wenn K, k zwei willkührliche Kanten sind, indem alle Kanten einerlei Verhältniß zu einander haben (28.), offenbar $E:e = K:k$, $E^3 : e^3 = K^3 : k^3$ ist; so ist auch $P:p = K^3 : k^3$, d. h. die Volumina zweier ähnlichen dreieckigen Pyramiden verhalten sich wie die Würfel zweier ähnlich liegenden Kanten zu einander.

31. Zwei ähnliche Polyeder (14. d.) werden von lauter ähnlichen und gleich gegen einander geneigten Figuren begränzt. ABCDE, abcde (Fig. 127.) seyen die beiden ähnlichen Grundflächen der Polyeder (14. d.), und F, G; f, g irgend zwei ähnlich liegenden Ecken in beiden, welche durch die ähnlichen dreiseitigen Pyramiden ABCF, ABCG; abcf, abcg bestimmt werden. Wegen Aehnlichkeit dieser Pyramiden sind FAC, GAC; fac, gac gegen die Grundflächen (28), also auch gegen einander gleich geneigt, und überdies ist FAC ∽ fac, GAC ∽ gac (28.), also Pyr. ACFG ∽ Pyr. acfg (14. d.), und folglich $FG:fg = FA:fa = AB:ab$, da auch $\triangle ABF \sim \triangle abf$ (28.). Die Entfernungen zweier ähnlich liegenden Ecken der beiden Polyeder verhalten sich also immer zu einander wie zwei ähnlich liegende Seiten der Grundflächen, und da die Seiten der Grundflächen alle einander proportional sind; so haben auch alle Entfernungen zweier ähnlich liegenden Ecken, also auch alle Kanten der beiden Polyeder, einerlei Verhältniß zu einander. Kommt eine neue Ecke H, h hinzu, so sind, wie so eben bewiesen, die Seiten der Dreiecke FGH, fgh proportional, diese Dreiecke, so wie jede zwei durch drei ähnlich liegende Ecken bestimmten Dreiecke, also einander ähnlich. Kommt noch eine neue Ecke K, k hinzu; so läßt sich ganz wie in (26.) zeigen, daß, wenn FGH, GHK in einer Ebene liegen, dies auch mit fgh, ghk der Fall seyn muß, und daß FGH, GHK und fgh, ghk

einander geneigt ſind, da aus der Aehnlichkeit
eben ſo wie aus ihrer Congruenz die Gleichheit
folgt. Denk man ſich nun die Oberflächen
eder auf ähnliche Art in Dreiecke zerlegt; ſo
ologen Dreiecke einander ähnlich und gleich ge-
geneigt, welches alſo auch von den ganzen ho-
itenflächen gilt. Aus der Gleichheit der Flä-
olgt unmittelbar die Gleichheit der homologen
Winkel. Der hier bewieſene Satz iſt die von
Simſon gegebene Definition ähnlicher Polyeder

e unmittelbare Folge hieraus iſt, daß die ge-
n, welche irgend vier ähnlich liegende Ecken
ichen Polyeder mit einander verbinden, zwei
ieckige Pyramiden einſchließen, indem dieſe Ri-
i Verhältniß zu einander haben (31.), alſo
eiecke einſchließen, die Ecken der beiden Pyra-
ich von gleichen ebenen Winkeln gebildet werden,
eitenflächen der Pyramiden alſo gleich gegen
neigt ſind (25.). Demnach laſſen ſich zwei

VI. Reguläre Polyeder.

34. Reguläre Polyeder sind solche, welche von uter congruenten regulären, und gleich gegen einander neigten, ebenen Figuren eingeschlossen werden. Mittelst lem. XI. 21. überzeugt man sich leicht, daß es nur fünf guläre Körper geben kann. Der Winkel des regu- ren Dreiecks ist $= 60^0$. Drei, vier, fünf solcher Winkel, zu einer Ecke verbunden, geben die Summen 80^0, 240^0, 300^0, also weniger als 360^0; sechs und ehrere geben aber schon 360^0 und mehr, können folglich ine Ecke bilden. Der Winkel des regulären Vierecks $= 90^0$. Drei, zu einer Ecke verbunden, geben die Summe 270^0; vier aber schon 360^0, und können folg- ch keine Ecke bilden. Der Winkel des regulären Fünf- ks ist $= 108^0$, $3.108^0 = 324^0$, $4.108^0 = 432^0$, $> 360^0$. Der Winkel des regulären Sechsecks ist $= 120^0$, $.120^0 = 360^0$. Also können solche Winkel gar keine cke bilden. Es kann also bloß drei von regulären Drei- ken, einen von regulären Vierecken, und einen von re- ulären Fünfecken eingeschlossenen, im Ganzen also nur inf reguläre Körper geben.

35. Ein regulärer Körper werde von lauter regulären Dreiecken eingeschlossen, deren Anzahl $= n$ sey; so ist $V(2.) = 3n$, $S = n$, $K = \frac{1}{2}W(2.) = \frac{3}{2}n$. Aber $+ 6 \gtreqless 3S$ (9.). Also $\frac{3}{2}n + 6 \gtreqless 3n$, $12 \gtreqless 3n$, $\gtreqless 4$. Folglich kann die Anzahl der Dreiecke nicht $<$ seyn.

36. Nehmen wir nun zuerst an, daß jede Ecke von rei ebenen Winkeln eingeschlossen werden soll; so ist $W = 3E$, $2K = 3E(2.)$, $S = \frac{1}{3}W = E$. Aber $E + S = K + 2(1.)$. Also $2E = \frac{3}{2}E + 2$, $E = 4 = S$, $= 6$, und $D = o(12.)$. Dieser reguläre Körper wird lso von 4 regulären Dreiecken eingeschlossen, hat 4 Ecken, Kanten und keine Diagonale. Er heißt Tetraeder.

37. Wird jede Ecke von vier Winkeln regulärer Drei- cke eingeschlossen; so ist $W = 4E = 2K(2.)$, $K = 2E$, $= \frac{1}{3}W = \frac{2}{3}E$, $E + \frac{2}{3}E = 2E + 2(1.)$, $E = 6$,

= 12, und D = 3 (12.). Dieſer von 8 Dreiecken eingeſchloſſene Körper mit 6 Ecken, und 3 Diagonalen heißt Octaeder.

rd endlich jede Ecke von 5 Winkeln regulärer geſchloſſen; ſo iſt $W = 5E = 2K$, und auf wie vorher erhält man E = 12, S = 20, D = 36. Dieſer von 20 regulären Dreiecken ne Körper mit 12 Ecken, 30 Kanten und len heißt Icoſaeder. Andere reguläre von ngeſchloſſene reguläre Körper giebt es nicht.

einem regulären Körper, der von lauter regu- cken, und jede Ecke von drei ebenen Winkeln n wird, iſt $W = 3E = 2K$, $S = \frac{1}{4}W + \frac{3}{4}E = \frac{3}{2}E + 2$, E = 8, S = 6, K = 4. Dieſer von 6 Quadraten eingeſchloſſene re- per mit 8 Ecken, 12 Kanten, 4 Diagonalen eder oder Würfel.

endlich ein regulärer Körper nur von regulä- n, jede Ecke aber von drei ebenen Winkeln

heile, und ihrer gegenseitigen Beziehungen, das 15te behäftigt sich mit der Beschreibung dieser Körper in einander. Ein 16tes Buch hat Franciscus Flussates Candalla (Francis Foix de Candalla, Bischoff von lire, welcher 1594 im 90sten Jahre starb, und eine Lehrelle der Mathematik zu Bourdeaux gestiftet hat, mit deen Ertheilung die Bedingung verbunden war, daß der ldspirant einen Satz von eigner Erfindung, der nicht über as 9te Buch der Elemente hinausging, und einen neuen Satz von den regulären Körpern vortragen mußte) seiner uerst 1566 (dann 1578, 1602) erschienenen Uebersetzung er Elemente beigefügt, welches sich auch in des Clavius Euclid (Coloniae 1591. fol. T. II. p. 324.) befinet, und verschiedene Vergleichungen der in einander behriebenen regulären Körper und ihrer Seiten enthält. Die Netze zur Verfertigung der regulären Körper aus Dappe u. dergl. findet man z. B. in den Wolfischen Schriften. Wir wollen nur die wichtigsten Elemente derlben mittelst des Calculs bestimmen.

42. Eine körperliche Ecke werde von n gleichen und leich gegen einander geneigten ebenen Winkeln α eingehlossen. Man soll die Größe eines Neigungswinkels $= 2\gamma$ bestimmen. Aus der Spitze der Ecke sey mit willährlichem Radius eine Kugel beschrieben, und ABCDE Fig. 128.) sey das der Ecke entsprechende sphärische Polyon, dessen Seiten und Winkel, wie aus der Natur der Ecke nmittelbar folgt, alle gleich sind. Jede Seite ist $= \alpha$, der Winkel $= 2\gamma$. Werden nun zwei Winkel, z. B. und B durch AF, BF halbirt, und auch CF, DF u. s. f. ezogen; so folgt aus bekannten Sätzen vom sphärischen Dreieck (16. 17.) leicht, daß ABF, BCF, CDF, u. s. f. uter gleichschenkliche sphärische Dreiecke mit gleichen Seen und Winkeln sind, so daß also $AF = BF$, $\angle AFB = \frac{60^\circ}{n} = \frac{2\pi}{n}$ ist. Wird nun AB in G halbirt; so ist FG uf AB senkrecht, und $\angle AFG = \angle BFG = \frac{\pi}{n}$, wie benfalls leicht zu beweisen ist (16. 17.). Folglich hat nan (Trigonometrie. 76.) $\sin GBF = \frac{\cos BFG}{\cos BG}$, d. i.

$\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{1}{2}\alpha}$, wodurch der Neigungswinkel 2γ be-

t nun bei irgend einem regulären Körper n die ebenen Winkel, welche jede Ecke bilden, m der Seiten jeder Seitenfläche; so iſt $\frac{1}{2}\alpha =$

$\cos\frac{1}{2}\alpha = \sin\frac{1}{m}\pi$, alſo $\sin\gamma = \frac{\cos\frac{1}{n}\pi}{\sin\frac{1}{m}\pi}$.

s Tetraeder, Heraeder, Octaeder, Dodecaeder, t reſpective $n = 3, 3, 4, 3, 5$; $m = 3, 4,$ Folglich nach (Goniometrie. 168.) mittelſt nung für dieſe Körper nach der Reihe:

$\sin\gamma = \frac{\cos 60^\circ}{\sin 60^\circ} = r\frac{1}{3}$,

$= \frac{\cos 60^\circ}{\sin 45^\circ} = r\frac{1}{2}$,

$= \frac{\cos 45^\circ}{\sin 60^\circ} = r\frac{2}{3}$,

$= \frac{\cos 60^\circ}{\quad} = \frac{2}{\quad}$,

44. Bezeichnen r, R die Halbmesser der in und um ein reguläres Polyeder beschriebenen Kugel, so ist der gemeinschaftliche Mittelpunkt der beiden Kugeln die gemeinschaftliche Spitze von so vielen regulären Pyramiden, als das Polyeder Seitenflächen hat. Die Seitenkante einer solchen Pyramide ist $= R$, ihre Höhe, welche den Mittelpunkt der Grundfläche trifft, $= r$, der Neigungswinkel der Seitenflächen gegen die Grundfläche $= \gamma$, der Polygonwinkel der Grundfläche $= \alpha$. Eine Kante des Polyeders sey $= a$, die Halbmesser des in und um eine Seitenfläche beschriebenen Kreises seyen $= r'$, R'; so erhellet auch ohne Figur leicht, daß $r' = \frac{1}{2} a \operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha$, $r = r' \operatorname{tang} \gamma$, $R' = \frac{1}{2} a \sec \frac{1}{2}\alpha$, $R^2 = r^2 + R'^2$ ist, woraus durch Verbindung dieser Formeln

$$r = \tfrac{1}{4} a \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\alpha \operatorname{tang} \gamma ,$$
$$R = \tfrac{1}{4} a \gamma (1 + \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\alpha^2 . \sec \gamma^2) .$$

Setzt man nun $\frac{\pi}{m} = \varphi$, $\frac{\pi}{n} = \psi$; so ist $\cos \frac{1}{2}\alpha = \sin \varphi$, $\sin \gamma = \frac{\cos \psi}{\sin \varphi}$, welches, in die Formel für R gesetzt, die Größe unter dem Wurzelzeichen

$$= \frac{\sin \psi^2}{\sin \varphi^2 - \cos \psi^2} = \frac{\sin \psi^2}{\cos \psi^2} \cdot \frac{\cos \psi^2}{\sin \varphi^2 - \cos \psi^2} = \operatorname{tang} \psi^2 . \operatorname{tang} \gamma^2$$

giebt. Da $\operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha = \cot \frac{\pi}{m}$ (43.); so ist

$$r = \tfrac{1}{4} a \cot \tfrac{\pi}{m} \operatorname{tang} \gamma , \quad R = \tfrac{1}{4} a \operatorname{tang} \tfrac{\pi}{n} \operatorname{tang} \gamma ;$$

also $\frac{R}{r} = \operatorname{tang} \frac{\pi}{n} \operatorname{tang} \frac{\pi}{m}$. Im Dodecaeder und Icosaeder ist $n = 3$, $m = 5$; $n = 5$, $m = 3$; folglich das Verhältniß $R : r$ in beiden Körpern dasselbe.

45. Ist K der körperliche Inhalt, S eine Seitenfläche, F die ganze Oberfläche, v die Anzahl der Seitenflächen eines Polyeders; so erhellet leicht, daß der Inhalt eines der m congruenten Dreiecke, in welche jede Seitenfläche aus ihrem Mittelpunkte getheilt werden kann, $= \frac{1}{4} a^2 \operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{4} a^2 \cot \frac{\pi}{m}$, also $S = \frac{1}{4} m a^2 \cot \frac{\pi}{m}$, $F = \frac{1}{4} m v a^2 \cot \frac{\pi}{m}$ ist. Der Inhalt einer der v gleichen Pyramiden, in welche das Polyeder aus seinem Mittelpunkte getheilt werden

iſt $= \frac{1}{3} Sr = \frac{1}{12} mra^2 \cot\frac{\pi}{m} = \frac{1}{24} ma^3($

. Alſo $K = \frac{1}{24} mva^3 . \left(\cot\frac{\pi}{m}\right)^2 . tan$

den Formeln

$$\sin\gamma = \frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{m}};$$

$$r = \frac{1}{2} a \cot\frac{\pi}{m} \operatorname{tang}\gamma, \quad R = \frac{1}{2} a \operatorname{tang}\frac{\pi}{n} \operatorname{tang}\gamma;$$

$$S = \frac{1}{4} ma^2 \cot\frac{\pi}{m}, \quad F = \frac{1}{4} mva^2 \cot\frac{\pi}{m};$$

$$K = \frac{1}{24} mva^3 . \left(\cot\frac{\pi}{m}\right)^2 . \operatorname{tang}\gamma$$

ganze Theorie der regulären Körper enthal

a

$$a = \frac{2r}{\cot\frac{\pi}{m} \operatorname{tang}\gamma} = \frac{2R}{\operatorname{tang}\frac{\pi}{n} \operatorname{tang}\gamma};$$

n auch Alles leicht durch r oder R ausgedrück

Für das Octaeder:

$R = \frac{1}{2}a\sqrt{2} = a.0{,}7071068$;
$K = \frac{1}{3}a^3\sqrt{2} = a^3.0{,}4714045$,
$F = 2a^2.\sqrt{3} = a^2.3{,}46410$,
$a = R\sqrt{2} = R.1{,}414214$,
$S = \frac{1}{2}R^2.\sqrt{3} = R^2.0{,}866025$,
$F = 4R^2.\sqrt{3} = R^2.6{,}928203$,
$K = \frac{4}{3}R^3 = R^3.1{,}333333$.

Für das Dodecaeder:

$R = \frac{1}{4}a\sqrt{(18+6\sqrt{5})} = a.1{,}4012585$,
$K = \frac{1}{4}a^3.(15+7\sqrt{5}) = a^3.7{,}6631189$,
$F = 3a^2\sqrt{5}.\sqrt{(5+2\sqrt{5})} = a^2.20{,}645728$,
$a = \frac{R(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{3}} = R.0{,}713644$,
$S = \frac{1}{4}R^2\sqrt{10}.\sqrt{(5-\sqrt{5})} = R^2.0{,}876218$,
$F = 2R^2\sqrt{10}.\sqrt{(5-\sqrt{5})} = R^2.10{,}514616$,
$K = \frac{2R^3(5+\sqrt{5})}{3\sqrt{3}} = R^3.2{,}785164$.

Für das Icosaeder:

$R = \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}} = a.0{,}9510565$;
$K = \frac{5}{12}a^3.(3+\sqrt{5}) = a^3.2{,}1816950$,
$F = 5a^2\sqrt{3} = a^2.8{,}66025$,
$a = \frac{R\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}{\sqrt{5}} = R.1{,}051462$,
$S = \frac{3R^2.(5-\sqrt{5})}{10\sqrt{3}} = R^2.0{,}478727$,
$F = \frac{6R^2.(5-\sqrt{5})}{\sqrt{3}} = R^2.9{,}574540$,
$K = \frac{2R^3.\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}{3} = R^3.2{,}536150$.

VII. Archimedische Körper.

7. Archimedische Körper nennt man solche Kör- welche von regulären Figuren zweier- oder dreierlei ingeschlossen werden (Keplerі Harmonice mun- inc. Austr. 1649. fol. Lib. II. 27. 28.), mit Bedingung, daß alle ihre körperlichen Winkel gleich, ich congruent oder symmetrisch sind. Sehr ausführ-

uchungen über ſolche Körper findet man in
r ſch geom. Aufg. Berlin. II. 1807. S. 139—
. 186 — 196 auch von ſolchen Körpern gehan-
die von lauter Rhomben eingeſchloſſen ſind.
improved 1) by a large and accurate table
:s of circles; 2) a concise Treatise of pe-
by A. Sharp. Lond. 1718. (Weitläufig
Trig.). Meister de solidis geometri-
. Gotting. T. VII. Netze für ſolche Körper
in Marpurgs Progreſſionalcalcul. Berlin
d. 1774. 4tes Buch. Kästner de polye-
:ge irregularibus. Comm. Gotting. Vol. VI.
Mit Anwendung auf Kryſtallographie Käst-
tionibus solidorum crystallorum structu-
antibus. Ibid. VI. Der rein-wiſſenſchaft-
ſolcher Unterſuchungen iſt ſehr beſchränkt.
(a. a. O. S. 149. 175.) giebt auch eine Auf-
überhaupt möglichen archimediſchen Körpern.

VIII. Polyedrometrie.

Iſt nämlich (Fig. 129.) AB'C die Projection von ABC, nd der Neigungswinkel BDB' = α; ſo iſt ⊿AB'C = AC.B'D = ½ AC.BD.cos α = ⊿ABC.cos α. Iſt agegen allgemein (Fig. 130.) A'B'C' die Projection von BC; ſo ſey CD mit MN parallel, und durch CD eine it der Projectionsebene parallele Ebene gelegt. Die rojectionen der Dreiecke ADC, BDC auf dieſer Ebene nd nach dem Obigen = ⊿ADC.cos α, ⊿BDC.cos α. olglich ⊿A'B'C', welches der Projection auf der parallelen bene durch CD offenbar gleich iſt, = (⊿ADC + ⊿BDC). os α = ⊿ABC.cos α. Fiele CD außerhalb des Dreiks ABC, ſo würde ſich die Addition nur in eine Subtraction verwandeln. Jede geradlinige Figur läßt ſich in Dreiecke zerlegen, und jede krummlinige Figur kann als in Vieleck mit unendlich vielen Seiten betrachtet werden. lſo gilt der Satz allgemein.

50. Alle Seitenflächen eines Polyeders denke man ſich uf irgend eine Ebene projicirt. Der Inhalt der Figur, elche die äußerſte Gränzlinie der Projectionen bildet, ſey = M. Ferner ſeyen α, β, γ, ... die ſpitzen Neigungswinkel der Seitenflächen gegen die Projectionsebene, elche nach dem innern Raume des Polyeders; α', β', γ', ... agegen die nach dem äußern Raume deſſelben hinliegenen Neigungswinkel, und a, b, c, ...; a', b', c', ... ie entſprechenden Seitenflächen; ſo iſt klar, daß

$$\begin{aligned} M &= a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma + \dots, \\ M &= a'\cos\alpha' + b'\cos\beta' + c'\cos\gamma' + \dots, \\ o &= a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma + \dots \\ &\quad - a'\cos\alpha' - b'\cos\beta' - c'\cos\gamma' + \dots \end{aligned}$$

t. Nimmt man aber alle Neigungswinkel entweder ach dem innern, oder nach dem äußern Raume des Poeders hin; ſo ſind die Neigungswinkel, welche den ſpitzen eigungswinkeln nach dem äußern oder innern Raume in entſprechen, ſtumpfe Winkel, und ihre Coſinus alſo oſitiv. Bezeichnen wir alſo, alle Neigungswinkel nach em innern, oder alle nach dem äußern Raume hin nehend, die Seitenflächen und entſprechenden Neigungsinkel durch a, b, c, d, ..., und α, β, γ, δ, ...; ſo iſt ach dem Obigen.

$$o = a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma + \dots.$$

eichnen wir nun den nach dem innern Raume
rs hin liegenden Neigungswinkel irgend zweier
n m, n gegen einander, überhaupt durch
o iſt, wenn irgend eine Seitenfläche, z. B. a,
onsebene angenommen wird,

$$s(a,a) + b\cos(a,b) + c\cos(a,c) + \ldots$$

Winkel nach dem innern Raume hin genommen
iſt $(a,a) = 180^0$, $\cos(a,a) = -1$,
, zugleich durch Verwechslung der Buch-

$$\begin{aligned}
&\cos(a,b) + c\cos(a,c) + d\cos(a,d) + \ldots\\
&\cos(b,a) + c\cos(b,c) + d\cos(b,d) + \ldots\\
&\cos(c,a) + b\cos(c,b) + d\cos(c,d) + \ldots\\
&\cos(d,a) + b\cos(d,b) + c\cos(d,c) + \ldots\\
&\text{u. ſ. f.} \qquad\qquad \text{u. ſ. f.}
\end{aligned}$$

Seitenfläche iſt alſo der Summe aller andern
n man jede mit dem Coſinus ihres nach dem
me des Polyeders hin liegenden Neigungswin-
ene Seitenfläche multiplicirt.

ultiplicirt man die vorigen Gleichungen auf bei-

chen zu zwei und zwei in das Quadrat des Cosinus ihres lben gegenseitigen Neigungswinkel (wie oben genommen) einander addirt.

53. Da (51.)

$$a^2 = ab\cos(a, b) + ac\cos(a, c) + \ldots.;$$
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \ldots =$$
$$2ab\cos(a, b) + 2ac\cos(a, c) + 2ad\cos(a, d) + \ldots$$
$$+ 2bc\cos(b, c) + 2bd\cos(b, d) + \ldots$$
$$+ 2cd\cos(c, d) + \ldots;$$

erhält man leicht

$$a^2 = b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + \ldots$$
$$- 2bc\cos(b, c) - 2bd\cos(b, d) - \ldots$$
$$- 2cd\cos(c, d) - \ldots$$

lso erhält man jede Seitenfläche, wenn man von der umme der Quadrate aller übrigen die doppelte Summe r Producte aller übrigen zu zwei und zwei in den Cosinus res gegenseitigen Neigungswinkels (wie oben) subtrahirt, und aus der Differenz der Quadratwurzel zieht.

Für eine dreiseitige Pyramide ist also immer

$$a^2 = b^2 + c^2 + d^2$$
$$- 2\{bc\cos(b, c) + bd\cos(b, d) + cd\cos(c, d)\}$$

ıd, wenn die Pyramide rechtwinklig, d. i. $(b, c) = 90^0$, $(b, d) = (c, d) = 90^0$, ist:

$$a^2 = b^2 + c^2 + d^2,$$

ie schon Theil III. S. 926. auf andere Art bewiesen.

54. Der cubische Inhalt eines jeden Polyeders läßt ch auch durch die Coordinaten seiner Ecken ausdrücken. Sey A′B′C′ die Grundfläche eines schief abgeschnittenen eraden Prismas ABCA′B′C′, und zugleich die Ebene er xy. Die Coordinaten von A, B, C seyen x, y, z; ′, y′, z′; x″, y″, z″; also, da das Prisma gerade yn soll, x, y; x′, y′; x″, y″ die Coordinaten von ′, B′, C′. Der Inhalt der Grundfläche A′B′C′ sey = F, und der Kürze wegen möge z unter z, z′, z″ am leinsten seyn. Legt man durch A eine mit der Grundäche parallele Ebene; so wird das schief abgeschnittene Prisma in ein gerades Prisma und eine vierseitige Pyramide getheilt. Der Inhalt des erstern ist = Fz. Die

yramide liegt in A, und ihre Höhe ist = dem
B′C′ gefällten Perpendikel, welches = $\frac{2F}{B'C'}$
rundfläche der Pyramide ist ein Trapezium,
le Seiten $z' - z$, $z'' - z$ sind, und dessen
′, sein Inhalt also = $\frac{(z' + z'' - 2z) \cdot B'C'}{2}$; folg-
halt der Pyramide = $\frac{1}{3} F (z' + z'' - 2z)$.
dies zu Fz; so erhält man den Inhalt
geschnittenen Prismas = $\frac{1}{3} (z + z' + z'')$.F.
k. (59.) ist aber
$|x(y''-y') + x'(y-y'') + x''(y'-y)|$.
Inhalt unsers Prismas =
$z'')|x(y''-y') + x'(y-y'') + x''(y'-y)|$.
n ein mehr als dreiseitiges gerades schief abge-
Prisma, dessen Grundfläche die Ebene der xy
man sich dasselbe in mehrere dreiseitige schief
e Prismen zerlegt denken, und es ist, wenn
ten seiner außerhalb der Grundfläche liegenden
x, y, z; x', y', z'; ... $x^{n-1}, y^{n-1}, z^{n-1}$ be-
alle Diagonalflächen durch den Punkt, dessen

ntern Zeichen zu nehmen sind, jenachdem die Ebene der y das Polyeder schneidet, oder nicht schneidet. Die einlnen Prismen lassen sich durch ihre Coordinaten ausrücken (54.), also auch der Inhalt des Polyeders.

56. Eine ganz vollständige Ausführung der Lehre von :n Polyedern ließ sich ohne zu große Weitläufigkeit in iesem Artikel nicht geben. Indeß mag das Obige zur ndeutung der Hauptmomente dieser interessanten Theorie nreichend seyn, wobei ich nur noch bemerke, daß es für des Polyeder, wie für jedes Vieleck auch einen Punkt r mittlern Entfernungen giebt, d. h. einen Punkt von lcher Beschaffenheit, daß seine Entfernung von jeder illkührlich im Raume angenommenen Ebene das arithmeische Mittel der Entfernungen aller Ecken des Polyeders on dieser Ebene ist. Die im Art. Vieleck gegebene Ausihrung der Theorie dieses Punktes wird hinreichend seyn, n mit Leichtigkeit die Anwendung auf Polyeder zu machen. erschiedene Eigenschaften der Polyeder sind in den Zeitriften der Mathematik, besonders in Crelles Journal, und den Annales d. Math. par Gergonne erstreut, worauf wir hier noch im Allgemeinen verweisen.

Vieleckige Zahlen, s. Polygonalzahlen.

Vieleckseite, s. Vieleck.

Vieleckswinkel, s. Vieleck.

Vielfacher Punkt (punctum multiplex) ist i Punkt einer Curve, welchen mehrere Zweige derselben it einander gemein haben. Jenachdem zwei, drei, vier, s. w. Zweige der Curve durch diesen Punkt gehen, heißt ein zweifacher- oder Doppelpunkt (punctum duplex), i dreifacher, vierfacher Punkt, u. s. w. (punctum triex, quadruplex, u. s. w.). Die Theorie dieser Punkte zt eine allgemeinere Darstellung der Lehre von den Behrungen, als in diesem Wörterbuche in dem Art. Behrende Linie gegeben worden ist, voraus, wodurch wir nöthigt sind, einige Betrachtungen in dieser Beziehung

ken, jedoch nur ſo viel, als die Lehre von den unkten unmittelbar erfordert.

Gleichungen zweier Curven ſeyen

$$y = f(x),\ y_1 = f'(x_1);$$

m Taylor'ſchen Lehrſatze

$$f(x + i) =$$

$$+ \frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{i}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\cdot\frac{i^2}{1.2} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\cdot\frac{i^3}{1.2.3} + \cdots,$$

$$f'(x_1 + i) =$$

$$+ \frac{\partial y_1}{\partial x}\cdot\frac{i}{1} + \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}\cdot\frac{i^2}{1.2} + \frac{\partial^3 y_1}{\partial x^3}\cdot\frac{i^3}{1.2.3} + \cdots,$$

er Kürze wegen ſetzen wollen:

$$f(x + i) =$$

$$+ y''\cdot\frac{i^2}{1.2} + y'''\cdot\frac{i^3}{1.2.3} + y''''\cdot\frac{i^4}{1..4} + \cdots,$$

$$f'(x_1 + i) =$$

$$+ y_1''\cdot\frac{i^2}{1.2} + y_1'''\cdot\frac{i^3}{1.2.3} + y_1''''\cdot\frac{i^4}{1..4} + \cdots$$

ung, daß dieſe beiden Curven einen Punkt, ſſe nun durch x bezeichnet werden ſoll, mit ein- n haben, wird durch die Gleichung

chwinden; und deſto inniger werden die beiden Curven ich an einander anſchließen.

Hat man nun zuerſt

$$y = y_1 , \; y' = y'_1 ;$$

› daß

$$= (y'' - y_1'') \cdot \frac{i^2}{1.2} + (y''' - y_1''') \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + (y'''' - y_1'''') \cdot \frac{i^4}{1...4} + \cdots ;$$

› denke man ſich irgend eine dritte Curve, deren Gleichung

$$y_2 = f''(x) ,$$

nd bezeichne, indem man zugleich annimmt, daß dieſe urve auch durch den Punkt geht, welchen die beiden ſten mit einander gemein haben, die Entfernung dieſer urve von der erſten, auf der Ordinate genommen, elche der Abſciſſe $x + i$ entſpricht, durch Δ'; ſo iſt, ie vorher

$$= (y' - y'_2) \cdot \frac{i}{1} + (y'' - y_2'') \cdot \frac{i^2}{1.2} + (y''' - y_2''') \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + (y'''' - y_2'''') \cdot \frac{i^4}{1...4} + \cdots .$$

olglich kann man, wofern nicht etwa $y' - y'_2 = 0$ iſt, mmer ſo klein nehmen, daß $\Delta < \Delta'$ iſt, ſo daß alſo e dritte Curve in der Nähe des allen gemeinſchaftlichen unktes nicht zwiſchen den beiden erſten Curven liegen nn, wenn nicht $y' - y'_2 = 0$, $y'_2 = y'$, und alſo ich $y'_2 = y'_1$ iſt. Man ſagt daher in dieſem Falle, › alſo

$$y = y_1 , \; y' = y'_1 ,$$

, daß zwiſchen den beiden erſten Curven in dem Punkte, ſſen Abſciſſe x iſt, eine Berührung des erſten rades ſtatt findet. Eine Berührung des zwei- n Grades dagegen findet ſtatt, wenn

$$y = y_1 , \; y' = y'_1 , \; y'' = y''_1 ,$$

, und eben ſo eine Berührung des dritten Gra- s, wenn

$$y = y_1 , \; y' = y'_1 , \; y'' = y''_1 , \; y''' = y'''_1 ,$$

, u. ſ. f.

Bei den Berührungen des zweiten Grades iſt

$$-y_1''')\cdot\frac{i^3}{1.2.3}+(y''''-y_1'''')\cdot\frac{i^4}{1\ldots4}+\ldots,$$

folglich, wegen der in dem erſten Gliede, von
kleine i das Zeichen von A abhängt, enthal-
aden Potenz von i, ſein Zeichen mit i, ſo daß
ulirende Curve in der Nähe des Berührungs-
rhalb und unterhalb der erſten Curven liegt.
emerkungen gelten für alle Berührungen einer
nung.

ein Beiſpiel zu geben, ſey die osculirende Curve
Linie, deren Gleichung

$$y_1 = f'(x_1) = Ax_1 + B,$$

eſtimmen, daß ſie mit einer durch die Gleichung

$$y = f(x)$$

Curve eine Berührung erſter Ordnung hat. Zu
at man nach dem Obigen:

$$y_1 = y,\ \frac{\partial y_1}{\partial x_1} = \frac{\partial y}{\partial x},$$

$x_1 = x$ ſetzt. Aber $\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = A$; alſo $A = \frac{\partial y}{\partial x}$;

3. Soll der Kreis gefunden werden, welcher mit einer durch die Gleichung

$$y = f(x)$$

gegebenen Curve eine Berührung des ersten Grades hat; so sey

$$(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = r^2$$

die Gleichung dieses Kreises. Folglich, wegen der Berührung erster Ordnung:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2, \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{x-a}{y-b};$$

woraus für $\frac{\partial y}{\partial x} = y'$:

$$x = a + \frac{ry'}{\sqrt{1+y'^2}}, y = b - \frac{r}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

Man hat also bloß zwei Gleichungen, und eine der Constanten a, b, r bleibt also unbestimmt. Eliminirt man r; so erhält man:

$$b - y = -\frac{1}{y'}(a-x) = -\frac{\partial x}{\partial y}(a-x),$$

welches, wie leicht erhellen wird, die Gleichung der Normale der gegebenen Curve für den Berührungspunkt ist, auf der also die Mittelpunkte aller Kreise, die mit der gegebenen Curve eine Berührung erster Ordnung haben, liegen.

Für die Berührung zweiter Ordnung hat man, x für x_1 gesetzt:

$$y_1 = y, \frac{\partial y_1}{\partial x_1} = \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Folglich

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2,$$
$$(x-a) + (y-b)\frac{\partial y}{\partial x} = 0,$$
$$1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + (y-b)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0;$$

woraus leicht:

$$a = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''},$$

$$b = y + \frac{1+y'^2}{y''}, r = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

Bestimmung des gesuchten Kreises, der be-
r Krümmungskreis, und sein Radius
mungshalbmesser der gegebenen Curve
benen Punkt genannt wird, und also immer
ung zweiter Ordnung mit derselben hat.
schien aus der Lehre von den Berührungen zur
des Vorhergehenden, und dem Verständniß
en nöthig zu seyn.
n hat zwei Arten vielfacher Punkte zu unter-
enachdem nämlich die einzelnen Zweige der
n ihnen schneiden, oder bloß berühren. Die
er gegebenen Curve sey immer:

$$u = f(x, y) = o .$$

ersten Falle hat jeder Zweig der Curve in dem
unkte eine verschiedene Berührende, und also,
, y, die Coordinaten des vielfachen Punktes,
$\frac{\partial y}{\partial x}$ (2.) eben so viele Werthe, als die Ord-
es vielfachen Punktes angiebt, so daß man
mgekehrt aus der Anzahl der verschiedenen
$\frac{\partial y}{}$ in dem vielfachen Punkte auf dessen Ord-

hat also die gegebene Curve vielfache Punkte; so müssen die Coordinaten derselben den Gleichungen:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, u = 0$$

genügen, und man wird also x, y aus zweien dieser Gleichungen bestimmen, und untersuchen, ob die gefundenen Werthe auch der dritten genügen, in welchem Falle diese Werthe im Allgemeinen vielfachen Punkten der Curve als Coordinaten entsprechen.

Entwickelt man nun aus

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\partial y = 0$$

die zweite Differentialgleichung; so wird

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\partial x^2 + 2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\partial x\,\partial y + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\partial y^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\partial^2 y = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + 2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0.$$

Nach dem Vorhergehenden ist aber $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$. Also

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + 2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = 0.$$

Diese Gleichung ist in Bezug auf $\frac{\partial y}{\partial x}$ vom zweiten Grade, und dieser Differentialquotient hat also, wofern nicht alle Glieder der Gleichung $= 0$ werden, zwei Werthe, die entweder beide reell, oder beide imaginär sind. Im ersten Falle ist der vorher gefundene Punkt ein Doppelpunkt, und die Lagen der beiden Berührenden in demselben werden durch die beiden Werthe von $\frac{\partial y}{\partial x}$, die sich aus obiger Gleichung ergeben, bestimmt. Sind aber beide Wurzeln derselben imaginär; so giebt es, weil

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \text{tang}\,\alpha$$

gar keinen reellen Werth hat, für den gefundenen Punkt keine Berührende, so daß derselbe also auch nicht eigentlich in der Curve, als zusammenhängender Zug gedacht, liegen kann, obgleich er allerdings auch der Gleichung der Curve entspricht. Solche sich zwar aus der Gleichung einer Curve mit ergebende, aber nicht eigentlich in der Curve als zusammenhängender Zug liegende Punkte heißen conju-

nkte, oder auch, namentlich bei ältern Schrift-
nſichtbare vielfache **Punkte** (puncta
a invisibilia).

n alle Glieder der obigen quadratiſchen Gleichung
n; ſo müßte man die dritte Differentialgleichung
in welcher wieder die mit $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$ behafte-
verſchwinden werden. In Bezug auf $\frac{\partial y}{\partial x}$ iſt
ung vom dritten Grade, und hat alſo entweder
Wurzeln, oder eine reelle und zwei imaginäre,
t, daß nicht alle Glieder derſelben verſchwin-
alle drei Wurzeln reell; ſo iſt der Punkt ein
im andern Falle dagegen nur ein einfacher,
einen, aber doch einen, reellen Werth hat.
en auch alle Glieder der vorhergehenden Glei-
ntwickele man die vierte Differentialgleichung,
ezug auf $\frac{\partial y}{\partial x}$ vom vierten Grade ſeyn wird, und
r die mit $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$ behafteten Glieder
Dieſe Gleichung hat alſo entweder

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 4x^3 - 4a^2x, \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -6ay^2 - 6a^2y;$$

$$x(x^2 - a^2) = 0, y(y + a) = 0;$$

$$x = 0, = \pm a; y = 0, = -a.$$

un unterſuche man, ob dieſe Werthe von x, y der gebenen Gleichung $u = 0$ genügen. Für $x = 0$ erhält m aus derſelben $y = -a$, und für $y = 0$ ergiebt ſich $= \pm a$, ſo daß alſo

$$x = 0, y = -a; x = \pm a, y = 0$$

i vielfachen Punkten entſprechen können. Nun hat man

$$\left.\begin{aligned} &4x^3\partial x - 4a^2x\partial x - 6ay^2\partial y - 6a^2y\partial y = 0,\\ &2x^3\partial x - 2a^2x\partial x - 3ay^2\partial y - 3a^2y\partial y = 0,\\ &6x^2\partial x^2 - 2a^2\partial x^2 - 6ay\partial y^2 - 3a^2\partial y^2\\ &\qquad - 3ay(y + a)\partial^2 y \end{aligned}\right\} = 0,$$

$$6x^2 - 2a^2 - 3a(2y + a)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = 0.$$

ür $x = 0$, $y = -a$ wird dieſe Gleichung:

$$-2 + 3\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = 0, \frac{\partial y}{\partial x} = \surd\tfrac{2}{3};$$

d für $x = \pm a$, $y = 0$:

$$4 - 3\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = 0, \frac{\partial y}{\partial x} = \surd\tfrac{4}{3}.$$

ſo iſt jeder der drei vorher beſtimmten Punkte ein Dopelpunkt. Für den erſten iſt $\text{tang}\,\alpha = \surd\frac{2}{3}$, für die iden andern dagegen $\text{tang}\,\alpha = \surd\frac{4}{3}$, wo natürlich immer s doppelte Zeichen der Wurzel zu berückſichtigen iſt.

Für $x = 0$ iſt die Gleichung

$$-2ay^3 - 3a^2y^2 + a^4 = 0,$$

elche ſich in folgende drei Factoren zerlegen läßt:

$$a(y + a)(y + a)(a - 2y) = 0,$$

id demnach die drei Wurzeln

$$y = -a, y = -a, y = \tfrac{1}{2}a$$

it. Die beiden erſten entſprechen dem einen Doppelnkte, die letztere dient zur Verzeichnung der Curve. Zu eiterer Beſtimmung ihrer Geſtalt ſuche man die Punkte, denen die Berührende der Abſciſſen- und Ordinatenaxe rallel iſt. Für den erſten Fall iſt

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{2x(x^2 - a^2)}{3ay(y + a)} = 0.$$

$$x + 2a\frac{\partial y}{\partial x} - a\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^3 = 0$$

für $x = 0$:

$$\frac{\partial y}{\partial x}\left\{2 - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right\} = 0 .$$

er Punkt, für welchen $x = 0$, $y = 0$, ein
unkt, und zur Bestimmung der Berührenden
in demselben schneidenden Zweige hat man:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0, = +\sqrt{2}, = -\sqrt{2},$$

die eine dieser Berührenden der Abscissenaxe
er vielmehr, weil $x = 0$, $y = 0$, die Ab-
bst ist. Die beiden andern sind durch tang α
ebenfalls bestimmt. Die Curve hat die in
argestellte Gestalt, wie sich bei näherer Unter-
t.

$$u = y^4 - x^5 + x^4 + 3x^2y^2 = 0$$

Differentialgleichung:

$$u = ay^2 - 2aby + ab^2 - x^3 - cx^2 = o,$$
$$-x(3x + 2c)\partial x + 2a(y - b)\partial y = o,$$
$$-x(3x + 2c) + 2a(y - b)\frac{\partial y}{\partial x} = o,$$
$$x(3x + 2c) = o,\ y - b = o;$$
$$x = o, = -\tfrac{2}{3}c;\ y = b.$$

$x = o$, $y = b$ genügen der gegebenen Gleichung.
zweite vollständige Differentialgleichung ist:

$$-(3x + c)\partial x^2 + a\partial y^2 - a(y - b)\partial^2 y = o,$$

, mit Weglassung der verschwindenden Glieder:

$$-3x - c + a\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = o.$$

für $x = o$:

$$-c + a\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = o,\ \frac{\partial y}{\partial x} = \pm\sqrt{\frac{c}{a}},$$

urch die Berührenden der beiden Zweige bestimmt wer-
Der durch $x = o$, $y = b$ bestimmte Punkt ist ein Doppelpunkt.

11. Findet aber, um nun zu näherer Betrachtung des 4.) angedeuteten zweiten Falls überzugehen, zwischen einzelnen Zweigen der Curve in dem vielfachen Punkte haupt eine Berührung des $(n-1)$ten Grades statt; ezeichne man die Werthe von

$$\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}, \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}, \ldots$$

em vielfachen Punkte für irgend einen bestimmten ig durch y', y'', y''', y'''', ..., für jeden andern ig durch y_1', y_1'', y_1''', y_1'''', ..., die auf der inate, welche, wenn x die Abscisse des vielfachen ktes bezeichnet, der Abscisse $x + i$ entspricht, genom- e Entfernung der beiden Zweige der Curve von einan- ber durch Δ; so ist (1.):

$$(y' - y_1')\cdot\frac{i}{1} + (y'' - y_1'')\cdot\frac{i^2}{1.2} + (y''' - y_1''')\cdot\frac{i^3}{1.2.3} + (y'''' - y_1'''')\cdot\frac{i^4}{1..4} + \ldots$$

aber zwischen den einzelnen Zweigen eine Berührung $(n-1)$ten Grades statt findet; so ist (1.):

$$y' = y_1',\ y'' = y_1'',\ y''' = y_1''',\ \ldots\ y^{(n-1)} = y_1^{(n-1)};$$

$$) - y_1^{(n)}) \cdot \frac{i^n}{1 \ldots n} + (y^{(n+1)} - y_1^{(n+1)}) \cdot \frac{i^{n+1}}{1 \ldots (n+1)} + \ldots$$

, daß Δ, wie klein man auch i nehmen mag, hiedene Werthe haben wird, als die Anzahl ielfachen Punkte zusammenkommenden Zweige thält, weniger einen. Eben so viele verschie- wird also, da dies bei jedem Grade der Klein- gilt, auch $y^{(n)} - y_1^{(n)}$, folglich auch $y_1^{(n)}$, mnach hat, wenn man nun den Werth $y^{(n)}$ hlt, $y^{(n)}$ oder $\frac{\partial^n y}{\partial x^n}$ eben so viele verschiedene s Zweige der Curve in dem vielfachen Punkte mmen. Für

$$y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}, \ldots \frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}$$

gegen in dem vielfachen Punkte nur einen e aus dem Obigen erhellet. Nun hat aber, o, wie immer, die Gleichung der gegebenen chnet, die nte Differentialgleichung überhaupt

$$\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right) = 0, \left(\frac{\partial n}{\partial y}\right) = 0.$$

Da aber die erste Differentialgleichung überhaupt:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial x} = 0,$$

nd $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$ ist; so hat man in diesem Falle ganz wie in em ersten:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, u = 0,$$

daß also in beiden Fällen die vielfachen Punkte völlig uf gleiche Art gefunden werden. Ob die einzelnen Zweige ch schneiden oder berühren, ergiebt sich unmittelbar bei der Bestimmung der Lage der Berührenden der einzelnen Zweige 5.), indem im letztern Falle die Gleichung, durch welche $\frac{y}{x}$ bestimmt wird, bloß so viele einander gleiche, im ersten dagegen so viele verschiedene Wurzeln haben wird, ls die Ordnungszahl des vielfachen Punktes Einheiten thält.

Vielfache Punkte der zweiten Art können in besondern ällen auch in Spitzen übergehen, über deren Unterscheiung der Art. Rückkehrpunkt nachzusehen ist.

12. Auch ohne Calcul erhellet leicht, daß überhaupt ur erst eine Linie des $(n+1)$ten Grades einen nfachen unkt haben kann. Denn sollte schon eine Linie des nten Grades einen nfachen Punkt haben; so denke man sich urch denselben und irgend einen andern Punkt der Curve ne gerade Linie gezogen, welches offenbar immer möglich t; so würde diese gerade Linie, da in dem nfachen Punkte Zweige der Curve zusammenkommen, letztere offenbar gentlich in $n+1$ Punkten schneiden, welches bekanntlich icht möglich ist (Krumme Linie. 27.). Kein Kegelschnitt lso kann einen Doppelpunkt haben, sondern nur erst eine inie des dritten Grades. Aus der allgemeinen Gleichung

$$u = A + Bx + Cy + Dx^2 + Exy + Fy^2 = 0$$

er Kegelschnitte erhält man:

$$B + 2Dx + Ey + (C + Ex + 2Fy)\frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

:n. Ein Syſtem von vier geraden Linien,
ie AC, CE, AD, BE (Fig. 133.) ſchnei-
man ein vollſtändiges Viereck, deſſen
BD, CF, AE ſind, indem jedes Viereck im
1 Sinne nur zwei Diagonalen hat. Die Be-
: Seiten und Winkel der Vierecke aus gegebe-
ſ. m. im Art. Trigonometrie V.

die Congruenz der Vierecke gelten folgende
n.

an alle vier Seiten und ein Winkel gegenſeitig
Denn ſind B, F (Fig. 134.) die gleichen
folgt leicht die Congruenz der Dreiecke ABC,
aus AC = EG, alſo auch ∠ACD ≅ ∠EGH,
offenbar die Vierecke congruent.

an drei Seiten und die beiden eingeſchloſſenen
nſeitig gleich ſind. Wird ſehr leicht durch das
legen bewieſen.

an drei Seiten und die beiden anliegenden Win-
d. Sind AB, BC, CD und EF, FG, GH

folgt. Sind aber die Seiten AB, CD und EF, GH parallel; so kann man offenbar den Seiten BC, FG unendlich viele Lagen geben, so daß sie sich immer gleich bleiben, und die Vierecke doch nicht congruent sind.

f) Wenn drei Seiten, ein eingeschlossener und ein auf diesen folgender anliegender Winkel gegenseitig gleich sind, und wenn zugleich die Diagonale durch den anliegenden Winkel kleiner ist, als die Seite zwischen den beiden unbestimmten Winkeln. Wird sehr leicht durch die Congruenz der Dreiecke bewiesen, wenn man die den gegebenen eingeschlossenen Winkeln gegenüberstehenden Diagonalen zieht.

g) Wenn drei Seiten, ein anliegender und der diesem gegenüberstehende eingeschlossene Winkel gleich sind, und zugleich die Diagonale durch die beiden unbestimmten Winkel größer ist, als die gegebene Seite an dem anliegenden Winkel. Wird eben so leicht aus der Congruenz der Dreiecke bewiesen, wenn man die genannte Diagonale zieht.

Durch jede der in diesen Sätzen angegebenen fünf Stücke wird also ein Viereck bestimmt. Sonst giebt es immer zwei Vierecke, wovon man sich in jedem Falle leicht überzeugen wird.

2. Die meisten merkwürdigen Eigenschaften haben die centrischen Vierecke. Für alle Vierecke gilt der von Euler gefundene interessante Satz, daß die Summe der Quadrate der vier Seiten immer der Summe der Quadrate der beiden Diagonalen nebst dem vierfachen Quadrate der die Mittelpunkte der Diagonalen verbindenden Linie gleich ist. Ist nämlich im Dreieck ABC (Fig. 135.) $AD = DC$, und BD gezogen; so fälle das Perpendikel BE auf AC. Dann ist (Dreieck. 19. 20.) $AB^2 = AD^2 + BD^2 + 2AD \cdot DE$, $BC^2 = CD^2 + BD^2 - 2CD \cdot DE$, woraus, wegen $AD = CD$, wenn man addirt, sich leicht ergiebt: $AB^2 + BC^2 = 2AD^2 + 2BD^2$. Sey nun im Viereck ABCD (Fig. 136.) $DE = BE$, $AF = CF$; so ziehe man AE, CE. Dann ist $AB^2 + AD^2 = 2AE^2 + 2DE^2$, $BC^2 + CD^2 =$

DE^2, $AB^2 + AD^2 + BC^2 + CD^2 =$
$CE^2) + 4DE^2 = 4AF^2 + 4FE^2 + 4DE^2$
$^2 + (2DE)^2 + 4FE^2 = AC^2 + DB^2 +$
m Parallelogramm ist $FE = o$. Also AB^2
$BC^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$. M. ſ. über
auch eine Abhandlung von G. W. Krafft
v. Comm. Petrop. I.

bindet man die Mittelpunkte der Seiten eines
BCD (Fig. 137.) durch gerade Linien; ſo iſt
ien, daß die entſtehende Figur EFGH ein ſei-
ninhalte nach halb ſo großes Parallelogramm
bene Viereck iſt.

Summe der Quadrate der Diagonalen eines
cks iſt der doppelten Summe der Quadrate der
unkte der Gegenſeiten verbindenden, geraden
GH gleich. Da EFGH ein Parallelogramm
o iſt $EF^2 + GH^2 = EG^2 + GF^2 + FH^2$
2.) $= 2EG^2 + 2GF^2$. Aber offenbar EG
$GF = \frac{1}{2}AC$, $2EG^2 = \frac{1}{2}BD^2$, $2GF^2 =$

nd der beiden andern Gegenseiten verbindenden geraden inien gleich ist.

7. Setzt man BD = d, AC = d' (Fig. 138.) und fällt die Perpendikel AE, CF; so ist AE = AG. sin α, CF = CG. sin α, △ABD = ½AG. d sin α, △BCD = ½CG. d' sin α, woraus durch Addition ABCD = ½dd' sin α. Folglich verhalten sich Vierecke, deren Diagonalen gegen einander gleich geneigt sind, wie die Producte ihrer Diagonalen, oder, wenn sie in Kreise beschrieben sind, wie die Summen der Producte ihrer Gegenseiten (Kreis. 44.).

Da sin α für α = 90° ein Maximum wird; so ist unter allen Vierecken mit gleichen Diagonalen das am größten, in welchem die Diagonalen einen rechten Winkel einschließen. Sonst sind alle Vierecke mit gleichen und gleich geneigten Diagonalen einander gleich.

Will man ein Parallelogramm verzeichnen, das einem Viereck gleich ist, und gleiche Diagonalen mit demselben hat; so lasse man sich die beiden Diagonalen unter demselben Winkel wie im Viereck so schneiden, daß sie sich gegenseitig halbiren.

Dieser Satz scheint von Roberval herzurühren.

8. Ist der Winkel A (Fig. 139.) ein rechter; so erhellet leicht, daß für DB = $\sqrt{a^2 + d^2} = n$, der Inhalt des Vierecks =

$$\tfrac{1}{4}ad + \tfrac{1}{4}\sqrt{(b+c+n)(c+n-b)(b+n-c)(b+c-n)}$$

(Dreieck. 34.). Ist A kein rechter Winkel; so muß man in dieser Formel $\frac{1}{2}ad \sin A$ statt $\frac{1}{2}ad$, und

$$n = \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad \cos A},$$

wobei also noch A gegeben seyn muß, setzen.

9. Die Summe der Gegenwinkel jedes eingeschriebenen ebenen Vierecks beträgt zwei Rechte, und um ein ebenes Viereck, in welchem die Summen der Gegenwinkel zwei Rechte betragen, läßt sich immer ein Kreis beschreiben (Kreis. 22. 23.). Zum Beweise eines analogen hr merkwürdigen Satzes über das sphärische einge-

Viereck.

Viereck sind folgende vorläufige Betrachtungen

eingeschriebenen ebenen **Viereck ABCD** (Fig.
$+ C = 180^0$, $\sin A = \sin C$, $\cos A =$
$\Delta = \frac{1}{2} ad \sin A$, $\Delta' = \frac{1}{2} bc \sin A$. Also,
den Inhalt des Vierecks durch V bezeichnen,
$+ bc) \sin A$. Aber (**Trigonometrie. 7.**)

$$\frac{a^2 + d^2 - \delta^2}{2ad} = -\cos C = -\frac{b^2 + c^2 - \delta^2}{2bc},$$

einigen leichten Reductionen:

$$^2 = \frac{bc(a^2 + d^2) + ad(b^2 + c^2)}{ad + bc}$$

$$= \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc};$$

$$A = \frac{a^2 - b^2 - c^2 + d^2}{2(ad + bc)};$$

$$\frac{1}{2} A^2 = 1 - \cos A = \frac{(b + c)^2 - (a - d)^2}{2(ad + bc)}$$

$$= \frac{(a + b + c - d)(b + c + d - a)}{2(ad + bc)},$$

$$\frac{1}{2} A^2 = 1 + \cos A = \frac{(a + d)^2 - (b - c)^2}{2(ad + bc)}$$

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}$$

$$V = \frac{1}{4r}\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)} \, .$$

Entwickelt man das Product

$$(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc) \, ,$$

und ſetzt

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \Sigma a^2 \, ,$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} = \Sigma \frac{1}{a^2} \, ;$$

ſo erhält man leicht:

$$r = \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{abcd\,\Sigma a^2 + (abcd)^2 . \Sigma \frac{1}{a^2}}{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}} \, .$$

Iſt das Viereck zugleich centriſch nach den Seiten, ſo daß ſich nämlich auch ein Kreis in daſſelbe beſchreiben läßt; ſo wird leicht erhellen, daß die Summen der Gegenſeiten gleich ſind, d. h. $a + c = b + d$ iſt. Dies giebt

$$V = \sqrt{abcd} \, ,$$

$$r = \tfrac{1}{4}\sqrt{\Sigma a^2 + abcd\,\Sigma \tfrac{1}{a^2}} \, .$$

11. Sey nun ABCD (Fig. 140.) ein ſphäriſches, in einen kleinern Kreis beſchriebenes, Viereck; ſo ſind, den Halbmeſſer der Kugel $= 1$ geſetzt, die Seiten und eine Diagonale des entſprechenden Sehnenvierecks $= 2\sin\frac{1}{2}a$, $2\sin\frac{1}{2}b$, $2\sin\frac{1}{2}c$, $2\sin\frac{1}{2}d$, $2\sin\frac{1}{2}\delta$. Alſo für

$$\sin\tfrac{1}{2}a \sin\tfrac{1}{2}b + \sin\tfrac{1}{2}c \sin\tfrac{1}{2}d = P \, ,$$

$$\sin\tfrac{1}{2}a \sin\tfrac{1}{2}c + \sin\tfrac{1}{2}b \sin\tfrac{1}{2}d = Q \, ,$$

$$\sin\tfrac{1}{2}a \sin\tfrac{1}{2}d + \sin\tfrac{1}{2}b \sin\tfrac{1}{2}c = R \, ,$$

nach (9.)

$$\sin\tfrac{1}{2}\delta^2 = \frac{PQ}{R} \, .$$

Aber (Trigonometrie. 58.)

$$\cos A = \frac{\cos\delta - \cos a \cos d}{\sin a \sin d} \, .$$

Folglich nach einigen leichten Reductionen, da $2\sin\frac{1}{2}A^2 = 1 - \cos A$, $2\cos\frac{1}{2}A^2 = 1 + \cos A$ iſt:

$$\sin\tfrac{1}{2}A^2 = \frac{\sin\frac{1}{2}\delta^2 - \sin\frac{1}{2}(a-d)^2}{\sin a \sin d} \, .$$

$$\cos\tfrac{1}{2}A^2 = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+d)^2 - \sin\frac{1}{2}\delta^2}{\sin a \sin d} \, .$$

Vorigen wird der Zähler von $\sin\frac{1}{2}A^2$ alſo

$$\frac{PQ}{R} - \sin\tfrac{1}{2}(a-d)^2$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}a\ \sin\frac{1}{2}d\,.\,X\ +\ \sin\frac{1}{2}b\ \sin\frac{1}{2}c\,.\,Y}{R}$$

$$= \sin\tfrac{1}{2}b^2 + \sin\tfrac{1}{2}c^2 - \sin\tfrac{1}{2}(a-d)^2\ ,$$
$$= \sin\tfrac{1}{2}a^2 + \sin\tfrac{1}{2}d^2 - \sin\tfrac{1}{2}(a-d)^2\ .$$

man nun $\sin\frac{1}{2}(a-d)^2$; ſo erhält man leicht

$$\begin{aligned} Y &= \sin\tfrac{1}{2}a^2\ \sin\tfrac{1}{2}d^2 + \sin\tfrac{1}{2}a^2\ \sin\tfrac{1}{2}d^2 \\ &\quad + 2\sin\tfrac{1}{2}a\ \cos\tfrac{1}{2}d\ \cos\tfrac{1}{2}a\ \sin\tfrac{1}{2}d \\ &= 2\sin\tfrac{1}{2}a\ \sin\tfrac{1}{2}d\ \cos\tfrac{1}{2}(a-d)\ . \end{aligned}$$

aber $\sin a\ \sin d$

$$= 4\sin\tfrac{1}{2}a\ \sin\tfrac{1}{2}d\ \cos\tfrac{1}{2}a\ \cos\tfrac{1}{2}d\ ;$$

an $\sin\frac{1}{2}A^2$

$$= \frac{X + 2\sin\frac{1}{2}b\ \sin\frac{1}{2}c\ \cos\frac{1}{2}(a-d)}{4R\cos\frac{1}{2}a\ \cos\frac{1}{2}d}\ .$$

dieſes Bruchs iſt =

$$\tfrac{1}{2}b^2 + \sin\tfrac{1}{2}c^2 - \sin\tfrac{1}{2}(a-d)^2$$
$$2\sin\tfrac{1}{2}b\ \sin\tfrac{1}{2}c\ \cos\tfrac{1}{2}(a-d)$$
$$\cos\tfrac{1}{2}(a-d)^2 + 2\sin\tfrac{1}{2}b\ \sin\tfrac{1}{2}c\ \cos\tfrac{1}{2}(a-d)$$

$\cos\frac{1}{2}(a+b+c+d)\cos\frac{1}{2}(-a+b+c-d)$
$\sin\frac{1}{2}(a-b+c+d)\sin\frac{1}{2}(a+b-c+d)$

T ſetzt:

$$\cos\tfrac{1}{2}A^2 = \frac{T}{R\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}d}.$$

ſetzt man nun reſpective c, d, a, b für a, b, c, d, bezeichnet die Producte

$\cos\frac{1}{2}(-a-b+c+d)\cos\frac{1}{2}(a-b+c-d)$
$\sin\frac{1}{2}(a+b-c+d)\sin\frac{1}{2}(a-b+c+d)$

$\cos\frac{1}{2}(a+b+c+d)\cos\frac{1}{2}(a-b-c+d)$
$\sin\frac{1}{2}(a+b+c-d)\sin\frac{1}{2}(-a+b+c+d)$

ch S′, T′; ſo wird

$$\sin\tfrac{1}{2}C^2 = \frac{S'}{R\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c},\quad \cos\tfrac{1}{2}C^2 = \frac{T'}{R\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}.$$

zeichnet man nun ferner die Producte

$\cos\frac{1}{2}(a+b+c+d)\cos\frac{1}{2}(a+b-c-d)$
$\cos\frac{1}{2}(a-b+c-d)\cos\frac{1}{2}(-a+b+c-d)$

$\sin\frac{1}{2}(-a+b+c+d)\sin\frac{1}{2}(a-b+c+d)$
$\sin\frac{1}{2}(a+b-c+d)\sin\frac{1}{2}(a+b+c-d)$

ch Σ, Σ′; die Summe

$\sin\frac{1}{2}(-a+b+c+d)\sin\frac{1}{2}(a+b+c-d)$
$+\sin\frac{1}{2}(a-b+c+d)\sin\frac{1}{2}(a+b-c+d)$

ch Δ, ſo wie die Differenz

$\cos\frac{1}{2}(a+b+c+d)\cos\frac{1}{2}(-a+b+c-d)$
$-\cos\frac{1}{2}(a+b-c-d)\cos\frac{1}{2}(a-b+c-d)$

ch Δ′, und das Product

$$\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c\cos\tfrac{1}{2}d$$

ch L; ſo erhält man nach ſehr bekannten goniometriſchen Formeln:

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+C) = \frac{\Delta}{R}\sqrt{\frac{\Sigma}{L}},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(A+C) = \frac{\Delta'}{R}\sqrt{\frac{\Sigma'}{L}}.$$

iſt aber (Goniometrie. 27.):

$$\begin{aligned}\Delta = {} & \tfrac{1}{2}|\cos\tfrac{1}{2}(a-d) - \cos\tfrac{1}{2}(b+c)| \\ & + \tfrac{1}{2}|\cos\tfrac{1}{2}(b-c) - \cos\tfrac{1}{2}(a+d)| \\ = {} & \sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}d + \sin\tfrac{1}{2}b\sin\tfrac{1}{2}c = R,\end{aligned}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left|\cos\tfrac{1}{2}(b+c) + \cos\tfrac{1}{2}(a+d)\right|$$
$$- \tfrac{1}{2}\left|\cos\tfrac{1}{2}(a-d) + \cos\tfrac{1}{2}(b-c)\right|$$
$$= -\sin\tfrac{1}{2}a \sin\tfrac{1}{2}d - \sin\tfrac{1}{2}b \sin\tfrac{1}{2}c = -R,$$

$$C) = \sqrt{\frac{\Sigma}{L}},\quad \cos\tfrac{1}{2}(A+C) = -\sqrt{\frac{\Sigma}{L}}.$$

L sind aber offenbar symmetrische Functionen
c, d, wobei zu bemerken, daß der Cosinus
ndert, wenn man den Winkel negativ nimmt.
uch

$$+D) = \sqrt{\frac{\Sigma}{L}},\quad \cos\tfrac{1}{2}(B+D) = -\sqrt{\frac{\Sigma}{L}}.$$

ian

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+C) = \sin\tfrac{1}{2}(B+D),$$
$$\cos\tfrac{1}{2}(A+C) = \cos\tfrac{1}{2}(B+D).$$

uch

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A+C) = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(B+D),$$

a offenbar kein Winkel des Vierecks $> 180^\circ$,
$A + C$, noch $B + D > 360^\circ$, oder weder
), noch $\frac{1}{2}(B + D) > 180^\circ$ ist, sogleich folgt,
$= B + D$. Also sind in jedem sphärischen

13. Nimmt man den sphärischen Octanten als Flächen- und rechten Winkel als Winkel-Einheit; so folgt, wenn man die Fläche des Vierecks durch F bezeichnet, aus Trigonometrie (91.) leicht, daß

$$F = A + B + C + D - 4,$$

wobei man sich nur das Viereck durch eine Diagonale in zwei Dreiecke zerlegt denken muß. Da aber (11.) $A + C = B + D$ ist; so ist $A + B + C + D = 2(A + C)$, also

$$F = 2(A + C) - 4, \quad \tfrac{1}{4}F = \tfrac{1}{4}(A + C) - 1.$$

folglich $\sin\frac{1}{4}F = -\cos\frac{1}{2}(A + C)$, $\cos\frac{1}{4}F = \sin\frac{1}{2}(A + C)$, woraus

$$\sin\tfrac{1}{4}F = \sqrt{\frac{\Sigma}{L}} =$$

$$\sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(s-a)\,\sin\frac{1}{2}(s-b)\,\sin\frac{1}{2}(s-c)\,\sin\frac{1}{2}(s-d)}{\cos\frac{1}{2}a\,\cos\frac{1}{2}b\,\cos\frac{1}{2}c\,\cos\frac{1}{2}d}},$$

$$\cos\tfrac{1}{4}F = \sqrt{\frac{\Sigma}{L}} =$$

$$\sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}s\,\cos\frac{1}{2}(s'-a)\,\cos\frac{1}{2}(s'-b)\,\cos\frac{1}{2}(s'-c)}{\cos\frac{1}{2}a\,\cos\frac{1}{2}b\,\cos\frac{1}{2}c\,\cos\frac{1}{2}d}},$$

$$\tan\tfrac{1}{4}F = \sqrt{\frac{\Sigma}{\Sigma}} =$$

$$\sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(s-a)\,\sin\frac{1}{2}(s-b)\,\sin\frac{1}{2}(s-c)\,\sin\frac{1}{2}(s-d)}{\cos\frac{1}{2}s\,\cos\frac{1}{2}(s'-a)\,\cos\frac{1}{2}(s'-b)\,\cos\frac{1}{2}(s'-c)}}.$$

Für $d = o$ wird $s' = s$, und die Formel geht offenbar in die Trigonometrie (99.) gefundene Formel für den Inhalt des sphärischen Dreiecks über, so daß also diese, von L. Huilier gefundene, Formel sich auch schon aus der Abhandlung Lexells (11.) ergiebt, und also eigentlich Letzterem angehört. M. vergl. auch Buzengeiger in der Zeitschrift für Astronomie. Th. VI. 1818. S. 327.

14. Das eingeschriebene ebene Viereck hat außer der Gleichheit der Summen der Gegenwinkel noch mehrere andere merkwürdige Eigenschaften, worüber wir noch Einiges mittheilen.

Wenn man die äußern oder innern Winkel irgend eines Vierecks halbirt; so schließen die halbirenden Linien ein Viereck ein, um welches sich ein Kreis beschreiben läßt. Da die Summe der äußern Winkel 4R beträgt (Vieleck.

n. Ein Syſtem von vier geraden Linien,
ie AC, CE, AD, BE (Fig. 133.) ſchnei-
man ein vollſtändiges Viereck, deſſen
BD, CF, AE ſind, indem jedes Viereck im
Sinne nur zwei Diagonalen hat. Die Be-
Seiten und Winkel der Vierecke aus gegebe-
ſ. m. im Art. Trigonometrie V.

die Congruenz der Vierecke gelten folgende
t.

n alle vier Seiten und ein Winkel gegenſeitig
Denn ſind B, F (Fig. 134.) die gleichen
folgt leicht die Congruenz der Dreiecke ABC,
us AC = EG, alſo auch $\measuredangle ACD \cong \measuredangle EGH$,
offenbar die Vierecke congruent.

n drei Seiten und die beiden eingeſchloſſenen
nſeitig gleich ſind. Wird ſehr leicht durch das
legen bewieſen.

n drei Seiten und die beiden anliegenden Win-
d. Sind AB, BC, CD und EF, FG, GH

folgt. Sind aber die Seiten AB, CD und EF, GH parallel; so kann man offenbar den Seiten BC, FG unendlich viele Lagen geben, so daß sie sich immer gleich bleiben, und die Vierecke doch nicht congruent sind.

f) Wenn drei Seiten, ein eingeschlossener und ein auf diesen folgender anliegender Winkel gegenseitig gleich sind, und wenn zugleich die Diagonale durch den anliegenden Winkel kleiner ist, als die Seite zwischen den beiden unbestimmten Winkeln. Wird sehr leicht durch die Congruenz der Dreiecke bewiesen, wenn man die den gegebenen eingeschlossenen Winkeln gegenüberstehenden Diagonalen zieht.

g) Wenn drei Seiten, ein anliegender und der diesem gegenüberstehende eingeschlossene Winkel gleich sind, und zugleich die Diagonale durch die beiden unbestimmten Winkel größer ist, als die gegebene Seite an dem anliegenden Winkel. Wird eben so leicht aus der Congruenz der Dreiecke bewiesen, wenn man die genannte Diagonale zieht.

Durch jede der in diesen Sätzen angegebenen fünf Stücke wird also ein Viereck bestimmt. Sonst giebt es immer zwei Vierecke, wovon man sich in jedem Falle leicht überzeugen wird.

2. Die meisten merkwürdigen Eigenschaften haben die centrischen Vierecke. Für alle Vierecke gilt der von Euler gefundene interessante Satz, daß die Summe der Quadrate der vier Seiten immer der Summe der Quadrate der beiden Diagonalen nebst dem vierfachen Quadrate der die Mittelpunkte der Diagonalen verbindenden Linie gleich ist. Ist nämlich im Dreieck ABC (Fig. 135.) AD = DC, und BD gezogen; so fälle das Perpendikel BE auf AC. Dann ist (Dreieck. 19. 20.) $AB^2 = AD^2 + BD^2 + 2AD.DE$, $BC^2 = CD^2 + BD^2 - 2CD.DE$, woraus, wegen AD = CD, wenn man addirt, sich leicht ergiebt: $AB^2 + BC^2 = 2AD^2 + 2BD^2$. Sey nun im Viereck ABCD (Fig. 136.) DE = BE, AF = CF; so ziehe man AE, CE. Dann ist $AB^2 + AD^2 = 2AE^2 + 2DE^2$, $BC^2 + CD^2 =$

DE^2, $AB^2 + AD^2 + BC^2 + CD^2 =$
$CE^2) + 4DE^2 = 4AF^2 + 4FE^2 + 4DE^2$
$^2 + (2DE)^2 + 4FE^2 = AC^2 + DB^2 +$
n Parallelogramm iſt $FE = o$. Alſo AB^2
$BC^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$. M. ſ. über
auch eine Abhandlung von G. W. Krafft
v. Comm. Petrop. I.

indet man die Mittelpunkte der Seiten eines
CD (Fig. 137.) durch gerade Linien; ſo iſt
en, daß die entſtehende Figur EFGH ein ſei-
inhalte nach halb ſo großes Parallelogramm
bene Viereck iſt.

Summe der Quadrate der Diagonalen eines
ks iſt der doppelten Summe der Quadrate der,
unkte der Gegenſeiten verbindenden, geraden
GH gleich. Da EFGH ein Parallelogramm
) iſt $EF^2 + GH^2 = EG^2 + GF^2 + FH^2$
.) $= 2EG^2 + 2GF^2$. Aber offenbar EG
$GF = \frac{1}{2}AC$, $2EG^2 = \frac{1}{2}BD^2$, $2GF^2 =$

nd der beiden andern Gegenseiten verbindenden geraden inien gleich ist.

7. Setzt man BD = d, AC = d′ (Fig. 138.) und ällt die Perpendikel AE, CF; so ist AE = AG. sin α, F = CG. sin α, ⊿ABD = ½AG. d sin α, ⊿BCD = ½CG. d′ sin α, woraus durch Addition ABCD = ½dd′ sin α. Folglich verhalten sich Vierecke, deren Diagonalen gegen einander gleich geneigt sind, wie die Producte ihrer Diagonalen, oder, wenn sie in Kreise beschrieben sind, wie die Summen der Producte ihrer Gegenseiten (Kreis. 44.).

Da sin α für α = 90° ein Maximum wird; so ist unter allen Vierecken mit gleichen Diagonalen das am größten, in welchem die Diagonalen einen rechten Winkel einschließen. Sonst sind alle Vierecke mit gleichen und gleich geneigten Diagonalen einander gleich.

Will man ein Parallelogramm verzeichnen, das einem Vierecke gleich ist, und gleiche Diagonalen mit demselben hat; so lasse man sich die beiden Diagonalen unter demselben Winkel wie im Viereck so schneiden, daß sie sich gegenseitig halbiren.

Dieser Satz scheint von Roberval herzurühren.

8. Ist der Winkel A (Fig. 139.) ein rechter; so erhellet leicht, daß für DB = $\sqrt{a^2 + d^2}$ = n, der Inhalt des Vierecks =

$$\tfrac{1}{4}ad + \tfrac{1}{4}\sqrt{(b+c+n)(c+n-b)(b+n-c)(b+c-n)}$$

(Dreieck. 34.). Ist A kein rechter Winkel; so muß man in dieser Formel $\frac{1}{2}ad \sin A$ statt $\frac{1}{2}ad$, und

$$n = \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad \cos A},$$

wobei also noch A gegeben seyn muß, setzen.

9. Die Summe der Gegenwinkel jedes eingeschriebenen ebenen Vierecks beträgt zwei Rechte, und um ein ebenes Viereck, in welchem die Summen der Gegenwinkel zwei Rechte betragen, läßt sich immer ein Kreis beschreiben (Kreis. 22. 23.). Zum Beweise eines analogen sehr merkwürdigen Satzes über das sphärische einge-

Viereck.

Viereck ſind folgende vorläufige Betrachtungen

eingeſchriebenen ebenen Viereck ABCD (Fig.
$+ C = 180^0$, $\sin A = \sin C$, $\cos A =$
$A = \frac{1}{2} ad \sin A$, $A' = \frac{1}{2} bc \sin A$. Alſo,
den Inhalt des Vierecks durch V bezeichnen,
$+ bc) \sin A$. Aber (Trigonometrie. 7.)

$$\frac{a^2 + d^2 - \delta^2}{2ad} = -\cos C = -\frac{b^2 + c^2 - \delta^2}{2bc},$$

einigen leichten Reductionen:

$$^2 = \frac{bc(a^2 + d^2) + ad(b^2 + c^2)}{ad + bc}$$

$$= \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc};$$

$$A = \frac{a^2 - b^2 - c^2 + d^2}{2(ad + bc)};$$

$$\frac{1}{2} A^2 = 1 - \cos A = \frac{(b + c)^2 - (a - d)^2}{2(ad + bc)}$$

$$= \frac{(a + b + c - d)(b + c + d - a)}{2(ad + bc)},$$

$$\frac{1}{2} A^2 = 1 + \cos A = \frac{(a + d)^2 - (b - c)^2}{2(ad + bc)}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}$$

$$V = \frac{1}{4r}\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)} \ .$$

Entwickelt man das Product

$$(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc) \ ,$$

und ſetzt

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \Sigma a^2 \ ,$$
$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} = \Sigma \frac{1}{a^2} \ ;$$

ſo erhält man leicht:

$$r = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{abcd\,\Sigma a^2 + (abcd)^2 . \Sigma \frac{1}{a^2}}{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}} \ .$$

Iſt das Viereck zugleich centriſch nach den Seiten, ſo daß ſich nämlich auch ein Kreis in daſſelbe beſchreiben läßt; ſo wird leicht erhellen, daß die Summen der Gegenſeiten gleich ſind, d. h. $a + c = b + d$ iſt. Dies giebt

$$V = \sqrt{abcd} \ ,$$

$$r = \frac{1}{4}\sqrt{\Sigma a^2 + abcd\,\Sigma \frac{1}{a^2}} \ .$$

11. Sey nun ABCD (Fig. 140.) ein ſphäriſches, in einen kleinern Kreis beſchriebenes, Viereck; ſo ſind, den Halbmeſſer der Kugel $= 1$ geſetzt, die Seiten und eine Diagonale des entſprechenden Sehnenvierecks $= 2\sin\frac{1}{2}a$, $2\sin\frac{1}{2}b$, $2\sin\frac{1}{2}c$, $2\sin\frac{1}{2}d$, $2\sin\frac{1}{2}\delta$. Alſo für

$$\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b + \sin\tfrac{1}{2}c\sin\tfrac{1}{2}d = P \ ,$$
$$\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}c + \sin\tfrac{1}{2}b\sin\tfrac{1}{2}d = Q \ ,$$
$$\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}d + \sin\tfrac{1}{2}b\sin\tfrac{1}{2}c = R \ ,$$

nach (9.)

$$\sin\tfrac{1}{2}\delta^2 = \frac{PQ}{R} \ .$$

Aber (Trigonometrie. 58.)

$$\cos A = \frac{\cos\delta - \cos a\cos d}{\sin a\sin d} \ .$$

Folglich nach einigen leichten Reductionen, da $2\sin\frac{1}{2}A^2 = 1 - \cos A$, $2\cos\frac{1}{2}A^2 = 1 + \cos A$ iſt:

$$\sin\tfrac{1}{2}A^2 = \frac{\sin\frac{1}{2}\delta^2 - \sin\frac{1}{2}(a-d)^2}{\sin a\sin d} \ .$$

$$\cos\tfrac{1}{2}A^2 = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+d)^2 - \sin\frac{1}{2}\delta^2}{\sin a\sin d} \ .$$

Vorigen wird der Zähler von $\sin\frac{1}{2}A^2$ alſo

$$\frac{PQ}{R} - \sin\tfrac{1}{2}(a-d)^2$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}a\ \sin\frac{1}{2}d\,.\,X\ +\ \sin\frac{1}{2}b\ \sin\frac{1}{2}c\,.\,Y}{R}$$

$$X = \sin\tfrac{1}{2}b^2 + \sin\tfrac{1}{2}c^2 - \sin\tfrac{1}{2}(a-d)^2\ ,$$
$$Y = \sin\tfrac{1}{2}a^2 + \sin\tfrac{1}{2}d^2 - \sin\tfrac{1}{2}(a-d)^2\ .$$

man nun $\sin\frac{1}{2}(a-d)^2$; ſo erhält man leicht

$$\begin{aligned} Y &= \sin\tfrac{1}{2}a^2\ \sin\tfrac{1}{2}d^2 + \sin\tfrac{1}{2}a^2\ \sin\tfrac{1}{2}d^2 \\ &\quad + 2\sin\tfrac{1}{2}a\ \cos\tfrac{1}{2}d\ \cos\tfrac{1}{2}a\ \sin\tfrac{1}{2}d \\ &= 2\sin\tfrac{1}{2}a\ \sin\tfrac{1}{2}d\ \cos\tfrac{1}{2}(a-d)\ , \end{aligned}$$

aber $\sin a\ \sin d$

$$= 4\sin\tfrac{1}{2}a\ \sin\tfrac{1}{2}d\ \cos\tfrac{1}{2}a\ \cos\tfrac{1}{2}d\ ;$$

an $\sin\frac{1}{2}A^2$

$$= \frac{X + 2\sin\frac{1}{2}b\ \sin\frac{1}{2}c\ \cos\frac{1}{2}(a-d)}{4R\cos\frac{1}{2}a\ \cos\frac{1}{2}d}\ .$$

dieſes Bruchs iſt =

$\frac{1}{2}b^2 + \sin\frac{1}{2}c^2 - \sin\frac{1}{2}(a-d)^2$
$2\sin\frac{1}{2}b\ \sin\frac{1}{2}c\ \cos\frac{1}{2}(a-d)$
$\cos\frac{1}{2}(a-d)^2 + 2\sin\frac{1}{2}b\ \sin\frac{1}{2}c\ \cos\frac{1}{2}(a-d)$

$\cos\frac{1}{2}(a+b+c+d)\cos\frac{1}{2}(-a+b+c-d)$
$\sin\frac{1}{2}(a-b+c+d)\sin\frac{1}{2}(a+b-c+d)$

T ſetzt:

$$\cos\tfrac{1}{2}A^2 = \frac{T}{R\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}d}.$$

ßt man nun reſpective c, d, a, b für a, b, c, d, bezeichnet die Producte

$\cos\frac{1}{2}(-a-b+c+d)\cos\frac{1}{2}(a-b+c-d)$
$\sin\frac{1}{2}(a+b-c+d)\sin\frac{1}{2}(a-b+c+d)$

$\cos\frac{1}{2}(a+b+c+d)\cos\frac{1}{2}(a-b-c+d)$
$\sin\frac{1}{2}(a+b+c-d)\sin\frac{1}{2}(-a+b+c+d)$

ch S′, T′; ſo wird

$$\sin\tfrac{1}{2}C^2 = \frac{S'}{R\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c},\quad \cos\tfrac{1}{2}C^2 = \frac{T'}{R\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}.$$

zeichnet man nun ferner die Producte

$\cos\frac{1}{2}(a+b+c+d)\cos\frac{1}{2}(a+b-c-d)$
$\cos\frac{1}{2}(a-b+c-d)\cos\frac{1}{2}(-a+b+c-d)$

$\sin\frac{1}{2}(-a+b+c+d)\sin\frac{1}{2}(a-b+c+d)$
$\sin\frac{1}{2}(a+b-c+d)\sin\frac{1}{2}(a+b+c-d)$

ch Σ, Σ′; die Summe

$\sin\frac{1}{2}(-a+b+c+d)\sin\frac{1}{2}(a+b+c-d)$
$+\sin\frac{1}{2}(a-b+c+d)\sin\frac{1}{2}(a+b-c+d)$

ch Δ, ſo wie die Differenz

$\cos\frac{1}{2}(a+b+c+d)\cos\frac{1}{2}(-a+b+c-d)$
$-\cos\frac{1}{2}(a+b-c-d)\cos\frac{1}{2}(a-b+c-d)$

ch Δ′, und das Product

$$\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c\cos\tfrac{1}{2}d$$

ch L; ſo erhält man nach ſehr bekannten goniometri-n Formeln:

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+C) = \frac{\Delta}{R}\sqrt{\frac{\Sigma}{L}},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(A+C) = \frac{\Delta'}{R}\sqrt{\frac{\Sigma}{L}}.$$

iſt aber (Goniometrie. 27.):

$$\Delta = \tfrac{1}{2}|\cos\tfrac{1}{2}(a-d) - \cos\tfrac{1}{2}(b+c)|$$
$$+\tfrac{1}{2}|\cos\tfrac{1}{2}(b-c) - \cos\tfrac{1}{2}(a+d)|$$
$$= \sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}d + \sin\tfrac{1}{2}b\sin\tfrac{1}{2}c = R,$$

$$= \tfrac{1}{2}|\cos\tfrac{1}{2}(b+c) + \cos\tfrac{1}{2}(a+d)|$$
$$- \tfrac{1}{2}|\cos\tfrac{1}{2}(a-d) + \cos\tfrac{1}{2}(b-c)|$$
$$= -\sin\tfrac{1}{2}a \sin\tfrac{1}{2}d - \sin\tfrac{1}{2}b \sin\tfrac{1}{2}c = -R .$$

$$C) = \sqrt{\frac{\Sigma}{L}},\ \cos\tfrac{1}{2}(A+C) = -\sqrt{\frac{\Sigma'}{L}} .$$

L sind aber offenbar symmetrische Functionen
c, d, wobei zu bemerken, daß der Cosinus
dert, wenn man den Winkel negativ nimmt.
uch

$$+D) = \sqrt{\frac{\Sigma}{L}},\ \cos\tfrac{1}{2}(B+D) = -\sqrt{\frac{\Sigma'}{L}} .$$

an

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+C) = \sin\tfrac{1}{2}(B+D) ,$$
$$\cos\tfrac{1}{2}(A+C) = \cos\tfrac{1}{2}(B+D) .$$

uch

$$\tan\tfrac{1}{2}(A+C) = \tan\tfrac{1}{2}(B+D) ,$$

a offenbar kein Winkel des Vierecks $> 180^0$,
$A + C$, noch $B + D > 360^0$, oder weder
), noch $\frac{1}{2}(B + D) > 180^0$ ist, sogleich folgt,
$= B + D$. Also sind in jedem sphärischen

13. Nimmt man den sphärischen Octanten als Flächen- en rechten Winkel als Winkel-Einheit; so folgt, wenn an die Fläche des Vierecks durch F bezeichnet, aus Trigonometrie (91.) leicht, daß

$$F = A + B + C + D - 4,$$

wobei man sich nur das Viereck durch eine Diagonale in zwei Dreiecke zerlegt denken muß. Da aber (11.) $A + C = B + D$ ist; so ist $A + B + C + D = 2(A + C)$, also

$$F = 2(A + C) - 4, \quad \tfrac{1}{4}F = \tfrac{1}{2}(A + C) - 1.$$

folglich $\sin\frac{1}{4}F = -\cos\frac{1}{2}(A + C)$, $\cos\frac{1}{4}F = \sin\frac{1}{2}(A + C)$, woraus

$$\sin\tfrac{1}{4}F = \sqrt{\frac{\Sigma}{L}} =$$

$$\sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(s-a)\,\sin\frac{1}{2}(s-b)\,\sin\frac{1}{2}(s-c)\,\sin\frac{1}{2}(s-d)}{\cos\frac{1}{2}a\,\cos\frac{1}{2}b\,\cos\frac{1}{2}c\,\cos\frac{1}{2}d}},$$

$$\cos\tfrac{1}{4}F = \sqrt{\frac{\Sigma}{L}} =$$

$$\sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}s\,\cos\frac{1}{2}(s'-a)\,\cos\frac{1}{2}(s'-b)\,\cos\frac{1}{2}(s'-c)}{\cos\frac{1}{2}a\,\cos\frac{1}{2}b\,\cos\frac{1}{2}c\,\cos\frac{1}{2}d}},$$

$$\tang\tfrac{1}{4}F = \sqrt{\frac{\Sigma'}{\Sigma}} =$$

$$\sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(s-a)\,\sin\frac{1}{2}(s-b)\,\sin\frac{1}{2}(s-c)\,\sin\frac{1}{2}(s-d)}{\cos\frac{1}{2}s\,\cos\frac{1}{2}(s'-a)\,\cos\frac{1}{2}(s'-b)\,\cos\frac{1}{2}(s'-c)}}.$$

Für $d = 0$ wird $s' = s$, und die Formel geht offenbar in die Trigonometrie (99.) gefundene Formel für den Inhalt des sphärischen Dreiecks über, so daß also diese, von L. Huilier gefundene, Formel sich auch schon aus der Abhandlung Lexells (11.) ergiebt, und also eigentlich Letzterem angehört. M. vergl. auch Buzengeiger in der Zeitschrift für Astronomie. Th. VI. 1818. S. 327.

14. Das eingeschriebene ebene Viereck hat außer der Gleichheit der Summen der Gegenwinkel noch mehrere andere merkwürdige Eigenschaften, worüber wir noch Einiges mittheilen.

Wenn man die äußern oder innern Winkel irgend eines Vierecks halbirt; so schließen die halbirenden Linien ein Viereck ein, um welches sich ein Kreis beschreiben läßt. Da die Summe der äußern Winkel 4R beträgt (Vieleck.

(Fig. 141.) $x + y + x' + y' = 2R.$
$y + x' + y' + B' + D' = 4R.$ Alſo
$= 2R$, und folglich auch $A' + C' = 2R.$ Die
innern Winkel eines Vierecks beträgt ebenfalls
iſt (Fig. 142.) $x'' + y'' + x''' + y''' = 2R.$
$y'' + x''' + y''' + A'' + C'' = 4R.$ Alſo
$= 2R = B'' + D''.$ Die Seiten der Vier-
D' und A''B''C''D'' (Fig. 142.) ſtehen auf
ıkrecht. Denn es iſt offenbar $x' + y''$ (Fig.
$\frac{1}{2}. 2R = R.$ Auch iſt augenblicklich klar, daß
der Vierecke A'B'C'D', A''B''C''D'' von je
des Vierecks ABCD gleich weit entfernt iſt.

ıß in einem nach den Seiten centriſchen Vier-
mmen der Gegenſeiten gleich ſind, fällt ſogleich
ı. Umgekehrt kann man aber auch behaupten,
:des Viereck ABCD (Fig. 143.), in welchem
n der Gegenſeiten gleich ſind, ein Kreis be-
t. Halbirt man die Winkel bei C, D; ſo iſt
ie von dem Durchſchnittspunkte H der halbir-
n auf die Seiten gefällten Perpendikel HE,

17. Für eine gewisse Ebene als Projectionsebene und einen Punkt als Centrum der Projection versteht man unter der Projection einer Figur die von den Durchschnittspunkten der von dem Centrum der Projection nach allen Punkten in dem Umfange der gegebenen Figur gezogenen geraden Linien mit der Projectionsebene auf derselben gebildete Figur.

18. Wenn zwei oder mehrere gerade Linien AB, A′B′, . s. f. sich in einem Punkte P schneiden; so läßt sich nmer eine Ebene und ein Centrum der Projection finden, ür welche die Projectionen aller gegebenen Linien einander arallel sind. Nimmt man nämlich irgend einen Punkt P, elcher in keiner der Ebenen liegt, in welchen je zwei der egebenen Linien liegen, zieht PP, und nimmt die Proctionsebene mit dieser Linie parallel; so sind die Durchhnitte der Ebenen PABP, PA′B′P, u. s. f. mit der rojectionsebene, d. i. die Projectionen der gegebenen inien, offenbar alle mit PP, folglich unter einander arallel.

19. Sind umgekehrt in irgend einem Falle die Proctionen einiger geraden Linien unter einander parallel; so üssen diese geraden Linien sich in einem Punkte schneien, oder einander parallel seyn, d. i. in unendlicher Entrnung zusammenlaufen. Die gegebenen Linien seyen B, A′B′, A″B″, A‴B‴, u. s. f., und ab, a′b′, a″b″, ‴b‴, u. s. f. ihre Projectionen. Das Centrum der rojection sey P. Irgend zwei der gegebenen Linien, B. AB und A′B′, mögen sich in K schneiden; so liegen b, a′b′ in den Ebenen PABK, PA′B′K, deren gemeinhaftlicher Durchschnitt PK ist, und ab, a′b′ liegen selbst i einer Ebene, der Projectionsebene. Schnitte nun iese Ebene die PK in einem gewissen Punkte; so müßn offenbar auch ab, a′b′ in diesem Punkte zusammenufen, da sie doch parallel seyn sollen. Also muß die bene der Linien ab, a′b′, und folglich diese Linien selbst, it PK parallel seyn. K kann hierbei auch unendlich weit ntfernt gedacht werden. Wäre nun K′ der Durchschnitt on A′B′, A″B″; so sind wie vorher a′b′, a″b″ der Linie

el. Aber a′b′ kann nur den beiden Linien parallel seyn, wenn entweder K und K′ zusammen oder beide unendlich weit entfernt sind, d. i. A′B′, A″B″ sich in einem Punkte schneiden, einander parallel sind. Wie man weiter gehen kann, leuchtet leicht.

Sind die Projectionen der Linien AB, A′B′ und ab (Fig. 144.) einander parallel; so zeigt der vorige Beweis, daß die Projectionsebene den Linien KL, PL, also der Ebene PKL parallel ist. Hat nun in KL noch irgend einen Punkt M; so ist die Projectionsebene also auch der Linie PM parallel, und folglich auch die Projectionen jeder zwei in M, d. i. in einem Punkte von KL, sich schneidenden gerade einander parallel (18.).

Umgekehrt folgt hieraus, daß, wenn die Projectionen der Linien AB, A′B′; CD, C′D′; EF, E′F′ einander parallel sind, die Punkte K, L, M in einer Linie liegen. Schneide nämlich KL die Ebene PQ in einem Punkte M′. In dieser Ebene ziehe

sind die Projectionen ab, cd und ac, bd, wenn wir die Projectionen immer durch die entsprechenden kleinen Buchstaben bezeichnen, einander parallel (18.), also abcd ein Parallelogramm.

24. Wenn die in B willkührlich getheilte Linie AC (Fig. 146.) gegeben ist; so läßt sich immer ein Punkt P finden, für welchen die Winkel PAC, BPC einander gleich sind. Man errichte (Fig. 147.) auf AC durch A das Perpendikel AD, halbire BC in E, errichte durch E auf AC ein Perpendikel, und schneide dasselbe aus B mit dem Radius AE in F, welches offenbar immer möglich ist. Beschreibt man nun aus F mit AE als Radius einen Kreis; so wird dieser AD in G berühren, und durch B, C gehen; auch wird der über BC liegende Abschnitt immer der größere, und folglich der in ihm enthaltene Winkel x ein spitzer seyn. Trägt man diesen Winkel an AC an; so muß AP den Kreis immer in P schneiden, da $x < 90^\circ$ ist, und es ist $x = PAC = BPC$.

25. Sey nun ein in einen Kreis beschriebenes Viereck gegeben; so läßt sich immer eine Ebene finden, auf welcher die Projection der Figur ein Kreis und ein eingeschriebenes Rechteck ist. Von O (Fig. 148.) fälle man auf FE das Perpendikel M'MN, und bestimme P so, daß $PM'N = NPM$ ist (24.). Denkt man sich nun die Ebene des Dreiecks PM'M auf der Ebene des gegebenen Kreises über MM' senkrecht, nimmt P als Mittelpunkt der Projection an, beschreibt mit P als Spitze und dem gegebenen Kreise als Grundfläche einen Kegel, und schneidet denselben durch eine mit PFE parallele Ebene; so ist das Verlangte geschehen. Da nämlich, wenn mm' der Durchschnitt der Projectionsebene mit der Ebene des Dreiecks PM'M ist, $x = y = z$ ist; so ist der Kegelschnitt ein Wechselschnitt. Also ein Kreis (Kegel. 8.). Die Projection des Vierecks ist ein in diesen Kreis beschriebenes Parallelogramm (23.). Folglich ein Rechteck.

26. Sehr leicht erhellet nun, daß, wenn abcd (Fig. 149.) ein Rechteck ist, das umschriebene Viereck a'b'c'd' ein Parallelogramm ist, und die Diagonalen beider Pa-

ne ſich im Mittelpunkte des Kreiſes durchſchnei-
es iſt x = x′, y = y′, p = p′, q = q′
0.). Aber, wie leicht aus der Congruenz der
der Natur des Rechtecks folgt, x′ = y′ =
Alſo x = y = p = q. Folglich ſind b′cd,
ngruente und gleichſchenklige Dreiecke. Alſo
= cb′ = db′, ſo wie auf ähnliche Art aa′
cc′ = da′. Folglich a′b′ = c′d′, b′c′ =
emnach a′b′c′d′ ein Parallelogramm. Iſt o
nittspunkt der Diagonalen des Rechtecks abcd;
eicht, daß oa = ob = oc = od, alſo o
unkt des Kreiſes iſt. Zieht man b′o, d′o;
gen b′d = b′c, od = oc und ad′ = bd′,
die Linien b′o, d′o auf cd, ab ſenkrecht, alſo
bc parallel, und fallen folglich in eine ge-
uſammen. Eben ſo a′o und c′o.

ey nun ABCD (Fig. 150.) ein eingeſchriebe-
B′C′D′ das entſprechende umgeſchriebene Viereck.
ſich einen Kegel, deſſen Spitze P iſt, und
ionsebene von der Beſchaffenheit, daß die Ver-

β, δ; α, γ Berührende; so würden diese auch den Linien ab, cd, a'c'; ad, bc, b'd' parallel seyn. Folglich laufen die durch die Durchschnittspunkte der Diagonalen des umgeschriebenen Vierecks (Fig. 150.) mit dem Kreise gezogenen Berührenden mit der andern Diagonale des umgeschriebenen Vierecks und den gleichliegenden Gegenseiten des eingeschriebenen Vierecks in einem Punkte zusammen (19.).

Da man, wie aus der Entstehung der Kegelschnitte sogleich folgt, jeden Kegelschnitt als Projection eines Kreises betrachten kann; so gilt alles Vorhergehende auch für jeden Kegelschnitt, in und um welchen auf die obige Art Vierecke beschrieben sind.

28. Poncelet hat diese Methode zu großer Allgemeinheit erhoben. Wie fruchtbar sie ist, mögen noch folgende Sätze zeigen. Man habe z. B. das eingeschriebene Sechseck ABCDEF (Fig. 39.), dessen Gegenseiten sich in c, a, b schneiden. Man nehme P so an, daß, wenn man die Projectionsebene mit Pca parallel legt, die Projection des gegebenen Kreises ein Kreis, und in der Projection a'b'c'd'e'f' (Fig. 151.) des Sechsecks die Seiten f'e', b'c' und e'd', a'b' einander parallel werden (18. 25.). Daher ist $x = y$, Bog. b'c' + Bog. c'd' = Bog. e'f' + Bog. a'f'. Aber auch $v = w$, Bog. a'f' + Bog. a'b' = Bog. e'd' + Bog. c'd'. Addirt man nun auf beiden Seiten, und hebt auf; so wird Bog. b'c' + Bog. a'b' = Bog. e'f' + Bog. e'd', $p = q$, c'd' parallel a'f'. Folglich sind auch die Projectionen von CD, AF (Fig. 39.) einander parallel. Also liegen c, a, b (Fig. 39.) in einer geraden Linie (22.). Ein anderer einfacher Beweis des merkwürdigen Hexagrammum mysticum (Transversale. 35.).

29. Sind (Fig. 152.) von drei in gerader Linie liegenden Punkten A, B, C sechs Berührende an einen Kreis gezogen; so schneiden sich m'm'', n'n'', p'p'' in einem Punkte. Man denke sich, welches nach dem Obigen immer zulässig ist, einen Kegel mit der Spitze P und eine der PABC parallele Ebene, so daß die Projection unserer

eis wird; ſo ſind die **Projectionen der Linien**
; Bn′, Bn″; Cp′, **Cp″ einander parallel**
erühren die Projection **des gegebenen Kreiſes.**
ie Projectionen der Linien **m′m″**, n′n″, p′p″
n Mittelpunkt der **Projection des gegebenen**
d ſchneiden ſich folglich, **ſo wie demnach auch**
n′m″, n′n″, p′p″ **ſelbſt in einem Punkte.**
hellet, daß dieſer Satz **für jede Anzahl** in ge-
iegender Punkte A, B, C, **u. ſ. f. gilt.** Der
bt immer derſelbe.

ſchreibt man nun durch die **Spitzen eines** einge-
Sechsecks ABCDEF (Fig. 153.) **ein Sechseck**
den Kreis; ſo läßt ſich **leicht zeigen**, daß die
des letztern ſich immer in **einem Punkte** ſchnei-
achtet man nämlich die **Vierecke** BCEF, beg-
(27.) unmittelbar **umgekehrt, daß** nn′, nn″ Be-
nd. Eben ſo ſind **mm′, mm″, pp′, pp″**
, wo m′, m″, p′, p″ **ähnlich liegende Punkte**
, in der Figur aber **nicht verzeichnet** ſind. Da
, p in einer geraden Linie **liegen** (28.); ſo

nehme die Projectionsebene mit Pmn parallel an; so sind die Projectionen ac, a'c'; bc, b'c' der entsprechenden Linien einander parallel (18.). Folglich nach dem Vorhergehenden auch ab, a'b'. Demnach liegen m, n, p in einer geraden Linie (22.). M. s. Desargues Traité de perspective. Paris. 1648. Servois Solutions peu connues de différens problèmes de Géom. Metz. 1804. Andere vielfache Anwendungen der Theorie der Projectionen s. m. bei Poncelet a. a. O.

Mehrere Eigenschaften des Vierecks s. m. noch in dem Art. Transversale.

Vieltheilige Größe, s. Polynomium.

Virginum regula, s. Regel. Thl. IV. S. 264.

Vierung wird bei ältern deutschen Schriftstellern zuweilen statt des jetzt gewöhnlichen Ausdrucks Quadratur gebraucht. Die Ueberschrift von Archimedes Schrift über die Quadratur der Parabel übersetzt z. B. J. C. Sturm in seiner deutschen Uebersetzung der Werke des griechischen Geometers (Archimedis Kunstbücher. Nürnberg. 1670.): „Von der Parabelvierung." Zuweilen bedeutet dieses Kunstwort aber auch überhaupt ein Viereck, wie z. B. ungleiche oder ungeschickte Vierung statt Trapezium. S. Trapezium.

Vivianische Aufgabe, s. Florentinische Aufgabe.

Vollkommene oder vollständige Zahl (n. perfectus) ist eine Zahl, welche der Summe ihrer aliquoten Theile gleich ist, wie z. B. $6 = 1 + 2 + 3$, $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$. Jenachdem eine Zahl größer oder kleiner ist, als die Summe ihrer aliquoten Theile, heißt sie eine mangelhafte (n. deficiens) oder überschießende Zahl (n. abundans); erstere auch eine unvollkommene.

Vollständige Zahlen zu finden, lehrt schon Euclides

Vollkommene Zahl.

„Nimmt man so viele von der Einheit an
ppelte Zahlen, bis deren Summe eine Prim-
o ist das Product aus dieser Summe in die
e Zahlen eine vollkommene Zahl," oder in
hmetischen Sprache: Ist die Summe der
n Progression $1, 2, 4, 8, \ldots 2^n$, welche
-1, eine Primzahl; so ist $(2^{n+1}-1).2^n$
mmene Zahl. Da nämlich nach der Annahme
nd auch 2 eine Primzahl ist; so ist (Theiler
l. 15.) die Summe der Theiler des Products
$).2^n$, die Einheit und diese Zahl selbst mit
n,

$$= \frac{(2^{n+1}-1)^2-1}{2^{n+1}-1-1} \cdot \frac{2^{n+1}-1}{2-1}$$

$$= \frac{(2^{n+1}-1-1)(2^{n+1}-1+1)}{2^{n+1}-1-1} \cdot \frac{2^{n+1}-1}{2-1}$$

$$= 2^{n+1}.(2^{n+1}-1).$$

Summe der aliquoten Theile, wobei die Zahl
schlossen werden muß,

$(2^{n+1}-1) - 2^n.(2^{n+1}-1) = 2^n.(2^{n+1}-1)$,

bst gleich, wie es seyn muß. Dieselbe sieht

mene gehalten worden, die es nicht sind. Heilbronner (Hist. Mathes. p. 755.) giebt 130816 und 2096128 als vollkommene Zahlen an. Die erste ist $= (2^9 - 1).2^8 = 256,511$, die andere $= (2^{11} - 1).2^{10} = 1024.2047$. Aber weder $511 = 7.73$, noch $2047 = 23.89$ ist eine Primzahl. Auch schon W. Kraft (Comm. Petrop. T. VII. p. 7.) hat diese, und mehrere andere, Zahlen als falsch bezeichnet. M. s. auch Grüsons enthüllte Zaubereien und Geheimnisse der Arithm. Berlin. 1796. Thl. I. S. 86. M. G. Hansch (Theoria Arithmeticeş novis a se inventis aucta. Vindob. 1739.) macht den Fehlschluß, daß alle Zahlen von der Form $2^{n+1} - 1$ Primzahlen seyen, wenn nur $n + 1$ eine Primzahl ist, welches schon für $n = 10$ nicht mehr eintrifft, da $2^{11} - 1 = 2047 = 23.89$ ist, ein Irrthum, den schon Winsheim (De num. perf. Nov. Comm. Petrop. T. II. p. 68.) widerlegt hat. Auch der Herausgeber der zweiten Ausgabe von Wolfs mathem. Lexicon und Petrus Bunge (Numerorum mysteria. Lut. Paris. 1618.) haben falsche vollkommene Zahlen. Noch gehören hierher: Joan. Boroscii Apologia pro Aristotele et Euclide contra Petrum Ramum et alios de numeris perfectis. Dantisci. 1652. 4., wovon eine andere Ausgabe unter etwas anderm Titel (Arnst. 1699.) Kästner in den geom. Samml. II. S. 416. anführt. Auch in Lucas de Burgo Sancti Sepulchri summa de Arithmetica Geometria Proportioni e Proportionalita finden sich gleich zu Anfange Vorschriften, die vollkommenen Zahlen zu finden.

Volumen ist das Maaß des Raumes, welchen ein Körper einnimmt.

Voluta delumbata heißt zuweilen die Quadratrix. S. u. A. Heilbronner Historia Mathes. p. 154.

Voraussetzung oder Hypothesis, s. Thesis.

W.

ſatz oder willkührlicher Satz iſt ein Satz,
von willkührlichen Einrichtungen, Bezeichnun-
gl., wie z. B. von den bei dem Längen- und
ſe üblichen Eintheilungen und Bezeichnungen,
geben wird. Die Benennung iſt übrigens nicht
auch gekommen.

re Wurzeln einer Gleichung, ſ. Glei-
).

rſcheinlicher Fehler, ſ. Wahrſcheinlich-
g (89.).

rſcheinlichkeitsrechnung (Ars conjectan-
des probabilités.) iſt die Wiſſenſchaft von
ung der mathematiſchen Wahrſcheinlichkeit.

A. B.	A. B.	A. B.	A. B.	A. B.	A. B.
1 1	2 1	3 1	4 1	5 1	6 1
1 2	2 2	3 2	4 2	5 2	6 2
1 3	2 3	3 3	4 3	5 3	6 3
1 4	2 4	3 4	4 4	5 4	6 4
1 5	2 5	3 5	4 5	5 5	6 5
1 6	2 6	3 6	4 6	5 6	6 6

ist die Anzahl aller möglichen Würfe = 36. Die hrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln 1 und 2 zu werfen, $= \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$; die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln einen Pasch zu werfen, $= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$; die Wahrscheinlichkeit aber, mit zwei Würfeln einen bestimmten Pasch werfen, $= \frac{1}{36}$.

2. Bezeichnen wir also überhaupt die Anzahl der einem eignisse günstigen Fälle durch n, die Anzahl aller mögen Fälle durch N, und die mathematische Wahrscheinkeit des Ereignisses durch w; so ist

$$w = \frac{n}{N},$$

bei aber, wie sich von selbst versteht, vorausgesetzt wern muß, daß alle Fälle an sich gleich möglich sind. Je ßer die Anzahl der günstigen Fälle im Verhältniß zu Anzahl aller Fälle ist, desto größer ist w, und desto ßer ist in der That auch die Wahrscheinlichkeit, daß das Rede stehende Ereigniß wirklich eintreffen wird. Die thematische Wahrscheinlichkeit ist das bestimmte Maaß sen, was man im gemeinen Leben Wahrscheinlichkeit nt.

3. Die ganze Schwierigkeit in der Lehre von der Behnung der Wahrscheinlichkeit kommt, wie man aus der eben gegebenen Definition sieht, auf die Bestimmung r Anzahl aller einem gewissen Ereignisse günstigen, und r Anzahl aller möglichen Fälle, welche bei diesem Ereigsse überhaupt eintreten können, zurück, eine Bestimung, die in der That häufig beträchtlichen Schwierigkeiunterworfen ist. Die combinatorische Analysis leistet bei vortreffliche Dienste, und wir sind berechtigt, die-

s den ihr gewidmeten Artikeln dieſes Wörter-
kannt vorauszuſetzen. Eigentlich unterſcheidet
wei Arten der Wahrſcheinlichkeit. Läßt ſich
Anzahl aller möglichen ſowohl, als auch der
älle auf rein wiſſenſchaftlichem Wege, aus
ittelſt demonſtrirter Sätze beſtimmen; ſo nennt
tſprechende Wahrſcheinlichkeit Wahrſchein-
us Gründen oder Wahrſcheinlichkeit
, und nur dieſe Art der Wahrſcheinlichkeit ge-
Kreis dieſer erſten Abtheilung unſers Wörter-
hlt es aber bei der erwähnten Beſtimmung an
ln, ſtatt deren man Erfahrungen zu Hülfe neh-
ſo erhält man eine Wahrſcheinlichkeit
bachtung oder Wahrſcheinlichkeit a
ri, wovon nur in den folgenden Abtheilungen
es ausführlich gehandelt werden kann, obgleich
der Ueberſicht wegen, in dieſem Artikel Eini-
eſen wichtigen Gegenſtand beigebracht werden
Beſtimmung der Wahrſcheinlichkeit a poste-
o ſicherer, je größer die Anzahl der zum Grunde

alle Fälle gleich möglich sind. Ist $w = \frac{1}{2}$, so nennt man das Ereigniß zweifelhaft; ist $w > \frac{1}{2}$, so heißt es schlechthin im gemeinen Leben wahrscheinlich, und unwahrscheinlich, wenn $w < \frac{1}{2}$ ist.

5. Was der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses zur Gewißheit fehlt, heißt die Ergänzung der Wahrscheinlichkeit oder die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit, welche in der Folge immer dnrch w_1 bezeichnet werden soll, so daß also

$$w + w_1 = 1,$$

$$w_1 = 1 - w = 1 - \frac{n}{N} = \frac{N-n}{N};$$

und es ist folglich, da $N - n$ offenbar die Anzahl der dem Ereignisse ungünstigen Fälle ist, w_1 die Wahrscheinlichkeit für das Nichteintreffen desselben. Setzen wir $N - n = m$; so ist immer

$$n + m = N,\ w = \frac{n}{N},\ w_1 = \frac{m}{N};$$

$$w + w_1 = \frac{n}{N} + \frac{m}{N} = 1;$$

$$w = \frac{n}{n+m},\ w_1 = \frac{m}{n+m}.$$

Zuweilen ist es leichter, statt die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses unmittelbar zu bestimmen, seine entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit aufzusuchen.

6. Von der bisher betrachteten, oder der absoluten, Wahrscheinlichkeit ist verschieden die relative. Spielen z. B. zwei Personen mit zwei Würfeln unter der Bedingung mit einander, daß, indem alle übrigen Fälle unbeachtet bleiben, der erste gewinnen soll, wenn er 7, der zweite, wenn er 4 wirft; so kann man fragen, welche Wahrscheinlichkeit jeder Spieler zu gewinnen habe. Nach der Tabelle in (1.) kann mit zwei Würfeln 7 auf 6, 4 auf 3 verschiedene Arten geworfen werden. Daher ist, weil alle übrigen Fälle unbeachtet bleiben, die Anzahl aller möglichen Fälle $= 9$, die Wahrscheinlichkeit des ersten Spielers also $= \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$, die des zweiten $= \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, und ihre Wahrscheinlichkeiten zu gewinnen verhalten sich $= 2:1$. Ist überhaupt die Anzahl aller möglichen Fälle,

$= N$, die Anzahl der einen Art von Fällen
$= n'$, die Anzahl der andern Art $= n''$; ſo
lle übrigen Fälle unberückſichtigt bleiben, die
ichkeit für das Eintreten eines Falls der erſten

$$= \frac{n'}{n' + n''},$$

hrſcheinlichkeit für das Eintreten eines Falles
Art unter derſelben Bedingung

$$= \frac{n''}{n' + n''}.$$

ie relativen Wahrſcheinlichkeiten. Die abſo-
ſcheinlichkeiten in Bezug auf die beiden Arten
ſind:

$$w' = \frac{n'}{N} \text{ und } w'' = \frac{n''}{N}.$$

$$\frac{n'}{n' + n''} = \frac{n' : N}{(n' : N) + (n'' : N)} = \frac{w'}{w' + w''},$$

$$\frac{n''}{\quad} = \frac{n'' : N}{\quad} = \frac{w''}{\quad},$$

n', n'', n''', n'''', ..., und ihre einzelnen Probabilitäten w', w'', w''', w'''', ... ; so ist

$$w' = \frac{n'}{N},\ w'' = \frac{n''}{N},\ w''' = \frac{n'''}{N},\ w'''' = \frac{n''''}{N},\ \ldots.$$

Die Anzahl aller günstigen Fälle, in Bezug auf die vorgelegte Aufgabe, ist =

$$n = n' + n'' + n''' + n'''' + \ldots.,$$

und demnach die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen irgend eines der gegebenen Ereignisse =

$$w = \frac{n}{N} = \frac{n' + n'' + n''' + n'''' + \ldots.}{N}$$

$$= \frac{n'}{N} + \frac{n''}{N} + \frac{n'''}{N} + \frac{n''''}{N} + \ldots.$$

Also $w = w' + w'' + w''' + w'''' + \ldots.$, d. i. die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen irgend eines der gegebenen Ereignisse ist der Summe der Probabilitäten der einzelnen Ereignisse gleich.

Mit einem Würfel eine bestimmte Anzahl von Augen auf den ersten Wurf zu werfen ist die Wahrscheinlichkeit $= \frac{1}{6}$. Also die Wahrscheinlichkeit, irgend eine unbestimmte Anzahl von Augen auf den ersten Wurf zu werfen, $= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1$, d. i. Gewißheit, wie es auch seyn muß.

Die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln 7 zu werfen, ist $= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, und die Wahrscheinlichkeit, 8 zu werfen, $= \frac{5}{36}$. Also ist die Wahrscheinlichkeit, 7 oder 8 zu werfen, $= \frac{6}{36} + \frac{5}{36} = \frac{11}{36}$. Die Wahrscheinlichkeit, 9 zu werfen, ist $= \frac{4}{36}$. Also die Wahrscheinlichkeit, 7, 8 oder 9 zu werfen, $= \frac{6}{36} + \frac{5}{36} + \frac{4}{36} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$. Die Wahrscheinlichkeit, 8 oder 9 zu werfen, dagegen $= \frac{5}{36} + \frac{4}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.

Seyen w, w', w'', w''', ... wieder die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen verschiedener Ereignisse, w_1 aber sey die Wahrscheinlichkeit, daß keines dieser Ereignisse eintrifft; so ist immer

$$w + w' + w'' + w''' + \ldots. + w_1 = 1.$$

Denn die Wahrscheinlichkeit, daß irgend eines der gegebenen Ereignisse eintrifft, ist nach dem Obigen

$= w + w' + w'' + w''' + \ldots$,

hrscheinlichkeit, daß keines eintrifft, nach der
ng $= w_1$. Folglich die Wahrscheinlich-
ntweder eines oder keines eintrifft, nach dem

$= w + w' + w'' + w''' + \ldots + w_1$.

Falle findet aber offenbar Gewißheit ſtatt; und
4.)

$w + w' + w'' + w''' + \ldots + w_1 = 1$.

t eine Erweiterung des Princips von den ent-
n Wahrſcheinlichkeiten (5.).

d wieder w', w'', w''', w'''', ... die Wahr-
en mehrerer einzelnen Ereigniſſe; ſo kann man
Wahrſcheinlichkeit fragen, daß alle dieſe Ereig-
mentreffen. Werfen z. B. zwei Perſonen zu-
einem Becher jede zwei Würfel auf den Tiſch;
n nach der Wahrſcheinlichkeit fragen, daß die
e andere 9 Augen werfe.

abe zuerſt bloß zwei Ereigniſſe, deren Wahr-

daß alle drei Ereigniſſe zuſammen eintreffen werden, iſt alſo, wie vorher, =

$$w = w'w''.w''' = w'w''w'''.$$

So weiter gehend ſchließt man leicht, daß die Probabilität für das Zuſammentreffen aller in Rede ſtehenden Ereigniſſe =

$$w = w'w''w'''w''''w''''' \ldots,$$

d. i. dem Producte der Probabilitäten aller einzelnen Ereigniſſe gleich iſt.

In Bezug auf obiges Beiſpiel ſind die beiden Probabilitäten $= \frac{5}{36}$, und $= \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$; alſo die Probabilität für das zuſammengeſetzte Ereigniß, d. i. das Zuſammentreffen beider Ereigniſſe, $= \frac{5}{36} \cdot \frac{1}{9} = \frac{5}{324}$.

Wenn A, B jeder zwei, C einen Würfel auf den Tiſch wirft; ſo iſt die Wahrſcheinlichkeit, daß A einen Paſch, B keinen Paſch, und C ſechs Augen wirft, $= \frac{6}{36} \cdot \frac{30}{36} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{216}$.

10. Wird eine und dieſelbe Handlung mehrere Male wiederholt; ſo kann man nach der Wahrſcheinlichkeit fragen, daß die Ereigniſſe, deren Wahrſcheinlichkeiten w', w'', w''', w'''', ... ſind, hinter einander eintreten.

Die Anzahl aller möglichen Fälle ſey $= N$, und

$$w' = \frac{n'}{N},\ w'' = \frac{n''}{N},\ w''' = \frac{n'''}{N},\ w'''' = \frac{n''''}{N}, \ldots.$$

Man habe zuerſt nur zwei Ereigniſſe, die hinter einander eintreten ſollen; ſo iſt die Anzahl aller möglichen Fälle, das zweite Ereigniß mag vor oder nach dem erſten eintreten, offenbar $= NN = N^2$, nach der Lehre von den Variationen. (S. dieſen Artikel.) Da nun ferner jeder dem zweiten Ereigniſſe günſtige Fall hinter jedem einzelnen, dem erſten günſtigen, Falle eintreten kann; ſo iſt die Anzahl der für das auf einander folgende Eintreffen beider Ereigniſſe günſtigen Fälle $= n'n''$, und folglich die geſuchte Wahrſcheinlichkeit =

$$w = \frac{n'n''}{N^2}.$$

Kommt noch ein drittes Ereigniß hinzu; ſo iſt nach der

en Variationen die Anzahl aller möglichen Fälle
nd, da jeder der dem dritten Ereigniſſe günſti-
nter jedem einzelnen der Fälle, in welchen das
weite Ereigniß auf einander folgen, eintreten
lnzahl der günſtigen Fälle $= n'n''n'''$; alſo die
ahrſcheinlichkeit $=$

$$w = \frac{n'n''n'''}{N^3}.$$

ahl der gegebenen Ereigniſſe $= x$; ſo ſchließt
s leicht, daß überhaupt

$$w = \frac{n'n''n'''n'''' \ldots .}{N^x},$$

$w'w''w'''w'''' \ldots .$ Iſt einer oder der an-
rüche, durch welche die einzelnen Wahrſchein-
rgeſtellt werden, vielleicht aufgehoben; ſo er-
, daß letztere Gleichung dennoch richtig bleibt.
Wahrſcheinlichkeit, daß ein Ereigniß, deſſen
lichkeit $= w' = \frac{n'}{N}$ iſt, xmal hinter einander
t $=$

$$w = w'^x = \left(\frac{n'}{N}\right)^x.$$

ind, indem N die Anzahl aller möglichen Fälle bezeichnet, die Wahrscheinlichkeiten zweier Ereignisse; so könnte man auch nach der Wahrscheinlichkeit fragen, daß entweder das erste Ereigniß eintrifft, oder, wenn dies nicht der Fall wäre, dann doch das zweite eintrifft.

Die Wahrscheinlichkeit, daß das erste Ereigniß eintrifft, ist $= w'$; also die Wahrscheinlichkeit, daß dieses Ereigniß nicht eintrifft, $= 1 - w'$ (5.). Folglich die Wahrscheinlichkeit, daß das erste Ereigniß nicht, aber dann das zweite eintrifft, $= (1 - w')w''$ (10.). Demnach die Wahrscheinlichkeit, daß entweder das erste Ereigniß eintrifft, oder dieses Ereigniß nicht, dann aber das zweite erfolgt, $= w' + (1 - w')w''$ (8.). Ist also w die gesuchte Probabilität; so ist

$$\begin{aligned} w &= w' + w'' - w'w'' \\ &= 1 - 1 + w'' + w' - w'w'' \\ &= 1 - (1 - w'') + w'(1 - w'') \\ &= 1 - (1 - w')(1 - w''), \end{aligned}$$

d. i. die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist der Ergänzung der aus den entgegengesetzten Wahrscheinlichkeiten der beiden Ereignisse zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit gleich.

Die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln auf den ersten Wurf 9 Augen, oder, wenn dies nicht geschieht, auf den zweiten Wurf 8 Augen zu werfen, ist

$$\begin{aligned} &= 1 - (1 - \tfrac{4}{36})(1 - \tfrac{5}{36}) \\ &= 1 - \tfrac{32}{36} \cdot \tfrac{31}{36} = 1 - \tfrac{8}{9} \cdot \tfrac{31}{36} = 1 - \tfrac{62}{81} \\ &= \tfrac{19}{81}. \end{aligned}$$

12. Hat man drei Ereignisse, deren Probabilitäten

$$w' = \frac{n'}{N},\ w'' = \frac{n''}{N},\ w''' = \frac{n'''}{N}$$

sind; so kann man nach der Wahrscheinlichkeit fragen, daß entweder das erste Ereigniß eintrifft, oder, wenn dies nicht der Fall wäre, das zweite erfolgt, oder, wenn auch dies nicht der Fall wäre, doch das dritte eintrifft. Setzt man

$$v = 1 - (1 - w')(1 - w'');$$

so erhellet leicht, wie vorher, daß

$$w = 1 - (1 - v)(1 - w''').$$

Für die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln im ersten

oder, wenn dies nicht eintrifft, im zweiten
oder, wenn auch dies nicht eintreffen ſollte,
ten Wurfe 7 zu werfen, iſt

$v = 1 - (1 - \frac{6}{36})(1 - \frac{6}{36}) = \frac{11}{36}$;

$w = 1 - (1 - \frac{11}{36})(1 - \frac{6}{36}) = \frac{91}{1296}$.

: man bei vier Ereigniſſen auf ähnliche Art wie

$$v = 1 - (1 - w')(1 - w''),$$
$$v' = 1 - (1 - v)(1 - w'''),$$
$$w = 1 - (1 - v')(1 - w''''),$$

ſen:

$$v = 1 - (1 - w')(1 - w''),$$
$$v' = 1 - (1 - v)(1 - w'''),$$
$$v'' = 1 - (1 - v')(1 - w''''),$$
$$w = 1 - (1 - v'')(1 - w''''')$$

u. ſ. f. u. ſ. f.

ägt man, um noch ein Beiſpiel zu dem Vor-
zu geben, nach der Wahrſcheinlichkeit, mit
er in zwei Würfen wenigſtens einmal Münz
er croix) zu werfen; ſo wirft man entweder

as zweite Mal Münz; das erste Mal Münz, das zweite Mal Unmünz; das erste Mal Unmünz, das zweite Mal Münz; das erste Mal Unmünz, das zweite Mal Unmünz. Also sind überhaupt 4 Fälle möglich, und 3 derselben sind ünstig, die Wahrscheinlichkeit also $= \frac{3}{4}$.

D'Alembert (Opuscules mathématiques. T. II. . 20.) hat sich bei dieser an sich ganz leichten Aufgabe eirrt, indem er die gesuchte Wahrscheinlichkeit nur $= \frac{2}{3}$ ndet. Denn, sagt er, trifft man das erste Mal Münz,) ist das Spiel geendet, trifft man aber das erste Mal nmünz, so muß noch zum zweiten Male geworfen wer- en, in welchem entweder Münz oder Unmünz fällt, so aß also nur 3 Fälle möglich, 2 günstig sind, die Wahr- heinlichkeit also $= \frac{2}{3}$ ist. Man übersieht leicht, mit dem)bigen verglichen, das Irrige dieser Schlußart. Vor- üglich liegt der Irrthum darin, daß d'Alembert allen rei Fällen gleiche Möglichkeit beilegt (S. Laplace héorie des probabilités. Trois. édit. p. VII.). Man sieht aber hieraus, wie behutsam man bei Fragen er Wahrscheinlichkeitsrechnung seyn muß. Ueber das Spiel: Münz und Unmünz (Schrift und Wapen; croix u pile) s. m. auch einen Aufsatz von Lambert in dem rchiv der Mathematik von Hindenburg. Heft 10. S. 216.

14. Ein zu erwartender ungewisser Gewinn ist offen- ar desto größer, oder hat vielmehr desto mehr Werth, je :ößer die zu gewinnende Summe, und je größer die Bahrscheinlichkeit ist, ihn zu erhalten. Sind die Wahr- heinlichkeiten gleich, so stehen die zu erwartenden Ge- inne offenbar in geradem Verhältniß der zu gewinnenden ummen, und eben so stehen bei gleichen Summen die zu wartenden Gewinne in geradem Verhältniß der Wahr- heinlichkeiten, sie zu erhalten. Sind also für die Sum- en und Wahrscheinlichkeiten

$$s, s', s''; w, w', w''$$

e zu erwartenden Gewinne g, g', g''; so ist

$$g : g'' = w : w', \quad g'' : g' = s : s',$$

h Zuſammenſetzung:

$$g : g' = sw : s'w' .$$

un für $s' = 1$ und $w' = 1$ auch $g' = 1$;
n

$$g = sw ,$$

öße des zu erwartenden Gewinnes iſt dem Pre-
r zu gewinnenden Summe in die Wahrſchein-
zu erhalten, gleich, den bei einer Summe
er Gewißheit, ſie zu erhalten, zu erwartenden
Einheit angenommen.

roduct sw nennt man in der Wahrſcheinlich-
g die mathematiſche Hoffnung oder
rtung (sors, lucrum). Die eigentliche
dieſes Ausdrucks erhellet aus dem Vorherge-

ängt der zu erwartende Gewinn von mehrern
ab; ſo erhält man ihn, wenn die zu erwarten-
mit der Wahrſcheinlichkeit, ſie zu erhalten, bei
nen Ereigniſſe multiplicirt wird, und die ein-

erschiedene Spiele zu betrachten, da der erste gar keinen Einfluß auf den zweiten hat, und die Wahrscheinlichkeit ist folglich in beiden Fällen $= \frac{1}{2}$, die Erwartung also $= 2.\frac{1}{2} + 5.\frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$.

16. Verlust wird als negativer Gewinn betrachtet, und als solcher in die Rechnung eingeführt. Soll A 2 Thlr. gewinnen, wenn er das erste Mal Münz wirft, und 1 Thlr. verlieren, wenn er das zweite Mal Unmünz wirft, so daß aber das Spiel als beendigt angesehen wird, wenn A beim ersten Male gewinnt; so ist die Wahrscheinlichkeit, das erste Mal Münz zu werfen, $= \frac{1}{2}$, und, es nicht zu werfen, ebenfalls $= \frac{1}{2}$. Die Wahrscheinlichkeit, das zweite Mal Unmünz zu werfen, ist $= \frac{1}{2}$; also die Wahrscheinlichkeit, das erste Mal nicht Münz, und das zweite Mal Unmünz zu werfen, $= \frac{1}{4}$ (10.). Folglich die Erwartung des $A = 2.\frac{1}{4} - 1.\frac{1}{4} = -1\frac{1}{4}$, die sich aber wieder in die Furcht verwandelt, $1\frac{1}{4}$ Thlr. zu verlieren. Wird nur einmal geworfen, und unter der Bedingung gespielt, daß A 2 Thlr. gewinnt, wenn er Münz, 2 Thlr. verliert, wenn er Unmünz wirft; so ist seine Erwartung $= 2.\frac{1}{2} - 2.\frac{1}{2} = 0$, d. h., er hat eben so viele Hoffnung, 1 Thlr. zu gewinnen, als 2 Thlr. zu verlieren, wie sich auch von selbst versteht.

17. Die sich aus den eben erläuterten Regeln zur Bestimmung der mathematischen Hoffnung ergebenden Resultate scheinen zuweilen dem, was der gesunde Menschenverstand lehrt, zu widersprechen, welches zuerst an einem Probleme beobachtet worden ist, welches im Jahre 1713 dem Herrn von Montmort von Nicolas Bernoulli vorgelegt wurde (Essay d'Analyse sur les jeux de hazard. 2. éd. Paris. 1713. p. 402.), und nachher vorzüglich durch Daniel Bernoulli's Behandlung unter dem Namen Petersburger Problem in der Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung berühmt geworden ist. Wir wollen dasselbe hier unter folgender Form betrachten:

A und B spielen Münz und Unmünz (Schrift und Kopf) unter der Bedingung, daß A dem B zwei Du-

wenn der erste Wurf Münz ist, vier Duca-
rst der zweite Wurf Münz ist, acht Ducaten,
dritte Wurf Münz ist, und so fort bis zum
. Wie groß ist die Erwartung von B, und
o B am Anfange des Spiels setzen?
t man die Wahrscheinlichkeiten nach der Regel
ngesetzten Wahrscheinlichkeit in (10.), und
ng des B nach (15.); so erhält man sehr leicht
olgenden Ausdruck:

$$+ \tfrac{1}{4}.4 + \tfrac{1}{8}.8 + \tfrac{1}{16}.16 + \ldots + \frac{1}{2^n}.2^n$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß in keinem der
ünz fällt, ist $= \frac{1}{2^n}$, und es scheint also, daß
eigentlich noch um ein Glied zu vermehren sey.
n B auch Nichts erhält; so ist das noch beizu-
ed $= \frac{1}{2^n}.0 = 0$. Wir erwähnen dies, wenn
chon von selbst versteht, wegen des Folgenden.
Anzahl der einzelnen Spiele sehr groß oder gar
so könnte B auch eine sehr große oder eine un-
mme wagen. Wird dies aber wohl ein auch

19. Der Werth einer Summe Geldes kann in der Mathematik bloß nach ihrer absoluten Größe beurtheilt werden, ohne Rücksicht auf das besondere Interesse der Person, welche jene Summe besitzt, oder nicht besitzt. Daß aber z. B. ein Thaler für Jemanden, dessen Vermögen sich auf hundert Thaler beläuft, einen weit größern Werth haben muß, als für einen Millionair, wird von Niemand bezweifelt. Dies hat darauf geführt, zwischen dem physischen und moralischen Werthe einer Summe Geldes zu unterscheiden, indem man unter jenem den absoluten Werth derselben ohne Rücksicht auf das besondere Interesse der Person, welche diese Summe besitzt oder nicht besitzt, unter diesem aber ihren Werth in Bezug auf ihren absoluten Werth und zugleich mit Rücksicht auf das besondere Interesse der Person, welche diese Summe besitzt oder nicht besitzt, versteht. Sogleich bietet sich aber hier die Frage dar, wie man den von tausenderlei Dingen abhängenden moralischen Werth einer Summe Geldes beurtheilen könne, und es fällt leicht in die Augen, daß, allgemeine Regeln hierzu zu geben, unmöglich ist, da die Interessen der einzelnen Personen so unendlich verschieden sind. Indeß hat folgende Hypothese Daniel Bernoulli's den meisten Beifall gefunden, und scheint sich in der That auch der Erfahrung am besten anzuschließen:

„Der moralische oder relative Werth einer unendlich „kleinen Summe steht in geradem Verhältnisse ihres abso„luten Werthes, und in umgekehrtem Verhältnisse des „ganzen Vermögens der dabei interessirten Person."

Bernoulli bemerkt zugleich, daß jeder Mensch, auch der ärmste, nach den gemeinen Begriffen, ein gewisses Vermögen besitze, welches bei den meisten allerdings in ihrem Fleiße bestehe. Wer durch Betteln sein Leben fristet, und dadurch jährlich 10 Ducaten erwirbt, sagt Bernoulli, wird nicht 50 Ducaten annehmen, unter der Bedingung, auf jene Art, und auf jede andere, sein Leben zu fristen, Verzicht zu leisten. Also jeder Mensch hat ein gewisses Vermögen; nur der so eben vor Hunger Sterbende hat absolut nichts.

eichnet nun x den abſoluten Werth, y den
r moraliſchen Werth einer Summe Geldes,
t eine unendlich kleine Veränderung, die durch
ckt wird, ſo drückt Laplace, dem obigen
näß, den relativen Werth von ∂x allgemein
vo k eine Conſtante bezeichnet, aus. Dies
e Veränderung des moraliſchen Werthes, ſo
$= \frac{k\partial x}{x}$, woraus durch Integration:

$$y = k \log x + \log h ,$$

e willkührliche Conſtante durch $\log h$ aus-
ieſe Conſtante müßte durch einen Werth von
inem gegebenen Werthe von x entſpricht, be-
en.

n in (19.) Bemerkten erhellet, daß man x
= o, auch nie negativ, ſetzen kann, da jeder
ſt der Bettler und Schuldner, ſo lange er ſein
, ein gewiſſes Vermögen hat, oder wenigſtens
s habend zu betrachten iſt.

Die Summe

$$\begin{aligned} Y = {} & w\,\{k\log n(a+\alpha) + \log n\,h\} \\ & + w'\,\{k\log n(a+\alpha') + \log n\,h\} \\ & + w''\,\{k\log n(a+\alpha'') + \log n\,h\} \\ & + w'''\,\{k\log n(a+\alpha''') + \log n\,h\} \\ & + \ldots\ldots \end{aligned}$$

$$= kw.\log n(a+\alpha) + kw'.\log n(a+\alpha') + kw''.\log n(a+\alpha'') + \ldots + (w+w'+w''+w'''+\ldots)\log n\,h$$

$$= kw.\log n(a+\alpha) + kw'.\log n(a+\alpha') + kw''.\log n(a+\alpha'') + \ldots + \log n\,h$$

nennt Bernoulli mensura sortis, und Laplace (a. a. O. p. 433.) schlechthin fortune morale. Am schicklichsten scheint uns der Ausdruck: erwartetes moralisches Vermögen, den wir im Folgenden beibehalten wollen, da moralisches Vermögen, ohne Beisatz, nach dem Vorhergehenden eigentlich schon etwas anderes bedeutet. Bezeichnen wir nun das dem physischen Vermögen a, oder dem erwarteten moralischen Vermögen Y, entsprechende erwartete physische Vermögen durch X; so ist nach (20.)

$$Y = k\log n X + \log n\,h\,,$$

und folglich, wenn man beide Ausdrücke von Y einander gleich setzt, nach leichter Reduction:

$$\log n X = w\log n(a+\alpha) + w'\log n(a+\alpha') + w''\log n(a+\alpha'') + \ldots\,,$$

$$X = (a+\alpha)^w.(a+\alpha')^{w'}.(a+\alpha'')^{w''}.(a+\alpha''')^{w'''}\ldots.$$

ein Ausdruck für das dem physischen Vermögen a entsprechende erwartete physische Vermögen. Die Differenz X — a nennt Laplace espérance morale, d. i. moralische Hoffnung, deren Ausdruck also

$$(a+\alpha)^w.(a+\alpha')^{w'}.(a+\alpha'')^{w''}.(a+\alpha''')^{w'''}\ldots. - a$$

ist. Der Ausdruck der mathematischen Hoffnung ist (15.)

$$\alpha w + \alpha' w' + \alpha'' w'' + \alpha''' w''' + \ldots.$$

Die beständige Größe k, welche Laplace beifügt, verschwindet, wie zu erwarten war.

22. Entwickelt man X — a nach Potenzen von α, α', α'', α''', ..., und behält bloß die ersten Potenzen dieser Größen bei; so erhält man

$$\begin{aligned} X - a = {} & aw+w'+w''+w'''+\ldots. \\ & + aw+w'+w''+w'''+\ldots - 1\,(w\alpha+w'\alpha'+w''\alpha''+w'''\alpha'''+\ldots) \\ & + \ldots\ldots - a\,. \end{aligned}$$

$w''' + \ldots = 1$, $w + w' + w'' + w''' + \ldots - 1 = s$,

$- s = \alpha w + \alpha' w' + \alpha'' w'' + \alpha''' w''' + \ldots$
$+ \ldots\ldots$

nden Glieder α, α', α'', ... in höhern D
s die erſten enthalten. Die moraliſche Hoff
ſich alſo der mathematiſchen deſto mehr, j
$'$, α'', ... ſind, und beide ſind einander gleich
nn dieſe Größen als unendlich klein angenom

rnoulli bringt noch verſchiedene Anwendun
Sätze bei, und Laplace betrachtet dieſelben
einern Geſichtspunkten. Hier begnügen wir
ſtehenden Bemerkungen.

n obigen Formeln erhellet z. B., daß jedes
gleiche Spiel doch immer im Allgemeinen mit
rknüpft iſt. Das phyſiſche Vermögen eines
ei Spielern ſey 100 Ducaten, jeder ſetze 50

m Falle das physische Vermögen keine Veränderung erdet, die moralische Hoffnung

$$= (a+\varepsilon)^w . a^{1-w} - a .$$

Das erwartete moralische Vermögen selbst ist

$$= kw\log n(a+\varepsilon) + k(1-w)\log na + \log nh .$$

Setzt man, ohne der Allgemeinheit zu schaden, das physihe Vermögen $a = 1$; so wird die moralische Hoffnung

$$= (1+\varepsilon)^w - 1 ,$$

nd das erwartete moralische Vermögen

$$= kw\log n(1+\varepsilon) + \log nh .$$

Assecurirt der Kaufmann das Schiff; so kann er, da le Wahrscheinlichkeit, daß das Schiff untergehen wird, $= 1 - w$ ist, an die Assecuranz-Gesellschaft nur $(1-w)\varepsilon$ ezahlen. Assecurirt er nicht, so ist das erwartete moraische Vermögen, wie wir schon gesehen haben,

$$= kw\log n(1+\varepsilon) + \log nh ;$$

ssecurirt er aber, so ist das erwartete moralische Verögen

$$= k\log n\{1+\varepsilon-(1-w)\varepsilon\} + \log nh$$
$$= k\log n(1+\varepsilon w) + \log nh.$$

Da nun w ein echter Bruch ist, so ist

$$\frac{w\partial\varepsilon}{1+\varepsilon w} > \frac{w\partial\varepsilon}{1+\varepsilon} ,$$

$$\int\frac{w\partial\varepsilon}{1+\varepsilon w} > \int\frac{w\partial\varepsilon}{1+\varepsilon} ,$$

$$\text{d. i. } \log n(1+\varepsilon w) > w\log n(1+\varepsilon) .$$

olglich ist das erwartete moralische Vermögen des Kaufanns in dem Falle, wo er assecurirt, größer als in dem alle, wo er nicht assecurirt, vorausgesetzt, daß er nicht ehr als $(1-w)\varepsilon$ an die Assecuranz-Gesellschaft behlt. Er wird also in einem solchen Falle mit Vortheil ir sich assecuriren.

Soll der Kaufmann überhaupt $(1-w)\varepsilon + v$ zahn; so ist sein erwartetes moralisches Vermögen, wenn assecurirt,

$$= k\log n\{1+\varepsilon-(1-w)\varepsilon-v\} + \log nh$$
$$= k\log n(1-v+\varepsilon w) + \log nh .$$

In dem Falle, wo der Kaufmann weder Vortheil noch

us der Aſſecuranz zöge, müßte, wie ſogleich

$$+\varepsilon) + \log n\,h = k\log n(1-v+\varepsilon w) + \log n\,h,$$
$$w\log n(1+\varepsilon) = \log n(1-v+\varepsilon w),$$
$$1 - v + \varepsilon w = (1+\varepsilon)^w,$$
$$v = 1 + \varepsilon w - (1+\varepsilon)^w$$

vas der Kaufmann alſo höchſtens an die Aſſe-
ellſchaft zahlen könnte, wäre

$$= (1-w)\varepsilon + 1 + \varepsilon w - (1+\varepsilon)^w$$
$$= 1 + \varepsilon - (1+\varepsilon)^w$$
$$= (1+\varepsilon)\{1 - (1+\varepsilon)^{w-1}\}.$$

hr zahlen, ſo zieht er moraliſchen Nachtheil,
niger zahlen, moraliſchen Vortheil aus der

B. $\varepsilon = 10000$, $w = \frac{19}{20}$, und das Vermö-
ufmanns $= a$; ſo iſt das, was er höchſtens
lſchaft zahlen kann,

$$= \left\{1 + \frac{\varepsilon}{a} - \left(1 + \frac{\varepsilon}{a}\right)^w\right\} . a$$
$$= a + \varepsilon - (a+\varepsilon)^w . a^{1-w}$$
$$= a + 10000 - (a + 10000)^{\frac{19}{20}} . a^{\frac{1}{20}}$$

so hat sie, wenn das Schiff nicht verunglückt, wofür die Wahrscheinlichkeit $\frac{19}{20}$ ist, das Vermögen $x + 800$; verunglückt aber das Schiff, wofür die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{20}$ ist, so ist ihr Vermögen $x + 800 - 10000 = x - 9200$. Also ist, wenn die Assecuranz zu Stande kommt, das erwartete moralische Vermögen der Gesellschaft

$$(x + 800)^{\frac{19}{20}} . (x - 9200)^{\frac{1}{20}} .$$

Kommt die Assecuranz nicht zu Stande, so ist das Vermögen $= x$. Setzt man beides gleich; so erhält man die Gleichung

$$(x + 800)^{19} . (x - 9200) = x^{20} ,$$

woraus Bernoulli x nahe $= 14243$ findet. Dieses Vermögen muß die Gesellschaft mindestens haben, wenn sie die obige Assecuranz mit 800 Thlr. eingehen soll. Hat sie weniger, so ist es Unrecht, sich in diese Speculation einzulassen.

25. Kehren wir nun wieder zu dem Petersburger Problem zurück. Sey a das Vermögen von B, und x das, was er am Anfange des Spiels setzt, so besitzt er, wenn Münz beim ersten Wurf fällt, $a - x + 2$; wenn es beim zweiten fällt, $a - x + 2^2$; wenn es beim dritten fällt, $a - x + 2^3$; und endlich, wenn es beim $n$ten fällt, $a - x + 2^n$. Fällt aber Münz in keinem der n Würfe, wofür die Wahrscheinlichkeit $= \frac{1}{2^n}$ ist (9.), so besitzt B nur $a - x$. Das erwartete moralische Vermögen des B ist also nach dem Vorhergehenden, da $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{2^3}$, ... $\frac{1}{2^n}$, $\frac{1}{2^n}$ die einzelnen Wahrscheinlichkeiten sind,

$$= \tfrac{1}{2} k \log n (a - x + 2) + \tfrac{1}{2^2} k \log n (a - x + 2^2) + \tfrac{1}{2^3} k \log n (a - x + 2^3) + \ldots$$

$$\ldots + \tfrac{1}{2^n} k \log n (a - x + 2^n) + \tfrac{1}{2^n} k \log n (a - x) + \log n h .$$

Das moralische Vermögen vor dem Spiel ist

$$= k \log n a + \log n h .$$

Sollen sich nun die Umstände des Spielers nicht ändern, so muß Beides einander gleich gesetzt werden, woraus man leicht die Gleichung

$$(a-x+2^2)^{\frac{1}{2^2}} \ldots (a-x+2^n)^{\frac{1}{2^n}} \cdot (a-x)^{\frac{1}{2^n}} = a$$

ßt man mit Laplace $a-x=a'$, $\frac{1}{a'}=\alpha$;

$$2)^{\frac{1}{2}} \cdot (a'+2^2)^{\frac{1}{2^2}} \ldots (a'+2^n)^{\frac{1}{2^n}} \cdot a'^{\frac{1}{2^n}} = a,$$

$$\left(1+\frac{2^2}{a'}\right)^{\frac{1}{2^2}} \ldots \left(1+\frac{2^n}{a'}\right)^{\frac{1}{2^n}} \cdot a'^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}} = a.$$

$$\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1}+\frac{1}{2^n} = 1,$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{a'+x}{a'} = 1+\frac{x}{a'} = 1+\alpha x.$$

$$2 \cdot \alpha)^{\frac{1}{2}} \cdot (1+2^2 \cdot \alpha)^{\frac{1}{2^2}} \ldots (1+2^n \cdot \alpha)^{\frac{1}{2^n}} = 1+\alpha x.$$

n auf der linken Seite nehmen immer ab, und

also Jemand, der nur 107,89 am Anfange des Spiels im Vermögen hat, bloß 7,89 setzen darf. Für $a' = 200$, $\alpha = 0{,}005$ findet Laplace $a = 208{,}78$, $x = 8{,}78$, so daß also B, wenn er am Anfange des Spiels nur 208,78 im Vermögen hat, bloß 8,78 wagen darf.

Dies mag an diesem Orte genug seyn über die Lehre von der moralischen Hoffnung. In der Folge werden wir immer bloß die mathematische Hoffnung berücksichtigen, bei den Beispielen, die wir aus der Berechnung der Wahrscheinlichkeit bei einigen Spielen hernehmen werden. Vorzüglich s. m. über die moralische Hoffnung Laplace's öfters angeführtes Werk a. a. O.

26. Eine Wette kann im Allgemeinen angesehen werden als ein Vertrag zweier Partheien, deren eine das Geschehen einer, die andere das Geschehen einer andern bestimmt möglichen Begebenheit behauptet, und darauf eine gewisse Geldsumme, oder etwas derselben Aequivalentes, die Mise, verpfändet, so daß diejenige Parthei, deren Behauptung zutrifft, die von der andern ausgesetzte Geldsumme erhält. In den meisten Fällen behauptet jedoch die eine Parthei das Geschehen, die andere das Nichtgeschehen ein und derselben Begebenheit, welches wir eine Wette im engern Sinne nennen wollen.

Soll eine Wette rechtmäßig und auf vernünftige Art angestellt seyn, so müssen sich die Misen wie die Wahrscheinlichkeiten derjenigen Ereignisse verhalten, auf welche sie verpfändet werden. Bezeichnen wir also die Misen durch m und m', die Wahrscheinlichkeiten der entsprechenden Ereignisse durch w und w', so muß seyn $m : m' = w : w'$ oder $mw' = m'w$. Da nun die erste Parthei die Wahrscheinlichkeit w, die Mise m', die zweite Parthei dagegen die Wahrscheinlichkeit w' hat, die Mise m zu gewinnen; so kann man auch sagen, daß bei einer rechtmäßigen Wette die mathematischen Hoffnungen der beiden Wettenden einander gleich seyn müssen (14.).

Bei einer Wette im engern Sinne ist immer $w' = 1 - w$, und folglich $m(1-w) = m'w$, also

$$m' = \frac{m(1-w)}{w} = m\left(\frac{1}{w} - 1\right),$$

Miſe der zweiten Parthei gefunden wird,
erſten feſtgeſetzt worden iſt. Bei einer Wett
Sinne iſt überhaupt $m' = m \cdot \frac{w'}{w}$. Iſt bei einer
igern Sinne die Anzahl der der erſten Parthei
älle $= \mu$, die Anzahl der der zweiten günſti-
ſo iſt $w = \frac{\mu}{\mu+\nu}$, $w' = \frac{\nu}{\mu+\nu}$, und folglich

$$m : m' = w : w' = \mu : \nu,$$

iſen müſſen ſich wie die Mengen der den ent
Ereigniſſen günſtigen Fälle verhalten.

)ch haben wir den Sinn einer Regel beim Spiel
, welche man die Theilungsregel nennt.
wird an folgendem Beiſpiele ſich völlig deutlich
n.

Spieler legen einen Einſatz unter der Bedingung
daß derſelbe dem gehören ſolle, welcher zuerſt
len gewonnen haben wird. Die Wahrſchein
s jeden Spielers, eine Parthie zu gewinnen,
Nachdem der erſte zwei, der andere eine Par

entscheiden. Die Wahrscheinlichkeit des A, die vierte Parthie nicht zu gewinnen, ist $= \frac{1}{2}$, und eben so die Wahrscheinlichkeit, die fünfte zu gewinnen, $= \frac{1}{2}$; also die Wahrscheinlichkeit, die vierte nicht, aber die fünfte, folglich das Spiel, zu gewinnen, $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ (10.). Folglich die ganze Wahrscheinlichkeit des A, das Spiel zu gewinnen, indem er dasselbe gewinnt, sowohl, wenn der erste, als auch, wenn der zweite Fall eintritt, $= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ (8.). Die Wahrscheinlichkeit des B, das Spiel zu gewinnen, ist die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit von der vorhergehenden; folglich $= 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$. War also der Einsatz $=$ 64 Thlr., so erhält A davon $\frac{3}{4}$, d. i. 48 Thlr., B aber nur $\frac{1}{4}$, d. i. 16 Thlr. Eben so verfährt man, wenn mehr als zwei Spieler sind. Die Aufgabe reducirt sich dann auf eine bloße Gesellschaftsrechnung.

28. Um noch ein Beispiel zu dieser Regel zu haben, so setze man, A und B wetten mit einander, daß ersterer mit einem gewöhnlichen Würfel zwei Mal hinter einander ein und dieselbe bestimmte Zahl werfen oder nicht werfen werde; so fragt sich, wenn schon nach dem ersten Wurfe das Spiel geendigt wird, wie viel jedem von der stehenden Summe gebühre. Die Wahrscheinlichkeit, mit einem gewöhnlichen Würfel ein und dieselbe bestimmte Zahl zwei Mal hinter einander zu werfen, ist $= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ (10.). Dies ist die Wahrscheinlichkeit des A, das Spiel zu gewinnen, und die des B folglich $= \frac{35}{36}$. Ist also m die Mise des A, so ist, wenn die Wette rechtmäßig seyn soll, 35m die Mise des B (26.), und die ganze stehende Summe ist folglich $=$ 36m. Wird nun das Spiel beim ersten Wurfe getrennt, so sind in Bezug auf den ersten Spieler folgende Fälle möglich. Hat er im ersten Wurfe die bestimmte Zahl nicht getroffen, so hat er offenbar das Spiel verloren, und B erhält 36m. Hat aber A im ersten Wurfe die bestimmte Zahl getroffen; so ist seine Wahrscheinlichkeit, daß dies auch im zweiten Wurfe geschehen werde, $= \frac{1}{6}$, und dies ist seine Wahrscheinlichkeit, das Spiel zu gewinnen, bevor noch der zweite Wurf geschieht. Die Wahrscheinlichkeit

wenn der erſte Wurf Münz iſt, vier Duca-
rſt der zweite Wurf Münz iſt, acht Ducaten,
dritte Wurf Münz iſt, und ſo fort bis zum
. Wie groß iſt die Erwartung von B, und
o B am Anfange des Spiels ſetzen?
t man die Wahrſcheinlichkeiten nach der Regel
ngeſetzten Wahrſcheinlichkeit in (10.), und
ng des B nach (15.); ſo erhält man ſehr leicht
olgenden Ausdruck:

$$+ \tfrac{1}{4}\cdot 4 + \tfrac{1}{8}\cdot 8 + \tfrac{1}{16}\cdot 16 + \ldots + \frac{1}{2^n}\cdot 2^n$$

Die Wahrſcheinlichkeit, daß in keinem der
ünz fällt, iſt $= \frac{1}{2^n}$, und es ſcheint alſo, daß
eigentlich noch um ein Glied zu vermehren ſey.
n B auch Nichts erhält; ſo iſt das noch beizu-
ed $= \frac{1}{2^n}\cdot 0 = 0$. Wir erwähnen dies, wenn
chon von ſelbſt verſteht, wegen des Folgenden.
Anzahl der einzelnen Spiele ſehr groß oder gar
ſo könnte B auch eine ſehr große oder eine un-
nme wagen. Wird dies aber wohl ein auch

19. Der Werth einer Summe Geldes kann in der Mathematik bloß nach ihrer absoluten Größe beurtheilt werden, ohne Rücksicht auf das besondere Interesse der Person, welche jene Summe besitzt, oder nicht besitzt. Daß aber z. B. ein Thaler für Jemanden, dessen Vermögen sich auf hundert Thaler beläuft, einen weit größern Werth haben muß, als für einen Millionair, wird von Niemand bezweifelt. Dies hat darauf geführt, zwischen dem physischen und moralischen Werthe einer Summe Geldes zu unterscheiden, indem man unter jenem den absoluten Werth derselben ohne Rücksicht auf das besondere Interesse der Person, welche diese Summe besitzt oder nicht besitzt, unter diesem aber ihren Werth in Bezug auf ihren absoluten Werth und zugleich mit Rücksicht auf das besondere Interesse der Person, welche diese Summe besitzt oder nicht besitzt, versteht. Sogleich bietet sich aber hier die Frage dar, wie man den von tausenderlei Dingen abhängenden moralischen Werth einer Summe Geldes beurtheilen könne, und es fällt leicht in die Augen, daß, allgemeine Regeln hierzu zu geben, unmöglich ist, da die Interessen der einzelnen Personen so unendlich verschieden sind. Indeß hat folgende Hypothese Daniel Bernoulli's den meisten Beifall gefunden, und scheint sich in der That auch der Erfahrung am besten anzuschließen:

„Der moralische oder relative Werth einer unendlich „kleinen Summe steht in geradem Verhältnisse ihres abso„luten Werthes, und in umgekehrtem Verhältnisse des „ganzen Vermögens der dabei interessirten Person."

Bernoulli bemerkt zugleich, daß jeder Mensch, auch der ärmste, nach den gemeinen Begriffen, ein gewisses Vermögen besitze, welches bei den meisten allerdings in ihrem Fleiße bestehe. Wer durch Betteln sein Leben fristet, und dadurch jährlich 10 Ducaten erwirbt, sagt Bernoulli, wird nicht 50 Ducaten annehmen, unter der Bedingung, auf jene Art, und auf jede andere, sein Leben zu fristen, Verzicht zu leisten. Also jeder Mensch hat ein gewisses Vermögen; nur der so eben vor Hunger Sterbende hat absolut nichts.

$\cdot w''' + \ldots = 1,\ w + w' + w'' + w''' + \ldots - 1 = \varepsilon,$

$- s = \alpha w + \alpha' w' + \alpha'' w'' + \alpha''' w''' + \ldots$
$+ \ldots\ldots\ldots$

enden Glieder $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ in höhern Di-
ls die erſten enthalten. Die moraliſche Hoff-
ſich alſo der mathematiſchen deſto mehr, je
$', \alpha'', \ldots$ ſind, und beide ſind einander gleich
enn dieſe Größen als unendlich klein angenom-
.

rnoulli bringt noch verſchiedene Anwendun-
Sätze bei, und Laplace betrachtet dieſelben
einern Geſichtspunkten. Hier begnügen wir
hſtehenden Bemerkungen.

n obigen Formeln erhellet z. B., daß jedes
gleiche Spiel doch immer im Allgemeinen mit
rknüpft iſt. Das phyſiſche Vermögen eines
ei Spielern ſey 100 Ducaten, jeder ſetze 50

Falle das physische Vermögen keine Veränderung er-
, die moralische Hoffnung

$$= (a+\varepsilon)^w . a^{1-w} - a .$$

erwartete moralische Vermögen selbst ist

$$= kw \log n (a+\varepsilon) + k(1-w)\log na + \log nh .$$

t man, ohne der Allgemeinheit zu schaden, das phys-
Vermögen $a = 1$; so wird die moralische Hoffnung

$$= (1+\varepsilon)^w - 1 ,$$

das erwartete moralische Vermögen

$$= kw \log n (1+\varepsilon) + \log nh .$$

lssecurirt der Kaufmann das Schiff; so kann er, da
Wahrscheinlichkeit, daß das Schiff untergehen wird,
— w ist, an die Assecuranz-Gesellschaft nur $(1-w)\varepsilon$
len. Assecurirt er nicht, so ist das erwartete mora-
Vermögen, wie wir schon gesehen haben,

$$= kw \log n (1+\varepsilon) + \log nh ;$$

urirt er aber, so ist das erwartete moralische Ver-
n

$$= k \log n \{1+\varepsilon-(1-w)\varepsilon\} + \log nh$$
$$= k \log n (1+\varepsilon w) + \log nh .$$

nun w ein echter Bruch ist, so ist

$$\frac{w\partial\varepsilon}{1+\varepsilon w} > \frac{w\partial\varepsilon}{1+\varepsilon} ,$$

$$\int \frac{w\partial\varepsilon}{1+\varepsilon w} > \int \frac{w\partial\varepsilon}{1+\varepsilon} ,$$

d. i. $\log n (1+\varepsilon w) > w \log n (1+\varepsilon)$.

lich ist das erwartete moralische Vermögen des Kauf-
ns in dem Falle, wo er assecurirt, größer als in dem
, wo er nicht assecurirt, vorausgesetzt, daß er nicht
als $(1-w)\varepsilon$ an die Assecuranz-Gesellschaft be-
. Er wird also in einem solchen Falle mit Vortheil
ich assecuriren.

Soll der Kaufmann überhaupt $(1-w)\varepsilon + v$ zah-
so ist sein erwartetes moralisches Vermögen, wenn
securirt,

$$= k \log n \{1+\varepsilon-(1-w)\varepsilon-v\} + \log nh$$
$$= k \log n (1-v+\varepsilon w) + \log nh .$$

dem Falle, wo der Kaufmann weder Vortheil noch

aus der Aſſecuranz zöge, müßte, wie ſogleich

$$1+\varepsilon) + \log n\, h = k \log n\,(1 - v + \varepsilon w) + \log n\, h,$$
$$w \log n\,(1+\varepsilon) = \log n\,(1 - v + \varepsilon w),$$
$$1 - v + \varepsilon w = (1+\varepsilon)^w,$$
$$v = 1 + \varepsilon w - (1+\varepsilon)^w$$

was der Kaufmann alſo höchſtens an die Aſſe-ſellſchaft zahlen könnte, wäre

$$= (1-w)\varepsilon + 1 + \varepsilon w - (1+\varepsilon)^w$$
$$= 1 + \varepsilon - (1+\varepsilon)^w$$
$$= (1+\varepsilon)\{1 - (1+\varepsilon)^{w-1}\}.$$

ehr zahlen, ſo zieht er moraliſchen Nachthei-niger zahlen, moraliſchen Vortheil aus der

B. $\varepsilon = 10000$, $w = \frac{19}{20}$, und das Vermö-ufmanns $= a$; ſo iſt das, was er höchſtens llſchaft zahlen kann,

$$= \left\{1 + \frac{\varepsilon}{a} - \left(1 + \frac{\varepsilon}{a}\right)^w\right\} . a$$
$$= a + \varepsilon - (a+\varepsilon)^w . a^{1-w}$$

so hat sie, wenn das Schiff nicht verunglückt, wofür die Wahrscheinlichkeit $\frac{19}{20}$ ist, das Vermögen $x + 800$; verunglückt aber das Schiff, wofür die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{20}$ ist, so ist ihr Vermögen $x + 800 - 10000 = x - 9200$. Also ist, wenn die Assecuranz zu Stande kommt, das erwartete moralische Vermögen der Gesellschaft

$$(x + 800)^{\frac{19}{20}} . (x - 9200)^{\frac{1}{20}} .$$

Kommt die Assecuranz nicht zu Stande, so ist das Vermögen $= x$. Setzt man beides gleich; so erhält man die Gleichung

$$(x + 800)^{19} . (x - 9200) = x^{20} ,$$

woraus Bernoulli x nahe $= 14243$ findet. Dieses Vermögen muß die Gesellschaft mindestens haben, wenn sie die obige Assecuranz mit 800 Thlr. eingehen soll. Hat sie weniger, so ist es Unrecht, sich in diese Speculation einzulassen.

25. Kehren wir nun wieder zu dem Petersburger Problem zurück. Sey a das Vermögen von B, und x das, was er am Anfange des Spiels setzt, so besitzt er, wenn Münz beim ersten Wurf fällt, $a - x + 2$; wenn es beim zweiten fällt, $a - x + 2^2$; wenn es beim dritten fällt, $a - x + 2^3$; und endlich, wenn es beim $n$ten fällt, $a - x + 2^n$. Fällt aber Münz in keinem der n Würfe, wofür die Wahrscheinlichkeit $= \frac{1}{2^n}$ ist (9.), so besitzt B nur $a - x$. Das erwartete moralische Vermögen des B ist also nach dem Vorhergehenden, da $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{2^3}$, ... $\frac{1}{2^n}$, $\frac{1}{2^n}$ die einzelnen Wahrscheinlichkeiten sind,

$$= \tfrac{1}{2} k \log n (a - x + 2) + \tfrac{1}{2^2} k \log n (a - x + 2^2) + \tfrac{1}{2^3} k \log n (a - x + 2^3) + \ldots$$

$$\ldots + \tfrac{1}{2^n} k \log n (a - x + 2^n) + \tfrac{1}{2^n} k \log n (a - x) + \log n h .$$

Das moralische Vermögen vor dem Spiel ist

$$= k \log n a + \log n h .$$

Sollen sich nun die Umstände des Spielers nicht ändern, so muß Beides einander gleich gesetzt werden, woraus man leicht die Gleichung

$$a-x+2^1)^{\frac{1}{2^1}} \ldots (a-x+2^n)^{\frac{1}{2^n}} \cdot (a-x)^{\frac{1}{2^n}} = a$$

ßt man mit Laplace $a-x=a'$, $\frac{1}{a'}=\alpha$;

$$2)^{\frac{1}{2}} \cdot (a'+2^1)^{\frac{1}{2^1}} \ldots (a'+2^n)^{\frac{1}{2^n}} \cdot a^{\frac{1}{2^n}} = a,$$

$$1+\frac{2^1}{a'})^{\frac{1}{2^1}} \ldots \left(1+\frac{2^n}{a'}\right)^{\frac{1}{2^n}} \cdot a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^1}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}} = 1.$$

$$\frac{1}{2^1}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1}+\frac{1}{2^n} = 1,$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{a'+x}{a'} = 1+\frac{x}{a'} = 1+\alpha x.$$

$$1+\alpha)^{\frac{1}{2}} \cdot (1+2^1\cdot\alpha)^{\frac{1}{2^1}} \ldots (1+2^n\cdot\alpha)^{\frac{1}{2^n}} = 1+\alpha x.$$

n auf der linken Seite nehmen immer ab, und

also Jemand, der nur 107,89 am Anfange des Spiels im Vermögen hat, bloß 7,89 setzen darf. Für $a' = 200$, $\alpha = 0{,}005$ findet Laplace $a = 208{,}78$, $x = 8{,}78$, so daß also B, wenn er am Anfange des Spiels nur 208,78 im Vermögen hat, bloß 8,78 wagen darf.

Dies mag an diesem Orte genug seyn über die Lehre von der moralischen Hoffnung. In der Folge werden wir immer bloß die mathematische Hoffnung berücksichtigen, bei den Beispielen, die wir aus der Berechnung der Wahrscheinlichkeit bei einigen Spielen hernehmen werden. Vorzüglich s. m. über die moralische Hoffnung Laplace's öfters angeführtes Werk a. a. O.

26. Eine Wette kann im Allgemeinen angesehen werden als ein Vertrag zweier Partheien, deren eine das Geschehen einer, die andere das Geschehen einer andern bestimmt möglichen Begebenheit behauptet, und darauf eine gewisse Geldsumme, oder etwas derselben Aequivalentes, die Mise, verpfändet, so daß diejenige Parthei, deren Behauptung zutrifft, die von der andern ausgesetzte Geldsumme erhält. In den meisten Fällen behauptet jedoch die eine Parthei das Geschehen, die andere das Nichtgeschehen ein und derselben Begebenheit, welches wir eine Wette im engern Sinne nennen wollen.

Soll eine Wette rechtmäßig und auf vernünftige Art angestellt seyn, so müssen sich die Misen wie die Wahrscheinlichkeiten derjenigen Ereignisse verhalten, auf welche sie verpfändet werden. Bezeichnen wir also die Misen durch m und m', die Wahrscheinlichkeiten der entsprechenden Ereignisse durch w und w', so muß seyn $m : m' = w : w'$ oder $mw' = m'w$. Da nun die erste Parthei die Wahrscheinlichkeit w, die Mise m', die zweite Parthei dagegen die Wahrscheinlichkeit w' hat, die Mise m zu gewinnen; so kann man auch sagen, daß bei einer rechtmäßigen Wette die mathematischen Hoffnungen der beiden Wettenden einander gleich seyn müssen (14.).

Bei einer Wette im engern Sinne ist immer $w' = 1 - w$, und folglich $m(1-w) = m'w$, also

$$m' = \frac{m(1-w)}{w} = m\left(\frac{1}{w} - 1\right),$$

e Miſe der zweiten Parthei gefunden wird, r erſten feſtgeſetzt worden iſt. Bei einer Wett Sinne iſt überhaupt $m' = m \cdot \frac{w'}{w}$. Iſt bei einer ngern Sinne die Anzahl der der erſten Parthei älle $= \mu$, die Anzahl der der zweiten günſti- ſo iſt $w = \frac{\mu}{\mu+\nu}$, $w' = \frac{\nu}{\mu+\nu}$, und folglich

$$m : m' = w : w' = \mu : \nu,$$

iſen müſſen ſich wie die Mengen der den ent- Ereigniſſen günſtigen Fälle verhalten.

och haben wir den Sinn einer Regel beim Spiel t, welche man die Theilungsregel nennt. wird an folgendem Beiſpiele ſich völlig deutlich en.

Spieler legen einen Einſatz unter der Bedingung daß derſelbe dem gehören ſolle, welcher zuerſt ien gewonnen haben wird. Die Wahrſchein- s jeden Spielers, eine Parthie zu gewinnen,

entscheiden. Die Wahrscheinlichkeit des A, die vierte Parthie nicht zu gewinnen, ist $= \frac{1}{2}$, und eben so die Wahrscheinlichkeit, die fünfte zu gewinnen, $= \frac{1}{2}$; also die Wahrscheinlichkeit, die vierte nicht, aber die fünfte, folglich das Spiel, zu gewinnen, $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ (10.). Folglich die ganze Wahrscheinlichkeit des A, das Spiel zu gewinnen, indem er dasselbe gewinnt, sowohl, wenn der erste, als auch, wenn der zweite Fall eintritt, $= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ (8.). Die Wahrscheinlichkeit des B, das Spiel zu gewinnen, ist die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit von der vorhergehenden; folglich $= 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$. War also der Einsatz $=$ 64 Thlr., so erhält A davon $\frac{3}{4}$, d. i. 48 Thlr., B aber nur $\frac{1}{4}$, d. i. 16 Thlr. Eben so verfährt man, wenn mehr als zwei Spieler sind. Die Aufgabe reducirt sich dann auf eine bloße Gesellschaftsrechnung.

28. Um noch ein Beispiel zu dieser Regel zu haben, so setze man, A und B wetten mit einander, daß ersterer mit einem gewöhnlichen Würfel zwei Mal hinter einander ein und dieselbe bestimmte Zahl werfen oder nicht werfen werde; so fragt sich, wenn schon nach dem ersten Wurfe das Spiel geendigt wird, wie viel jedem von der stehenden Summe gebühre. Die Wahrscheinlichkeit, mit einem gewöhnlichen Würfel ein und dieselbe bestimmte Zahl zwei Mal hinter einander zu werfen, ist $= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ (10.). Dies ist die Wahrscheinlichkeit des A, das Spiel zu gewinnen, und die des B folglich $= \frac{35}{36}$. Ist also m die Mise des A, so ist, wenn die Wette rechtmäßig seyn soll, 35m die Mise des B (26.), und die ganze stehende Summe ist folglich $=$ 36m. Wird nun das Spiel beim ersten Wurfe getrennt, so sind in Bezug auf den ersten Spieler folgende Fälle möglich. Hat er im ersten Wurfe die bestimmte Zahl nicht getroffen, so hat er offenbar das Spiel verloren, und B erhält 36m. Hat aber A im ersten Wurfe die bestimmte Zahl getroffen; so ist seine Wahrscheinlichkeit, daß dies auch im zweiten Wurfe geschehen werde, $= \frac{1}{6}$, und dies ist seine Wahrscheinlichkeit, das Spiel zu gewinnen, bevor noch der zweite Wurf geschieht. Die Wahrscheinlichkeit

nſelben Zeitpunkte, das Spiel zu gewinnen,
$= \frac{5}{6}$. Alſo muß nach der Theilungsregel bei
g des Spiels A von der ſtehenden Summe $\frac{1}{6}$
6m, und der zweite Spieler $\frac{5}{6}$, d. i. 5.6m
ſalten.

ıng der vorhergehenden Sätze : Auflöſung einiger ſchwereren Aufgaben.

ir beginnen mit einigen allgemeinen Betrach-
das Würfelſpiel, wobei wir aber den Aus-
l in einem allgemeinern Sinne, als gewöhnlich
ehmen werden, indem wir unter einem Würfel
en ein gerades qſeitiges Prisma mit regulären
als Grundflächen, welche, damit alle Würfe
ch ſeyen, nicht mit zu den Seiten des Würfels
erden, verſtehen wollen. Man hat ſich nämlich
Körper zu denken, mit welchem q Würfe in

$$(\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a}, \overset{4}{a}, \ldots\ldots \overset{q}{a}),$$

wo nämlich die Coefficienten der Potenzen von x in der zweiten Reihe die Variationsklassen zur Summe n, n + 1, n + 2, n + 3, ... für obigen Zeiger bezeichnen (s. Variationen gegebener Dinge.). Setzt man

$$\overset{1}{a} = \overset{2}{a} = \overset{3}{a} = \overset{4}{a} = \ldots = \overset{q}{a} = 1;$$

so wird jede einzelne Complexion in diesen Coefficienten (als Product betrachtet) = 1, und die Coefficienten selbst (als Summen der einzelnen Complexionen betrachtet) bestimmen die Anzahl der Variationen in den gegebenen Klassen. Setzen wir nun $p = n + \alpha$, da offenbar p nur $\geqq n$ seyn kann; so wird

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots + x^{q-1})^n$$
$$= {}^nN + {}^{n+1}Nx + {}^{n+2}Nx^2 + \ldots\ldots + {}^pNx^\alpha + {}^{p+1}Nx^{\alpha+1} + \ldots$$

für den aus q Gliedern bestehenden Zeiger

$$(1, 1, 1, 1, \ldots\ldots),$$

und die gesuchte Größe ist folglich nach dem Obigen = ${}^pN$ für den vorhergehenden Zeiger, d. h. = dem Coefficienten von x^α in der Entwickelung von

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots + x^{q-1})^n.$$

Zu der Bestimmung dieses Coefficienten gelangt man aber am leichtesten auf folgende Art. Es ist

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots + x^{q-1} = \frac{1 - x^q}{1 - x},$$

und folglich, wenn wir in diesem Artikel der Kürze oder vielmehr der Leichtigkeit des Drucks wegen überhaupt Eulers Bezeichnung der Binomialcoefficienten gebrauchen, wonach der nte Binomialcoefficient der mten Potenz durch $\left[\frac{m}{n}\right]$ bezeichnet wird, nach dem binomischen Lehrsatze:

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots x^{q-1})^n$$
$$= \left\{1 - \left[\frac{n}{1}\right]x^q + \left[\frac{n}{2}\right]x^{2q} - \left[\frac{n}{3}\right]x^{3q} + \left[\frac{n}{4}\right]x^{4q} - \ldots\right\}$$
$$\times \left\{1 - \left[\frac{-n}{1}\right]x + \left[\frac{-n}{2}\right]x^2 - \left[\frac{-n}{3}\right]x^3 + \left[\frac{-n}{4}\right]x^4 - \ldots\right\}$$

$$\left[\frac{n}{1}\right]x^q+\left[\frac{n}{2}\right]x^{2q}-\left[\frac{n}{3}\right]x^{3q}+\left[\frac{n}{4}\right]x^{4q}-$$

$$\left[\frac{n}{1}\right]x+\left[\frac{n+1}{2}\right]x^2+\left[\frac{n+2}{3}\right]x^3+\left[\frac{n+3}{4}\right]x$$

n Coefficienten von x^α in der Entwickel
ts zu finden, hebe man aus der zweiten
r aus, welche die Potenzen

$$x^\alpha,\ x^{\alpha-q},\ x^{\alpha-2q},\ x^{\alpha-3q},\ x^{\alpha-4q},\ \ldots.$$

ſchreibe ſie nach der Ordnung unter die
Reihe, und multiplicire die über einan
ieder in einander. Dadurch erhält man
nde Glied:

$$\left[\frac{+\alpha-1}{\alpha}\right]x^\alpha-\left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{n+\alpha-q-1}{\alpha-q}\right]x^\alpha$$
$$+\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+\alpha-2q-1}{\alpha-2q}\right]x^\alpha$$
$$-\left[\frac{n}{3}\right]\left[\frac{n+\alpha-3q-1}{\alpha-3q}\right]x^\alpha$$
$$+\ \ldots\ldots\ldots$$

nein, da $n+\alpha=p$ iſt:

Um zu bestimmen, wann diese Reihe abbricht, überge man, daß, wie aus dem Obigen unmittelbar folgt, $-\mu q$ nie negativ werden darf. Würde aber

$$n + \alpha - \mu q - 1 = n - 1 + (\alpha - \mu q)$$

egativ, so müßte, da n offenbar nicht < 1 seyn kann, fenbar auch $\alpha - \mu q$ negativ werden, also darf

$$n + \alpha - \mu q - 1 = p - \mu q - 1$$

e negativ werden, und die Reihe bricht also ab, wenn es eintritt.

30. Die Anzahl Würfe, welche sich überhaupt mit n Würfeln, deren jeder q Seiten hat, machen läßt, ist fenbar $=$ der Anzahl der Variationen mit Wiederholun n der nten Klasse für q Elemente, d. i. $= q^n$ (Variationen gegebener Dinge. 3.); folglich die Wahrheinlichkeit mit n solchen Würfeln p Augen zu werfen,

$$= \frac{1}{q^n}\left\{\left[\frac{p-1}{n-1}\right] - \left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{p-q-1}{n-1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{p-2q-1}{n-1}\right] - \left[\frac{n}{3}\right]\left[\frac{p-3q-1}{n-1}\right] + \ldots\ldots\right\}$$

er, für

$$p-1=p',\ p-q-1=p'',\ p-2q-1=p''',\ \ldots\ldots:$$

$$= \frac{1}{q^n}\left\{\frac{p'(p'-1)\ldots(p'-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)} - \frac{p''(p''-1)\ldots(p''-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)}\cdot\frac{n}{1} + \frac{p'''(p'''-1)\ldots(p'''-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)}\cdot\frac{n(n-1)}{1.2} - \frac{p''''(p''''-1)\ldots(p''''-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \ldots\ldots\ldots\right\}$$

Die hier entwickelten Formeln hat Moivre in den Miscellan. analyt. p. 196. und in seiner Doctrine of hances auf ähnliche Weise gefunden.

Sucht man z. B. die Wahrscheinlichkeit, mit 4 gewöhnchen Würfeln 16 zu werfen; so ist $n = 4$, $q = 6$,

$= 15$, $p'' = 9$, $p''' = 3$. Alſo die g
ſcheinlichkeit

$$\frac{.14.13}{1.2.3} - \frac{9.8.7}{1.2.3} \cdot \frac{4}{1} + \frac{3.2.1}{1.2.3} \cdot \frac{4.3}{1.2}$$

: 1296 dividirt, d. i. $= \frac{125}{1296} = 0{,}096\ldots$,
$: \frac{1}{10}$.

nan nach der gefundenen Formel die Mengen
n Arten, mit drei ſechsſeitigen Würfeln die Zah
, 6, 7, 8, 9, 10 zu werfen, und addirt die
Zahlen, ſo findet man 108. Alſo iſt die Wahr
, mit drei ſechsſeitigen Würfeln eine der obi
u werfen, $= \frac{108}{6^3} = \frac{108}{216}$ (8.) $= \frac{1}{2}$. Die
ßte Wahrſcheinlichkeit, d. h. mehr als 10 zu
$= 1 - \frac{1}{2}$, d. i. auch $= \frac{1}{2}$. Es iſt alſo
rſcheinlichkeit vorhanden, mit drei Würfeln
11, und mehr als 10, zu werfen. Dieſe
Lacroix (Lehrbuch der Wahrſcheinlichkeits-
A. d. Franz. v. Unger. Erfurt. 1818. S.
ie Grundlage des unter dem Namen Kno
se dix) bekannten Spiels.

$$x^n(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots x^{q-1})^{n+1}$$

$$\begin{aligned}
&= (0) \\
&+ |(1) + (0)|x \\
&+ |(2) + (1) + (0)|x^2 \\
&+ |(3) + (2) + (1) + (0)|x^3 \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ |(q-1) + (q-2) + (q-3) + (q-4) + \ldots + (0)|x^{q-1} \\
&+ |(q) + (q-1) + (q-2) + (q-3) + \ldots + (1)|x^q \\
&+ |(q+1) + (q) + (q-1) + (q-2) + \ldots + (2)|x^{q+1} \\
&+ |(q+2) + (q+1) + (q) + (q-1) + \ldots + (3)|x^{q+2} \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

so

$$x^{n+1}(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{q-1})^{n+1}$$

$$= (0)' + (1)'.x + (2)'.x^2 + (3)'.x^3 + \ldots$$

$$\ldots + (q-1)'.x^{q-1} + (q)'.x^q + (q+1)'.x^{q+1} + \ldots$$

$$\begin{aligned}
&= (0).x \\
&+ |(1) + (0)|x^2 \\
&+ |(2) + (1) + (0)|x^3 \\
&+ |(3) + (2) + (1) + (0)|x^4 \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ |(q-1) + (q-2) + (q-3) + (q-4) + \ldots + (0)|x^q \\
&+ |(q) + (q-1) + (q-2) + (q-3) + \ldots + (1)|x^{q+1} \\
&+ |(q+1) + (q) + (q-1) + (q-2) + \ldots + (2)|x^{q+2} \\
&+ |(q+2) + (q+1) + (q) + (q-1) + \ldots + (3)|x^{q+3} \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(0)' &= 0 \\
(1)' &= (0) \\
(2)' &= (0) + (1) \\
(3)' &= (0) + (1) + (2) \\
(4)' &= (0) + (1) + (2) + (3) \\
&\quad \ldots\ldots\ldots \\
(q)' &= (0) + (1) + (2) + (3) + \ldots + (q-1) \\
(q+1)' &= (1) + (2) + (3) + (4) + \ldots + (q) \\
(q+2)' &= (2) + (3) + (4) + (5) + \ldots + (q+1) \\
(q+3)' &= (3) + (4) + (5) + (6) + \ldots + (q+2)
\end{aligned}$$

$$\text{ꝛc.} \qquad \text{ꝛc.}$$

Unter der Voraussetzung, daß man immer

$$(-1) = (-2) = (-3) = (-4) = \ldots = 0$$

ßt, kann man diese Relationen durch folgende allgemeine ormel darstellen:

$$)' = (p-q) + (p-q+1) + (p-q+2) + \ldots + (p-2) + (p-1)$$

her die Conſtruction einer Tafel der durch (p)
Größen für irgend einen beſtimmten Werth
verſchiedene Werthe von n keiner Schwierig-
rfen iſt. Nachfolgende Tafel iſt für die ge-
rfel, wo $q=6$ iſt, berechnet, und erſtreckt
$=1$ bis $n=8$, und $p=0$ bis $p=36$. Es
Hülfe obiger recurrirenden Formel leicht ſeyn,
ortzuſetzen. Da $q=6$; ſo wird dieſe Tafel

$)+(p-5)+(p-4)+(p-3)+(p-2)+(p-1)$

nd man findet alſo jedes Glied einer Vertikalreihe
chs vorhergehenden Glieder der vorhergehenden
e zu einander addirt werden. Mit Hülfe dieſer
en ſich die meiſten Aufgaben über das Würfel-
auflöſen. Sie iſt entlehnt aus Eulers Ab-
e partitione numerorum in partes tam nu-
n specie datas. Nov. Comm. Petrop. T.
., und findet ſich auch in der deutſchen Ueber-
ntroductio in Analysin infinitorum. Thl. I.
Der Anfang einer ſolchen Tabelle findet ſich

Tafel,

anzeigt, wie oft die Zahl p mit n gemeinen Würfeln geworfen werden kann.

=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6	n=7	n=8
1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0
1	2	1	0	0	0	0	0
1	3	3	1	0	0	0	0
1	4	6	4	1	0	0	0
1	5	10	10	5	1	0	0
0	6	15	20	15	6	1	0
0	5	21	35	35	21	7	1
0	4	25	56	70	56	28	8
0	3	27	80	126	126	84	36
0	2	27	104	205	252	210	120
0	1	25	125	305	456	462	330
0	0	21	140	420	756	917	792
0	0	15	146	540	1161	1667	1708
0	0	10	140	651	1666	2807	3368
0	0	6	125	735	2247	4417	6147
0	0	3	104	780	2856	6538	10480
0	0	1	80	780	3431	9142	16808
0	0	0	56	735	3906	12117	25488
0	0	0	35	651	4221	15267	36688
0	0	0	20	540	4332	18327	50288
0	0	0	10	420	4221	20993	65808
0	0	0	4	305	3906	22967	82384
0	0	0	1	205	3431	24017	98813
0	0	0	0	126	2856	24017	113688
0	0	0	0	70	2247	22967	125588
0	0	0	0	35	1666	20993	133288
0	0	0	0	15	1161	18327	135954
0	0	0	0	5	756	15267	133288
0	0	0	0	1	456	12117	125588
0	0	0	0	0	252	9142	113688
0	0	0	0	0	126	6538	98813
0	0	0	0	0	56	4417	82384
0	0	0	0	0	21	2807	65808
0	0	0	0	0	6	1667	50288
0	0	0	0	0	1	917	36688

Mittelſt vorſtehender Tafel iſt die Anord
rfelſpiels leicht. Im Allgemeinen iſt zu b
enn das Spiel für den Spielhalter vor
, die höchſten Gewinne auf die am ſelte
auf die am häufigſten vorkommenden
d, und daß die Gewinne im umgekehrten
Zahlen ſtehen müſſen, welche anzeigen,
rechenden Würfe vorkommen können,
ſem Verhältniſſe wenigſtens möglichſt
ſuchen muß. Bei einem für den Spi
en Spiele iſt auf umgekehrte Art zu v
det dies weiter ausgeführt in E. G. F
uche für das gemeine Leben. Berlin. 179
. ff. Daraus entlehne ich folgende klein
Spiel mit drei Würfeln, wo das Spiel A.
lter, das Spiel B. für der Spieler vor
tet iſt, obgleich beim erſten mehr und grö
orkommen.

Spiel A. | Spiel B

Nimmt man an, daß in 216 Würfen alle 216 möglichen Würfe auch wirklich vorkommen, welches offenbar mit desto mehr Wahrscheinlichkeit angenommen werden kann, je öfter und je länger gespielt wird, und setzt jeder Spieler z. B. 1 gr.; so beträgt beim ersten Spiele die ganze Einnahme des Spielhalters in 216 Würfen 216 gr., seine Ausgabe 150 gr., sein Gewinn also 66 gr., d. i., mit 216 verglichen, etwa $3\frac{1}{2}$ pC. Im zweiten Spiele ist die Einnahme des Spielhalters bei 216 Würfen 216 gr., seine Ausgabe 262 gr., also 46 gr., d. i., mit 216 verglichen, beinahe $21\frac{3}{10}$ pC. Verlust.

33. Nach diesen allgemeinen Bemerkungen über das Würfelspiel wählen wir, um die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung bei einem zusammengesetztern Spiele zu zeigen, das Pharao, gewöhnlich bloß Pharo genannt. Es wird nöthig seyn, die Hauptregeln dieses Spiels kurz aus einander zu setzen.

1) Der Banquier hält das ganze wohlgemischte Spiel von 52 Karten verkehrt in der Hand.

2) Er zieht hierauf alle Karten nach der Reihe von dem Spiele ab, und legt sie aufgedeckt abwechselnd rechts und links auf den Tisch, indem er auf der rechten Seite anfängt.

3) Je zwei abgezogene Karten heißen eine Taille.

4) Sowohl vor Anfang des Spiels als auch nach jeder Taille hat jeder Spielende das Recht, auf eine oder einige bestimmte Karten eine namhafte Summe zu setzen.

5) Der Banquier gewinnt die Mise des Spielers, wenn die von demselben besetzte Karte beim Abziehen der Karten auf die rechte Seite, also, da auf dieser Seite angefangen wird, in einer ungeraden Zahl, fällt.

6) Dagegen muß der Banquier das Aequivalent der Mise an den Spieler bezahlen, wenn die besetzte Karte auf die linke Seite, also in einer geraden Zahl, fällt.

7) Fällt in einer Taille die besetzte Karte, z. B. der König oder der Bube, zweimal; so gewinnt der Banquier die Hälfte der Mise.

8) Die letzte Karte ist weder dem Banquier, noch dem

ieler, zum Vortheil, und wird gar nicht gere
alſo, wenn die vorletzte Karte die des Sp
Banquier immer das Ganze gewinnt, ſollte
te Karte wieder dieſelbe ſeyn.

34. Man überſieht leicht, daß bei dieſem
rtheil des Banquiers bloß in den beiden letzt
gen beſteht, indem ſonſt für den Banquier
ieler die Bedingungen des Spiels völlig g
eibt das Spiel unentſchieden, wenn auf bei
Karte des Spielers fällt, und wird auch die
gung aufgehoben; ſo läßt ſich leicht zeigen,
Banquier und der Spieler in gleich vielen
nen. Der Banquier habe $p + q$ Karten in
unter dieſen komme die Karte des Spielers
wird die Anzahl aller möglichen Lagen dieſer Ka
ander, da die Karten des Spielers ſowohl, al
rten des Banquiers als unter einander identi
chten ſind, indem es offenbar bloß auf die g
e Lage der Karten des Spielers und des

6 Karten in Händen, unter denen die Karte des elers drei Mal vorkommt; so sind die möglichen Lagen Karten:

a a a b b b
a a b a b b
a a b b a b
a a b b b a
a b a a b b
a b a b a b
a b a b b a
a b b a a b
a b b a b a
a b b b a a
b a a a b b
b a a b a b
b a a b b a
b a b a a b
b a b a b a
b a b b a a
b b a a a b
b b a a b a
b b a b a a
b b b a a a

Fälle, wo der Banquier gewinnt:

a a a b b b
a a b b a b
a b a a b b
a b a b a b
a b a b b a
a b b a a b
a b b a b a
a b b b a a
b b a a a b
b b a b a b

Fälle, wo der Spieler gewinnt:

a a b a b b
a a b b b a
b a a a b b
b a a b a b
b a a b b a
b a b a a b
b a b a b a
b a b b a a
b b a a a b
b b b a a a

Man vergesse hierbei nicht, daß Fälle wie aa oder bb Spiel unentschieden lassen, wie oben angenommen den ist. In gewissen Fällen kann unter dieser Vorsetzung freilich das Spiel gar nicht entschieden werden. te z. B. der Banquier die Karten aabbbb in Händen; ären alle möglichen Fälle:

a a b b b b
a b a b b b
a b b a b b
a b b b a b
a b b b b a
b a a b b b
b a b a b b
b a b b a b
b a b b b a
b b a a b b
b b a b a b
b b a b b a
b b b a a b
b b b a b a
b b b b a a

e, wo der Banquier gewinnt:

a b a b b b
a b b a b b
a b b b a b
a b b b b a
b b a b a b
b b a b b a

Fälle, wo der S gewinnt:

b a a b b b
b a b a b b
b a b b a b
b a b b b a
b b b a a b
b b b a a b

folgenden Fällen würde das Spiel unen

:

a a b b b b
b b a a b b

β) Folglich die Wahrscheinlichkeit, daß kein Blatt des Spielers in der ersten Taille zuerst gezogen wird,

$$= 1 - \frac{q}{p} = \frac{p-q}{p}.$$

γ) Ist im ersten Zuge die Karte des Spielers wirklich gezogen, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß dies auch im zweiten Zuge geschehe $= \frac{q-1}{p-1}$, und folglich die Wahrscheinlichkeit, daß in der ersten Taille zwei Karten des Spielers gezogen werden, nach $(\alpha) = \frac{q(q-1)}{p(p-1)}$ (9.), die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des ersten dem Bankier günstigen Falls.

δ) Ist beim ersten Zuge die Karte des Spielers nicht gezogen; so ist die Wahrscheinlichkeit, daß dies beim zweiten Zuge geschehe, $= \frac{q}{p-1}$, und die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit $= 1 - \frac{q}{p-1} = \frac{p-q-1}{p-1}$.

ε) Folglich die Wahrscheinlichkeit, daß in der ersten Taille kein Blatt des Spielers falle, nach (β) und (δ)

$$= \frac{(p-q)(p-q-1)}{p(p-1)} \quad (9.).$$

ζ) Ist nun in der ersten Taille kein Blatt des Spielers gefallen; so ist die Wahrscheinlichkeit, daß in der zweiten Taille zwei seiner Blätter fallen, nach (γ), wenn man -2 für p setzt, $= \frac{q(q-1)}{(p-2)(p-3)}$.

η) Folglich die Wahrscheinlichkeit, daß in der ersten Taille kein Blatt, in der zweiten zwei Blätter des Spielers fallen, nach (ε) und (ζ)

$$= \frac{q(q-1)(p-q)(p-q-1)}{p(p-1)(p-2)(p-3)} \quad (9.).$$

ϑ) Die Wahrscheinlichkeit, daß, wenn in der ersten Taille kein Blatt des Spielers gefallen, auch in der zweiten keines fällt, ist nach (ε), wenn man $p-2$ für p setzt, $= \frac{(p-q-2)(p-q-3)}{(p-2)(p-3)}$.

ι) Also die Wahrscheinlichkeit, daß weder in der ersten,

zweiten Taille ein Blatt des Spielers fällt,
nd (9)

$$\frac{(p-q)(p-q-1)(p-q-2)(p-q-3)}{p(p-1)(p-2)(p-3)} \quad (9.).$$

nun weder in der erſten, noch in der zweiten
Blatt des Spielers gefallen; ſo iſt die Wahr-
t, daß in der dritten zwei fallen, nach (7),
$p-4$ für p ſetzt, $= \frac{q(q-1)}{(p-4)(p-5)}$.

glich die Wahrſcheinlichkeit, daß weder in der
h in der zweiten Taille ein Blatt des Spielers,
der dritten zwei fallen, nach (ι) und (ϰ)

$$\frac{(p-q)(p-q-1)(p-q-2)(p-q-3)}{p(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)(p-5)}.$$

e Wahrſcheinlichkeit, daß, wenn in der erſten
n Taille kein Blatt des Spielers gefallen, auch
ten keins fällt, iſt nach (ε), wenn man $p-4$

$$= \frac{(p-q-4)(p-q-5)}{(p-4)(p-5)}.$$

glich die Wahrſcheinlichkeit, daß in den drei
len kein Blatt des Spielers fälle, nach (ι) und

$$= \frac{q(q-1)}{p(p-1)} \quad (y)$$

$$+ \frac{q(q-1)(p-q)(p-q-1)}{p(p-1)(p-2)(p-3)} \quad (z)$$

$$+ \frac{q(q-1)(p-q)(p-q-1)\ldots(p-q-3)}{p(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)(p-5)} \quad (\lambda)$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \frac{q(q-1)}{p(p-1)}\left\{1 + \frac{(p-q)(p-q-1)}{(p-2)(p-3)} + \frac{(p-q)(p-q-1)\ldots(p-q-3)}{(p-2)(p-3)\ldots(p-5)} + \frac{(p-q)(p-q-1)\ldots(p-q-5)}{(p-2)(p-3)\ldots(p-7)} + \ldots\ldots\ldots\ldots\right\}$$

36. Das allgemeine Glied dieser Reihe ist

$$\frac{(p-q)(p-q-1)\ldots(p-q-2r+3)}{(p-2)(p-3)\ldots(p-2r+1)},$$

und es entsteht nun zunächst die Frage, wie weit obige Reihe in jedem Falle fortzusetzen ist.

Ist zuerst q gerade; so ist der größte Werth von r

$$= \frac{p-q}{2} + 1,$$

denn dann ist $r-1 = \frac{p-q}{2}$, und in den $r-1$ ersten Taillen sind $2(r-1) = p-q$ Blätter aufgelegt, so daß also noch $p-(p-q) = q$ Blätter bleiben. Da in den $r-1$ ersten Taillen kein Blatt des Spielers fiel, so sind dies alle Blätter desselben, und der Banquier muß folglich in der rten Taille nothwendig gewinnen, da nun 2 Blätter des Spielers fallen müssen, wodurch das Spiel beendigt wird.

Ist q ungerade, so ist der größte Werth von r

$$= \frac{p-q+1}{2},$$

denn dann ist $r-1 = \frac{p-q-1}{2}$, und in den $r-1$ ersten Taillen sind also $2(r-1) = p-q-1$ Blätter aufgelegt, so daß also noch $p-(p-q-1) = q+1$ Blätter bleiben, und sich folglich das Spiel offenbar wieder endigt, indem in der rten Taille entweder das noch vorhandene Blatt des Banquiers und ein Blatt des Spielers,

blätter des Spielers fallen müſſen, alſo einer Theilen gewinnt.

gerades q iſt das (r + 1)te Glied

$$\frac{-q)(p-q-1)\cdots[p-q-(p-q+4)+3]}{p-2)(p-3)\cdots[p-(p-q+4)+1]}$$
$$\frac{-q)(p-q-1)\ldots.o.(-1)}{2)(p-3)\ldots.(q-2)(q-3)},$$

ungerades q

$$\frac{-q)(p-q-1)\cdots[p-q-(p-q+3)+3]}{(p-2)(p-3)\cdots[p-(p-q+3)+1]}$$
$$\frac{p-q)(p-q-1)\ldots.1.0}{-2)(p-3)\ldots(q-1)(q-2)},$$

$q > 2$, in beiden Fällen $= o$, ſo daß alſo die Reihe ſo weit fortzuſetzen iſt, bis ſie ab-

$= 2$ iſt der größte Werth von r nach dem Ob-
$\frac{-2}{2} + 1 = \frac{1}{2}p$, $2r = p$. Folglich die $(r+1)$te
öglich, eben ſo, wie für $q = 1$, da auch in
e der größte Werth von $r = \frac{p-1+1}{2} = \frac{1}{2}p$,

Die Unmöglichkeit der $(r + 1)$ten Taille in

38. Für $q = 2$ muß man die Reihe so weit fortsetzen, bis ein Glied $= \frac{2}{3}$ wird. Dies giebt die mathematische Hoffnung des Banquiers

$$= \tfrac{1}{2} \cdot \frac{2.1}{p(p-1)} \left\{ 1 + \frac{(p-2)(p-3)}{(p-2)(p-3)} + \frac{(p-2)(p-3)\ldots(p-5)}{(p-2)(p-3)\ldots(p-5)} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{(p-2)(p-3)\ldots(p-(p-1))}{(p-2)(p-3)\ldots(p-(p-1))} \right\}$$

Da nun $p-1 = 2.\frac{p}{2} - 1$, die $\left(\frac{p}{2}\right)^{te}$ ungerade Zahl, und 3 die zweite ist; so ist die Anzahl der Glieder dieser Reihe $= \frac{p}{2}$; also die mathematische Hoffnung des Banquiers $= \frac{1}{2} \cdot \frac{2.1}{p(p-1)} \cdot \frac{p}{2} = \frac{1}{2(p-1)}$. Es ist aber in diesem Falle die mathematische Hoffnung wegen der Spielregel No. 8. größer, weil in diesem Falle mit der letzten rten $= \left(\frac{p}{2}\right)^{ten}$ Taille die Karten erschöpft werden, und die beiden Blätter des Spielers in die letzte Taille fallen können, wo der Banquier nicht $\frac{1}{2}$, sondern 1 gewinnt. Die Probabilität, daß die beiden Blätter des Spielers auf die rte $= \left(\frac{p}{2}\right)^{te}$ Taille fallen, ist nach (35.)

$$= \frac{2.1.(p-2)(p-3)\ldots(p-2-p+3)}{p(p-1)(p-2)\ldots(p-p+1)}$$
$$= \frac{2.1.(p-2)\ldots.1}{p(p-1)(p-2)\ldots.1} = \frac{2.1}{p(p-1)}.$$

Die mathematische Hoffnung des Banquiers, 1 zu gewinnen, ist also $= 1 \cdot \frac{2.1}{p(p-1)}$. Die Hälfte hiervon ist aber schon in der vorigen Formel $\frac{1}{2(p-1)}$ begriffen; also ist die mathematische Hoffnung des Banquiers, wenn $q = 2$, überhaupt doch nur

$$= \frac{1}{2(p-1)} + \frac{1}{p(p-1)} = \frac{p+2}{2p(p-1)}.$$

39. Ist endlich $q = 1$; so können nie zwei Blätter des Spielers in einer Taille fallen, und die mathematische Hoffnung des Banquiers reducirt sich also darauf, daß das eine Blatt des Spielers, welches in dem Spiele vorhanden, in die erste Ziehung der letzten Taille fällt. Da bei der ersten Ziehung der letzten Taille offenbar jedes Blatt

erden kann, die Anzahl aller Fälle al
ünstigen $= 1$ ist; so ist die Wahrschei
s geschehe, $= \frac{1}{p}$, und, weil der Ba
lle die ganze Mise des Spielers gewinn
ische Hoffnung $= 1 . \frac{1}{p} = \frac{1}{p}$.

Die gefundene Reihe für $q > 2$ läßt sich
Arten transformiren. Ist q eine gera
letzte Glied

$$= \frac{(p-q)(p-q-1)\ldots 3.2.1}{(p-2)(p-3)\ldots q(q-1)} \quad (36.)$$

enn man die Reihe umgekehrt schreibt,
des Banquiers, die wir durch S bezeichne

$$\ldots(p-q)\left\{\frac{q(q-1)}{p(p-1)}\right\}\left\{\begin{array}{l}\frac{(p-q)(p-q-1)\ldots 3.2.1}{(p-2)(p-3)\ldots q(q-1)} \\ + \frac{(p-q)(p-q-1)\ldots 4.3}{(p-2)(p-3)\ldots(q+1)} \\ \ldots\ldots\ldots \\ + \frac{(p-q)(p-q-1)}{(p-2)(p-3)} + 1\end{array}\right.$$

41. Aus der zuerst gefundenen Reihe folgt auch leicht

$$S = \frac{q}{2p}\left\{\frac{q-1}{p-1} + \frac{(p-q)(p-q-1)(q-1)}{(p-1)(p-2)(p-3)} + \frac{(p-q)..(p-q-3)(q-1)}{(p-1)(p-2)...(p-5)} + \frac{(p-q)..(p-q-5)(q-1)}{(p-1)(p-2)..(p-7)} + ...\right\}$$

er

$$\frac{q-1}{p-1} = 1 - \frac{p-q}{p-1},$$
$$\frac{q-1}{p-3} = 1 - \frac{p-q-2}{p-3},$$
$$\frac{q-1}{p-5} = 1 - \frac{p-q-4}{p-5},$$
$$\frac{q-1}{p-7} = 1 - \frac{p-q-6}{p-7},$$
$$\text{ꝛc.} \qquad \text{ꝛc.}$$

o auch

$$S = \frac{q}{2p}\left\{1 - \frac{p-q}{p-1} + \frac{(p-q)(p-q-1)}{(p-1)(p-2)} - \frac{(p-q)(p-q-1)(p-q-2)}{(p-1)(p-2)(p-3)} + \frac{(p-q)(p-q-1)..(p-q-3)}{(p-1)(p-2)..(p-4)} - \frac{(p-q)(p-q-1)..(p-q-4)}{(p-1)(p-2)..(p-5)} + ...\right\}$$

t q gerade, so hat die ursprüngliche Reihe $\frac{p-q}{2} + 1$, transformirte also $p - q + 2$ Glieder. Das letzte ied ist aber

$$\frac{(p-q)(p-q-1)\ldots 3.2.1.(q-1)}{(p-1)(p-2)\ldots(q-1)} = \frac{(p-q)(p-q-1)\ldots 3.2.1}{(p-1)(p-2)\ldots q},$$

lches nicht mehr in zwei Glieder zerlegt werden kann. so hat die transformirte Reihe nur $p - q + 1$ Glieder, n so, wie in dem Falle, wenn q ungerade, wo die Glie- zahl der transformirten Reihe wirklich $= 2.\frac{p-q+1}{2}$ $= p - q + 1$ ist.

ach dem Artikel **Umformung der Reihen** (22.)

$$\left.\begin{aligned} &-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{q(q-1)}{p(p-1)}+\tfrac{1}{4}\cdot\frac{q(q-1)(q-2)}{p(p-1)(p-2)}\\ &\qquad+\tfrac{1}{8}\cdot\frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{p(p-1)(p-2)(p-3)}\\ &\qquad\qquad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ &\qquad+\frac{1}{2^{q-1}}\cdot\frac{q(q-1)\ldots 1}{(p-1)\ldots(p-q+1)}\left[1+(-1)^{p-q}\right] \end{aligned}\right\}$$

das dortige S′ mit $\frac{q}{2p}$ **multiplicirt.**

Endlich erhält man auch **nach Umformung** de
3.)

$$\begin{aligned} =\tfrac{1}{4}\cdot\frac{q}{p-q+1}&-\tfrac{1}{8}\cdot\frac{q(q-1)}{(p-q+1)(p-q+2)}\\ &+\tfrac{1}{16}\cdot\frac{q(q-1)(q-2)}{(p-q+1)(p-q+2)(p-q+3)}\\ &\qquad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ &+(-\tfrac{1}{2})^q\cdot\frac{q(q-1)\ldots 2}{(p-q+1)\ldots(p-1)}, \end{aligned}$$

harao immer p gerade, $p-2q+1$ ungerade

Diese vier speciellen Formeln giebt auch Moivre in der Doctrine of Chances. London. 1718. p. 41—43.

44. Montmort hat nach diesen speciellen Formeln zwei Tabellen für den Vortheil des Banquier beim Pharao berechnet, welche ich hier mittheile. Sie werden keiner weitern Erklärung bedürfen. Die Tabelle B. giebt bloß Gränzen an, die aber in kleinern Brüchen ausgedrückt sind, als die Werthe in der Tabelle A. Die Ansicht dieser Tabellen lehrt augenblicklich, daß der Vortheil des Banquiers am kleinsten, der des Spielers also am größten ist, wenn $q = 2$ oder $q = 3$, und p nahe $= 52$ ist. Daraus ergeben sich folgende zwei Regeln für den Spieler:

a) Er muß nur in den ersten Taillen eine Karte besetzen, und desto weniger, je mehr Taillen schon gezogen sind.

b) Die Karten sind für ihn die schlechtesten, welche entweder schon drei Mal, oder noch gar nicht heraus sind. Die besten sind diejenigen, welche zwei Mal heraus sind, und eine solche Karte muß also der Spieler, so viel möglich, sogleich nach einer der ersten Taillen besetzen, wenn er mit dem größten Vortheile spielen will. Der Banquier wird dann den geringsten Vortheil haben. Die Beobachtung dieser Regeln ist allen Spielern zu empfehlen; aber immer wird doch der Banquier im Vortheil seyn.

In der Schrift: Exercitationes quaedam mathematicae. Venetiis. 1724. 4. hat Daniel Bernoulli bei Gelegenheit eines Streites mit Rizetti welcher Montmorts und Joh. Bernoulli's Formeln für den Vortheil des Banquiers für falsch hielt, dieselben kurz entwickelt, und ebenfalls eine Tabelle beigefügt.

A.

Vortheil des Banquiers, wenn

	q = 1	q = 2	q = 3	q = 4
2	—	—	—	$\frac{22950862}{115890841}$
3	—	$\frac{3117}{350350}$	$\frac{3}{196}$	$\frac{7208826}{34959530}$
4	$\frac{1}{48}$	$\frac{1787}{101304}$	$\frac{3}{188}$	$\frac{276199}{1284228}$
5	$\frac{1}{46}$	$\frac{3431}{206010}$	$\frac{3}{180}$	$\frac{11002}{489555}$
6	$\frac{1}{44}$	$\frac{822}{67039}$	$\frac{3}{172}$	$\frac{913}{38786}$
7	$\frac{1}{42}$	$\frac{3145}{246246}$	$\frac{3}{164}$	$\frac{79}{3198}$
8	$\frac{1}{40}$	$\frac{1501}{111540}$	$\frac{3}{156}$	$\frac{25}{962}$
9	$\frac{1}{38}$	$\frac{2849}{201068}$	$\frac{3}{148}$	$\frac{1349}{49210}$
10	$\frac{1}{36}$	$\frac{679}{45045}$	$\frac{3}{140}$	$\frac{1139}{39270}$
11	$\frac{1}{34}$	$\frac{2573}{160446}$	$\frac{3}{132}$	$\frac{357}{11504}$
12	$\frac{1}{32}$	$\frac{1215}{70928}$	$\frac{3}{124}$	$\frac{177}{5394}$
13	$\frac{1}{30}$	$\frac{2287}{124410}$	$\frac{3}{116}$	$\frac{55}{1500}$
14	$\frac{1}{28}$	$\frac{536}{27027}$	$\frac{3}{108}$	$\frac{221}{5850}$

B.

Vortheil des Banquiers, wenn

p =	q = 1	q = 2		q = 3		q = 4	
	=	>	<	>	<	>	<
52	—	—	—	—	—	$\frac{1}{51}$	$\frac{1}{50}$
50	—	$\frac{1}{99}$	$\frac{1}{98}$	$\frac{1}{66}$	$\frac{1}{65}$	$\frac{1}{49}$	$\frac{1}{48}$
48	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{91}$	$\frac{1}{90}$	$\frac{1}{63}$	$\frac{1}{62}$	$\frac{1}{47}$	$\frac{1}{46}$
46	$\frac{1}{46}$	$\frac{1}{87}$	$\frac{1}{86}$	= $\frac{1}{60}$	—	$\frac{1}{45}$	$\frac{1}{44}$
44	$\frac{1}{44}$	$\frac{1}{83}$	$\frac{1}{82}$	$\frac{1}{58}$	$\frac{1}{57}$	$\frac{1}{43}$	$\frac{1}{42}$
42	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{79}$	$\frac{1}{78}$	$\frac{1}{55}$	$\frac{1}{54}$	$\frac{1}{41}$	$\frac{1}{40}$
40	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{75}$	$\frac{1}{74}$	= $\frac{1}{52}$	—	$\frac{1}{39}$	$\frac{1}{38}$
38	$\frac{1}{38}$	$\frac{1}{71}$	$\frac{1}{70}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{49}$	$\frac{1}{37}$	$\frac{1}{36}$
36	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{67}$	$\frac{1}{66}$	$\frac{1}{47}$	$\frac{1}{46}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{34}$
34	$\frac{1}{34}$	$\frac{1}{63}$	$\frac{1}{62}$	= $\frac{1}{44}$	—	$\frac{1}{33}$	$\frac{1}{32}$
32	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{59}$	$\frac{1}{58}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{41}$	$\frac{1}{31}$	$\frac{1}{30}$
30	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{55}$	$\frac{1}{54}$	$\frac{1}{39}$	$\frac{1}{38}$	$\frac{1}{29}$	$\frac{1}{28}$
28	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{51}$	$\frac{1}{50}$	= $\frac{1}{36}$	—	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{26}$
26	$\frac{1}{26}$	$\frac{1}{47}$	$\frac{1}{46}$	$\frac{1}{34}$	$\frac{1}{33}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{24}$
24	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{43}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{31}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{23}$	$\frac{1}{22}$
22	$\frac{1}{22}$	$\frac{1}{39}$	$\frac{1}{38}$	= $\frac{1}{28}$	—	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{20}$
20	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{34}$	$\frac{1}{26}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{19}$	$\frac{1}{18}$
18	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{31}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{23}$	$\frac{1}{22}$	$\frac{1}{17}$	$\frac{1}{16}$
16	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{26}$	= $\frac{1}{20}$	—	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{14}$
14	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{23}$	$\frac{1}{22}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{17}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{1}{12}$
12	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{19}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{10}$
10	$\frac{1}{10}$	= $\frac{1}{15}$	—	= $\frac{1}{12}$	—	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{8}$
8	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{6}$
6	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$
4	$\frac{1}{4}$	= $\frac{1}{4}$	—	= $\frac{1}{4}$	—	= $\frac{1}{2}$	—

Die Nenner der größern Gränzen findet man auch bei Moivre a. O. p. 44. in einer Tabelle berechnet.

den deutschen Zahlenlotterien, dem Lo
nd der Loterie de France liegen 90
ücksrade, von denen 5 gezogen werden.
der gezogenen Nummern gesetzt hat,
tz eine gewisse Anzahl mal wieder, bei d
ance z. B. 15mal. Den Spielern
er bloß die einzelnen von ihnen gewählte
n, oder auch die in denselben enthaltene
u zwei, drei, u. s. f., d. h. Amben,
elche bei allen Lotterien höher bezahlt
elnen Auszüge. Bei der Loterie de
lmbe 270, eine Terne 5200 mal.
erien darf man nur bis Ternen gehen.
haupt nur möglich, da bloß 5 Numm
n. Größerer Allgemeinheit wegen woll
n immer setzen, daß die Lotterie aus n
, von denen r gezogen werden.

t man nun s Nummern besetzt, und
ichkeit wissen, daß von denselben t hera
; so muß man auf folgende Art schließe

$$\frac{(n-s)..(n-s-r+t+1).s...(s-t+1).1.2.3...r}{1.2.3..(r-t).1.2.3..t.n(n-1)..(n-r+1)}$$
$$= \frac{(n-s)..(n-s-r+t+1).s..(s-t+1).r..(r-t+1)}{1.2.3...t.n(n-1)..(n-r+1)}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, eine Terne zu gewinnen, ist also B. bei der gewöhnlichen Zahlenlotterie, da in diesem alle $n = 90$, $r = 5$, $s = 3$, $t = 3$ ist,

$$= \frac{87.86.3.2.1.5.4.3}{1.2.3.90.89.88.87.86} = \frac{1}{11748}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, einen einfachen Auszug zu gewinnen, ist $= \frac{5}{90} = \frac{1}{18}$, und die, eine Ambe zu gewinnen, $= \frac{2}{801}$, ungefähr $= \frac{1}{400}$.

47. Will man die Wahrscheinlichkeit wissen, daß von en s besetzten Nummern wenigstens t herauskommen;) sollen entweder t, oder t + 1, oder t + 2, oder t + 3, . s. f. herauskommen. Ist $s \lessgtr r$, so erstreckt sich diese Reihe bis s; ist aber $s > r$, nur bis r, da überhaupt nur Nummern gezogen werden. Nach der Regel der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit (8.) muß man die einzelen, den obigen Ereignissen entsprechenden, Wahrscheinchkeiten, nach (46.) berechnen, und die erhaltenen Brüche addiren. Hat z. B. Jemand 2 Nummern besetzt, nd will die Wahrscheinlichkeit wissen, daß von denselben enigstens eine herauskommen werde; so ist $n = 90$, $= 5$, $s = 2$, $t = 1$, $t + 1 = 2 = s$, da $s < r$. lso die gesuchte Probabilität

$$= \frac{88.87.86.85.2.5}{1.90.89.88.87.86} + \frac{88.87.86.2\ 1.5.4}{1.2.90.89.88.87.86}$$
$$= \frac{85}{9.89} + \frac{2}{9.89} = \frac{87}{801}, < \frac{1}{9}, > \frac{1}{10}.$$

48. Soll man die Wahrscheinlichkeit bestimmen, daß on den n Nummern einer Lotterie in einer Ziehung von Nummern s bestimmte Nummern herauskommen;) ist die Anzahl aller Fälle, wie oben,

$$= \frac{n(n-1)\ ...\ (n-r+1)}{1.2.3....r}.$$

Die Anzahl der günstigen Fälle ist offenbar die Anzahl der Combinationen der übrigen $n-s$ Nummern zu $r-s$, ämlich

$$= \frac{(n-s)(n-s-1)\ldots(n-r+1)}{1.2.3\ldots(r-s)}.$$

uchte Probabilität

$$\frac{(n-s)\ldots(n-r+1).1.2.3\ldots r}{1.2.3\ldots(r-s).n(n-1)..(n-r+1)}$$

$$\frac{(n-s)..(n-r+1).1..(r-s).(r-s+1)..r}{1..(r-s).n\ldots(n-s+1).(n-s)..(n-r+1)}$$

$$\frac{r(r-1)\ldots(r-s+1)}{n(n-1)\ldots(n-s+1)}.$$

ill man die Wahrſcheinlichkeit haben, daß in
le die s beſtimmten Nummern in einer beſtimm
g herauskommen; ſo iſt die Anzahl der günſ
da es nach der Theorie der Permutationen
verſchiedene Ordnungen giebt, in welchen die
n herauskommen können, = der obigen, durch
dividirt, ſo daß man alſo auch die obige Pro
urch dieſes Product dividiren muß, wodurch
: geſuchte Probabilität

$$\frac{r(r-1)\ldots(r-s+1)}{1.2.3\ldots s.n(n-1)..(n-s+1)}$$

hält. Was die Lotterie dem Spieler bezahlen muß, ist so dem Quotienten seiner Mise durch seine Probabilität, t gewinnen, gleich. Nach (46.) muß die Lotterie also ir einen einfachen Gewinn 18m, für eine Ambe $8\frac{0}{2}1$m $= 400\frac{1}{4}$m, für eine Terne 11748m bezahlen. Gewöhnch werden aber von den Lotterien nur 15m, 270m, 200m bezahlt, und das Uebrige also für Risico und Kosten abgezogen. Die Wahrscheinlichkeit, eine Quinte t gewinnen, wäre nach (46.) $= \frac{1}{43949268}$, und die otterie müßte also in diesem Falle 43949268m bezahlen. Man hat jedoch diese Art zu spielen allgemein abgeschafft, eil die Probabilität zu gewinnen so sehr klein ist.

Die ehemalige Berliner Zahlenlotterie bezahlte einen mplen Auszug 15, eine Ambe 270, eine Terne 5300, ne Quaterne 60000 Mal, in Bezug auf die Mise des Spielers. Die oben angegebenen Zahlen beziehen sich auf ie Loterie de France.

52. Eine wichtige Aufgabe, mit deren Auflösung sich rzüglich Euler (Opuscula analytica. T. II. p. 333.) nd Laplace (Théorie analytique des probabilités. . 191—201.) beschäftigt haben, ist folgende:

Eine Lotterie bestehe aus n Nummern; man soll e Wahrscheinlichkeit bestimmen, daß in i Ziehungen, enn jedes Mal r Nummern gezogen werden, alle Numern herauskommen werden.

Eulers Auflösung.

Es liegt in der Natur der Aufgabe, daß $i \geqq \frac{n}{r}$ yn muß, indem, für $i < \frac{n}{r}$, die gesuchte Probabilität $= 0$ ist.

Die Anzahl aller möglichen Fälle bei einer Ziehung t offenbar die Anzahl der Combinationen der n Nummern u r, wie wir auch schon oben gesehen haben, also

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{1.2.3\ldots r} = \left[\frac{n}{r}\right].$$

für i Ziehungen kann sich jeder einzelne Fall bei jeder ein-

ung mit jedem einzelnen Falle bei jeder andern
mbiniren, ſo daß alſo die Anzahl aller möglichen
Ziehungen $= \left[\frac{n}{r}\right]^i$ iſt.

n die Anzahl der günſtigen Fälle zu finden, be-
1 die einzelnen Nummern der Lotterie durch a,
e, ... ; ſo erhellet leicht, daß unter obiger
er Fälle auch die Fälle mit begriffen ſind, in
Nummer, z. B. a, fehlt, deren Anzahl offen-
nzahl aller Fälle bei einer Lotterie mit $n-1$
für i Ziehungen iſt, d. i. nach dem Obigen $=$
Folglich iſt, da die Lotterie überhaupt n Num-
lt, die Anzahl der Fälle, in denen keine Num-
$= \left[\frac{n}{r}\right]^i - n\left[\frac{n-1}{r}\right]^i$. Man überzeugt ſich
daß hierbei ein Fehler begangen worden, in-
r viel abgezogen hat. Jeder Fall nämlich, wo
nern, z. B. a, b, fehlen, iſt doppelt, einmal
uf a, und einmal in Bezug auf b, abgezogen
1 er doch offenbar nur einmal abgezogen, und

urch man, nach einer ähnlichen Betrachtung, wie
ier

$$\left[\frac{n}{r}\right]^i - n\left[\frac{n-1}{r}\right]^i + \frac{n(n-1)}{1.2}\left[\frac{n-2}{r}\right]^i - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left[\frac{n-3}{r}\right]^i$$

lt.

Hierbei ist aber wieder jeder der Fälle, in denen vier mmern, z. B. a, b, c, d, fehlen, vier Mal subtra-, in Bezug auf a, b, c, d; sechs Mal addirt, in ug auf ab, ac, ad, bc, bd, cd; vier Mal subtra- in Bezug auf abc, abd, acd, bcd; also überhaupt Mal subtrahirt worden, und muß folglich wieder mal addirt werden, wodurch man erhält:

$$\left[\frac{n}{r}\right]^i - n\left[\frac{n-1}{r}\right]^i + \frac{n(n-1)}{1.2}\left[\frac{n-2}{r}\right]^i$$
$$\frac{(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left[\frac{n-3}{r}\right]^i + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\left[\frac{n-4}{r}\right]^i,$$

gehöriger Rücksicht auf die Combinationszahl der n mmern zu vieren.

Man könnte auf diese Art weiter gehen. Um aber der ersuchung die nöthige Allgemeinheit zu geben, setze man, man bis zu α fehlenden Nummern gegangen sey, und die Anzahl aller Fälle, in denen keine Nummer fehlt,

$$\left[\frac{n}{r}\right]^i - n\left[\frac{n-1}{r}\right]^i + \frac{n(n-1)}{1.2}\left[\frac{n-2}{r}\right]^i$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left[\frac{n-3}{r}\right]^i$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\pm \frac{n(n-1)\ldots(n-\alpha+1)}{1.2.3\ldots\alpha}\left[\frac{n-\alpha}{r}\right]^i$$

$\pm$ wenn α $\left\{\begin{matrix}\text{gerade}\\ \text{ungerade}\end{matrix}\right\}$

lten habe. Jeder Fall, wo $\alpha + 1$ Nummern fehlen, ierbei

1) subtrahirt bei einer fehlenden Nummer

$(\alpha + 1)$mal;

2) addirt bei zwei fehlenden Nummern so oft, als sich 1 Nummern zu zweien combiniren lassen, d. i.

$\frac{(\alpha+1)\alpha}{1.2}$mal;

ſubtrahirt bei drei fehlenden Nummern ſ
+ 1 Elemente zu dreien combiniren laſſen,

$$\frac{(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)}{1.2.3}\text{mal};$$

endlich addirt oder ſubtrahirt, jenachdem
ngerade iſt, bei α fehlenden Elementen ſ
+ 1 Elemente zu α combiniren laſſen, d.

$$\frac{(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)\ldots 3.2}{1.2.3.4\ldots\alpha}\text{mal}.$$

ebraucht man, jenachdem addirt oder ſubtr
, das Zeichen + oder —; ſo iſt die Zahl, w
wo $\alpha+1$ Nummern fehlen, addirt oder
n iſt,

$$= -\frac{\alpha+1}{1} + \frac{(\alpha+1)\alpha}{1.2} - \frac{(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)}{1.2.3} +$$

$$\ldots \pm \frac{(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)\ldots 2}{1.2.3\ldots\alpha}$$

$$\pm \text{ wenn } \alpha \begin{cases}\text{gerade}\\ \text{ungerade}\end{cases}$$

$$= 1 - \left[\frac{\alpha+1}{1}\right] + \left[\frac{\alpha+1}{2}\right] - \left[\frac{\alpha+1}{3}\right] +$$

$$+ \left[\frac{\alpha+1}{\alpha+1}\right] = 1 - \begin{cases}0\\ 1\end{cases}$$

Da nun höchstens $n-r$ Nummern fehlen können, so ist der höchste Werth von $\alpha+1=n-r$, d. i. $\alpha=n-r-1$, welches, in obige Formel gesetzt, für die Anzahl aller möglichen Fälle, in denen keine Nummer fehlt, den Ausdruck

$$\left[\frac{n}{r}\right]^i - n\left[\frac{n-1}{r}\right]^i + \frac{n(n-1)}{1.2}\left[\frac{n-2}{r}\right]^i - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left[\frac{n-3}{r}\right]^i + \ldots \mp \frac{n(n-1)..(r+1)}{1.2\ldots(n-r)}\left[\frac{r}{r}\right]^i$$

giebt. Da nun $\left[\frac{r-1}{r}\right]$ an sich $=0$ ist; so kann man obige Größe

$$= \left[\frac{n}{r}\right]^i - n\left[\frac{n-1}{r}\right]^i + \frac{n(n-1)}{1.2}\left[\frac{n-2}{r}\right]^i - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left[\frac{n-3}{r}\right]^i + \ldots.$$

setzen, wenn nur die Reihe so weit fortgesetzt wird, bis sie von selbst abbricht. Unter derselben Voraussetzung ist also die gesuchte Probabilität

$$= \frac{1}{\left[\frac{n}{r}\right]^i}\left\{\left[\frac{n}{r}\right]^i - n\left[\frac{n-1}{r}\right]^i + \frac{n(n-1)}{1.2}\left[\frac{n-2}{r}\right]^i - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left[\frac{n-3}{r}\right]^i + \ldots.\right\}$$

53. Aber allgemein

$$\frac{\left[\frac{n-\alpha}{r}\right]}{\left[\frac{n}{r}\right]} = \frac{(n-\alpha)(n-\alpha-1)..(n-\alpha-r+1)}{n(n-1)\ldots(n-r+1)}$$

$$= \frac{(n-\alpha)..(n-r+1)(n-r)\ldots(n-r-\alpha+1)}{n(n-1)..(n-\alpha+1)(n-\alpha)\ldots(n-r+1)}$$

$$= \frac{(n-r)..(n-\alpha+1)(n-\alpha)..(n-r-\alpha+1)}{n(n-1)..(n-r+1)(n-r)..(n-\alpha+1)}$$

$$= \frac{(n-r)(n-r-1)\ldots(n-r-\alpha+1)}{n(n-1)(n-2)..(n-\alpha+1)}$$

Also obige Probabilität, wenn man mit $\left[\frac{n}{r}\right]^i$ wirklich dividirt,

$$= 1 - \frac{\lfloor n-r\rfloor^i}{1.n^{i-1}} + \frac{\lfloor (n-r)(n-r-1)\rfloor^i}{1.2.\lfloor n(n-1)\rfloor^{i-1}} - \frac{\lfloor (n-r)(n-r-1)(n-r-2)\rfloor^i}{1.2.3.\lfloor n(n-1)(n-2)\rfloor^{i-1}} + \ldots\ldots\ldots$$

A.

Vortheil des Banquiers, wenn

q = 1	q = 2	q = 3	q = 4
—	—	—	$\frac{22950862}{115890841}$
—	$\frac{3117}{350350}$	$\frac{3}{196}$	$\frac{720882}{3495953}$
$\frac{1}{48}$	$\frac{1787}{161304}$	$\frac{3}{188}$	$\frac{276199}{1284228}$
$\frac{1}{46}$	$\frac{3431}{296010}$	$\frac{3}{180}$	$\frac{11002}{489553}$
$\frac{1}{44}$	$\frac{822}{67039}$	$\frac{3}{172}$	$\frac{913}{38786}$
$\frac{1}{42}$	$\frac{3145}{246246}$	$\frac{3}{164}$	$\frac{79}{3198}$
$\frac{1}{40}$	$\frac{1501}{111540}$	$\frac{3}{156}$	$\frac{25}{962}$
$\frac{1}{38}$	$\frac{2849}{201068}$	$\frac{3}{148}$	$\frac{1349}{49210}$
$\frac{1}{36}$	$\frac{679}{45045}$	$\frac{3}{140}$	$\frac{1139}{39270}$
$\frac{1}{34}$	$\frac{2573}{160446}$	$\frac{3}{132}$	$\frac{357}{11594}$
$\frac{1}{32}$	$\frac{1215}{70928}$	$\frac{3}{124}$	$\frac{177}{5394}$
$\frac{1}{30}$	$\frac{2287}{124410}$	$\frac{3}{116}$	$\frac{55}{1566}$
$\frac{1}{}$	$\frac{536}{}$	$\frac{3}{}$	$\frac{221}{}$

B.

Vortheil des Banquiers, wenn

p =	q = 1	q = 2		q = 3		q = 4	
	=	>	<	>	<	>	<
52	—	—	—	—	—	$\frac{1}{51}$	$\frac{1}{50}$
50	—	$\frac{1}{95}$	$\frac{1}{94}$	$\frac{1}{66}$	$\frac{1}{65}$	$\frac{1}{49}$	$\frac{1}{48}$
48	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{91}$	$\frac{1}{90}$	$\frac{1}{63}$	$\frac{1}{62}$	$\frac{1}{47}$	$\frac{1}{46}$
46	$\frac{1}{46}$	$\frac{1}{87}$	$\frac{1}{86}$	$= \frac{1}{60}$	—	$\frac{1}{45}$	$\frac{1}{44}$
44	$\frac{1}{44}$	$\frac{1}{83}$	$\frac{1}{82}$	$\frac{1}{58}$	$\frac{1}{57}$	$\frac{1}{43}$	$\frac{1}{42}$
42	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{79}$	$\frac{1}{78}$	$\frac{1}{55}$	$\frac{1}{54}$	$\frac{1}{41}$	$\frac{1}{40}$
40	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{75}$	$\frac{1}{74}$	$= \frac{1}{52}$	—	$\frac{1}{39}$	$\frac{1}{38}$
38	$\frac{1}{38}$	$\frac{1}{71}$	$\frac{1}{70}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{49}$	$\frac{1}{37}$	$\frac{1}{36}$
36	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{67}$	$\frac{1}{66}$	$\frac{1}{47}$	$\frac{1}{46}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{34}$
34	$\frac{1}{34}$	$\frac{1}{63}$	$\frac{1}{62}$	$= \frac{1}{44}$	—	$\frac{1}{33}$	$\frac{1}{32}$
32	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{59}$	$\frac{1}{58}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{41}$	$\frac{1}{31}$	$\frac{1}{30}$
30	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{55}$	$\frac{1}{54}$	$\frac{1}{39}$	$\frac{1}{38}$	$\frac{1}{29}$	$\frac{1}{28}$
28	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{51}$	$\frac{1}{50}$	$= \frac{1}{36}$	—	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{26}$
26	$\frac{1}{26}$	$\frac{1}{47}$	$\frac{1}{46}$	$\frac{1}{34}$	$\frac{1}{33}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{24}$
24	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{43}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{31}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{23}$	$\frac{1}{22}$
22	$\frac{1}{22}$	$\frac{1}{39}$	$\frac{1}{38}$	$= \frac{1}{28}$	—	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{20}$
20	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{34}$	$\frac{1}{26}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{19}$	$\frac{1}{18}$
18	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{31}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{23}$	$\frac{1}{22}$	$\frac{1}{17}$	$\frac{1}{16}$
16	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{26}$	$= \frac{1}{20}$	—	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{14}$
14	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{23}$	$\frac{1}{22}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{17}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{1}{12}$
12	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{19}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{10}$
10	$\frac{1}{10}$	$= \frac{1}{15}$	—	$= \frac{1}{12}$	—	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{8}$
8	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{6}$
6	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$
4	$\frac{1}{4}$	$= \frac{1}{5}$	—	$= \frac{1}{4}$	—	$= \frac{1}{3}$	—

Die Nenner der größern Gränzen findet man auch bei Moivre a. O. p. 44. in einer Tabelle berechnet.

den deutſchen Zahlenlotterien, dem Lotto di
nd der Loterie de France liegen 90 Num-
ücksrade, von denen 5 gezogen werden. Jeder,
der gezogenen Nummern geſetzt hat, erhält
s eine gewiſſe Anzahl mal wieder, bei der Lo-
nce z. B. 15mal. Den Spielern ſteht es
r bloß die einzelnen von ihnen gewählten Zah-
n, oder auch die in denſelben enthaltenen Ver-
zwei, drei, u. ſ. f., d. h. Amben, Ternen,
lche bei allen Lotterien höher bezahlt werden,
lnen Auszüge. Bei der Loterie de France
mbe 270, eine Terne 5200 mal. Bei den
rien darf man nur bis Ternen gehen. Quin-
haupt nur möglich, da bloß 5 Nummern ge-
. Größerer Allgemeinheit wegen wollen wir
n immer ſetzen, daß die Lotterie aus n Num-
, von denen r gezogen werden.

man nun s Nummern beſetzt, und will die
chkeit wiſſen, daß von denſelben t herauskom-
ſo muß man auf folgende Art ſchließen. Die

$$\frac{(n-s)..(n-s-r+t+1).s...(s-t+1).1.2.3...r}{1.2.3..(r-t).1.2.3..t.n(n-1)..(n-r+1)}$$
$$= \frac{(n-s)..(n-s-r+t+1).s..(s-t+1).r..(r-t+1)}{1.2.3...t.n(n-1)..(n-r+1)}.$$

e Wahrscheinlichkeit, eine Terne zu gewinnen, ist also B. bei der gewöhnlichen Zahlenlotterie, da in diesem lle $n = 90$, $r = 5$, $s = 3$, $t = 3$ ist,

$$= \frac{87.86.3.2.1.5.4.3}{1.2.3.90.89.88.87.86} = \frac{1}{11748}.$$

ie Wahrscheinlichkeit, einen einfachen Auszug zu gewin-n, ist $= \frac{5}{90} = \frac{1}{18}$, und die, eine Ambe zu gewinnen, $\frac{2}{801}$, ungefähr $= \frac{1}{400}$.

47. Will man die Wahrscheinlichkeit wissen, daß von s besetzten Nummern wenigstens t herauskommen; sollen entweder t, oder $t+1$, oder $t+2$, oder $t+3$, s. f. herauskommen. Ist $s \leqq r$, so erstreckt sich diese ihe bis s; ist aber $s > r$, nur bis r, da überhaupt nur Nummern gezogen werden. Nach der Regel der zusam-ngesetzten Wahrscheinlichkeit (8.) muß man die einzel-n, den obigen Ereignissen entsprechenden, Wahrschein-)keiten, nach (46.) berechnen, und die erhaltenen üche addiren. Hat z. B. Jemand 2 Nummern besetzt, d will die Wahrscheinlichkeit wissen, daß von denselben enigstens eine herauskommen werde; so ist $n = 90$, $= 5$, $s = 2$, $t = 1$, $t + 1 = 2 = s$, da $s < r$. so die gesuchte Probabilität

$$= \frac{88.87.86.85.2.5}{1.90.89.88.87.86} + \frac{88.87.86.2\ 1.5.4}{1.2.90.89.88.87.86}$$
$$= \frac{85}{9.89} + \frac{2}{9.89} = \frac{87}{801}, < \frac{1}{9}, > \frac{1}{10}.$$

48. Soll man die Wahrscheinlichkeit bestimmen, daß n den n Nummern einer Lotterie in einer Ziehung von Nummern s bestimmte Nummern herauskommen; ist die Anzahl aller Fälle, wie oben,

$$= \frac{n(n-1)\ ...\ (n-r+1)}{1.2.3....r}.$$

ie Anzahl der günstigen Fälle ist offenbar die Anzahl der mbinationen der übrigen $n-s$ Nummern zu $r-s$, mlich

$$= \frac{(n-s)(n-s-1)\ldots(n-r+1)}{1.2.3\ldots(r-s)}.$$

ie geſuchte Probabilität

$$= \frac{(n-s)\ldots(n-r+1).1.2.3\ldots r}{1.2.3\ldots(r-s).n(n-1)..(n-r+1)}$$

$$= \frac{(n-s)..(n-r+1).1..(r-s).(r-s}{1..(r-s).n\ldots(n-s+1).(n-s)..(}$$

$$= \frac{r(r-1)\ldots(r-s+1)}{n(n-1)\ldots(n-s+1)}.$$

). Will man die Wahrſcheinlichkeit haben
n Falle die s beſtimmten Nummern in einer
·dnung herauskommen; ſo iſt die Anzahl d
älle, da es nach der Theorie der Perm
3...s verſchiedene Ordnungen giebt, in w
nmern herauskommen können, = der obig
3...s dividirt, ſo daß man alſo auch die o
ät durch dieſes Product dividiren muß,
ür die geſuchte Probabilität

$$\frac{r(r-1)\ldots(r-s+1)}{1.2.3\ldots s.n(n-1)..(n-s+1)}$$

hält. Was die Lotterie dem Spieler bezahlen muß, ist so dem Quotienten seiner Mise durch seine Probabilität, gewinnen, gleich. Nach (46.) muß die Lotterie also r einen einfachen Gewinn 18m, für eine Ambe $8\frac{0}{1}$m = 400½m, für eine Terne 11748m bezahlen. Gewöhnh werden aber von den Lotterien nur 15m, 270m, 200m bezahlt, und das Uebrige also für Risico und oſten abgezogen. Die Wahrscheinlichkeit, eine Quinte gewinnen, wäre nach (46.) $= \frac{1}{43949268}$, und die otterie müßte also in diesem Falle 43949268m bezahlen. Man hat jedoch diese Art zu spielen allgemein abgeschafft, eil die Probabilität zu gewinnen so sehr klein ist.

Die ehemalige Berliner Zahlenlotterie bezahlte einen nplen Auszug 15, eine Ambe 270, eine Terne 5300, ne Quaterne 60000 Mal, in Bezug auf die Mise des pielers. Die oben angegebenen Zahlen beziehen sich auf e Loterie de France.

52. Eine wichtige Aufgabe, mit deren Auflösung sich rzüglich Euler (Opuscula analytica. T. II. p. 333.) nd Laplace (Théorie analytique des probabilités. . 191—201.) beschäftigt haben, ist folgende:

Eine Lotterie bestehe aus n Nummern; man soll e Wahrscheinlichkeit bestimmen, daß in i Ziehungen, enn jedes Mal r Nummern gezogen werden, alle Numern herauskommen werden.

Eulers Auflösung.

Es liegt in der Natur der Aufgabe, daß $i \geqq \frac{n}{r}$ yn muß, indem, für $i < \frac{n}{r}$, die gesuchte Probabilität = o ist.

Die Anzahl aller möglichen Fälle bei einer Ziehung t offenbar die Anzahl der Combinationen der n Nummern r, wie wir auch schon oben gesehen haben, also

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{1.2.3\ldots r} = \left[\frac{n}{r}\right].$$

ür i Ziehungen kann sich jeder einzelne Fall bei jeder ein-

ung mit jedem einzelnen Falle bei jeder andern
nbiniren, ſo daß alſo die Anzahl aller möglichen
Ziehungen $= \left[\frac{n}{r}\right]^i$ iſt.

n die Anzahl der günſtigen Fälle zu finden, be-
die einzelnen Nummern der Lotterie durch a,
e, ... ; ſo erhellet leicht, daß unter obiger
r Fälle auch die Fälle mit begriffen ſind, in
Nummer, z. B. a, fehlt, deren Anzahl offen-
zahl aller Fälle bei einer Lotterie mit n—1
für i Ziehungen iſt, d. i. nach dem Obigen =
Folglich iſt, da die Lotterie überhaupt n Num-
t, die Anzahl der Fälle, in denen keine Num-
$= \left[\frac{n}{r}\right]^i - n\left[\frac{n-1}{r}\right]^i$. Man überzeugt ſich
daß hierbei ein Fehler begangen worden, in-
viel abgezogen hat. Jeder Fall nämlich, wo
nern, z. B. a, b, fehlen, iſt doppelt, einmal
uf a, und einmal in Bezug auf b, abgezogen
er doch offenbar nur einmal abgezogen, und

wodurch man, nach einer ähnlichen Betrachtung, wie vorher

$$\left[\frac{n}{r}\right]^i - n\left[\frac{n-1}{r}\right]^i + \frac{n(n-1)}{1.2}\left[\frac{n-2}{r}\right]^i - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left[\frac{n-3}{r}\right]^i$$

hält.

Hierbei ist aber wieder jeder der Fälle, in denen vier Nummern, z. B. a, b, c, d, fehlen, vier Mal subtrahirt, in Bezug auf a, b, c, d; sechs Mal addirt, in Bezug auf ab, ac, ad, bc, bd, cd; vier Mal subtrahirt in Bezug auf abc, abd, acd, bcd; also überhaupt drei Mal subtrahirt worden, und muß folglich wieder einmal addirt werden, wodurch man erhält:

$$\left[\frac{n}{r}\right]^i - n\left[\frac{n-1}{r}\right]^i + \frac{n(n-1)}{1.2}\left[\frac{n-2}{r}\right]^i$$
$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left[\frac{n-3}{r}\right]^i + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\left[\frac{n-4}{r}\right]^i,$$

mit gehöriger Rücksicht auf die Combinationszahl der n Nummern zu vieren.

Man könnte auf diese Art weiter gehen. Um aber der Untersuchung die nöthige Allgemeinheit zu geben, setze man, daß man bis zu α fehlenden Nummern gegangen sey, und nenne die Anzahl aller Fälle, in denen keine Nummer fehlt,

$$\left[\frac{n}{r}\right]^i - n\left[\frac{n-1}{r}\right]^i + \frac{n(n-1)}{1.2}\left[\frac{n-2}{r}\right]^i$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left[\frac{n-3}{r}\right]^i$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\pm \frac{n(n-1)\ldots(n-\alpha+1)}{1.2.3\ldots\alpha}\left[\frac{n-\alpha}{r}\right]^i$$
$$\pm \text{ wenn } \alpha \left\{\begin{matrix}\text{gerade}\\ \text{ungerade}\end{matrix}\right\}$$

erhalten habe. Jeder Fall, wo $\alpha + 1$ Nummern fehlen, trit hierbei

1) subtrahirt bei einer fehlenden Nummer

$$(\alpha + 1)\text{mal};$$

2) addirt bei zwei fehlenden Nummern so oft, als sich $\alpha + 1$ Nummern zu zweien combiniren lassen, d. i.

$$\frac{(\alpha+1)\alpha}{1.2}\text{mal};$$

ſubtrahirt bei drei fehlenden Nummern ſ
$+ 1$ Elemente zu dreien combiniren laſſen,

$$\frac{(\alpha+1)\,\alpha(\alpha-1)}{1.2.3}\text{mal};$$

endlich addirt oder ſubtrahirt, jenachdem
ngerade iſt, bei α fehlenden Elementen ſo
$+ 1$ Elemente zu α combiniren laſſen, d. i

$$\frac{(\alpha+1)\alpha\,(\alpha-1)\,\ldots\,3.2}{1.2.3.4\,\ldots\,\alpha}\text{mal}.$$

ebraucht man, jenachdem addirt oder ſubtr
das Zeichen $+$ oder $-$; ſo iſt die Zahl, w
wo $\alpha + 1$ Nummern fehlen, addirt oder
n iſt,

$$= -\frac{\alpha+1}{1} + \frac{(\alpha+1)\alpha}{1.2} - \frac{(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)}{1.2.3} +$$

$$\ldots \pm \frac{(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)\,\ldots\,2}{1.2.3\,\ldots\,\alpha}$$

$$\pm \text{ wenn } \alpha \left\{\begin{matrix}\text{gerade}\\ \text{ungerade}\end{matrix}\right\}$$

$$= 1 - \left[\frac{\alpha+1}{1}\right] + \left[\frac{\alpha+1}{2}\right] - \left[\frac{\alpha+1}{3}\right] + \ldots$$

$$\pm \left[\frac{\alpha+1}{\alpha}\right] \mp 1 = \left\{\begin{matrix}0\\ \end{matrix}\right.$$

Da nun höchstens $n-r$ Nummern fehlen können, so ist der höchste Werth von $\alpha+1=n-r$, d. i. $\alpha=n-r-1$, welches, in obige Formel gesetzt, für die Anzahl aller möglichen Fälle, in denen keine Nummer fehlt, den Ausdruck

$$\left[\frac{n}{r}\right]^i - n\left[\frac{n-1}{r}\right]^i + \frac{n(n-1)}{1.2}\left[\frac{n-2}{r}\right]^i$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left[\frac{n-3}{r}\right]^i + \ldots \mp \frac{n(n-1)..(r+1)}{1.2\ldots(n-r)}\left[\frac{r}{r}\right]^i$$

giebt. Da nun $\left[\frac{r-1}{r}\right]$ an sich $=0$ ist; so kann man obige Größe

$$= \left[\frac{n}{r}\right]^i - n\left[\frac{n-1}{r}\right]^i + \frac{n(n-1)}{1.2}\left[\frac{n-2}{r}\right]^i$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left[\frac{n-3}{r}\right]^i + \ldots.$$

setzen, wenn nur die Reihe so weit fortgesetzt wird, bis sie von selbst abbricht. Unter derselben Voraussetzung ist also die gesuchte Probabilität

$$= \frac{1}{\left[\frac{n}{r}\right]^i}\left\{\left[\frac{n}{r}\right]^i - n\left[\frac{n-1}{r}\right]^i + \frac{n(n-1)}{1.2}\left[\frac{n-2}{r}\right]^i \right.$$
$$\left. - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left[\frac{n-3}{r}\right]^i + \ldots. \right\}$$

53. Aber allgemein

$$\frac{\left[\frac{n-\alpha}{r}\right]}{\left[\frac{n}{r}\right]} = \frac{(n-\alpha)(n-\alpha-1)..(n-\alpha-r+1)}{n(n-1)\ldots(n-r+1)}$$
$$= \frac{(n-\alpha)..(n-r+1)(n-r)\ldots(n-r-\alpha+1)}{n(n-1)..(n-\alpha+1)(n-\alpha)\ldots(n-r+1)}$$
$$= \frac{(n-r)..(n-\alpha+1)(n-\alpha)..(n-r-\alpha+1)}{n(n-1)..(n-r+1)(n-r)..(n-\alpha+1)}$$
$$= \frac{(n-r)(n-r-1)\ldots(n-r-\alpha+1)}{n(n-1)(n-2)..(n-\alpha+1)}$$

Also obige Probabilität, wenn man mit $\left[\frac{n}{r}\right]^i$ wirklich dividirt,

$$= 1 - \frac{\lfloor n-r \rfloor^i}{1.n^{i-1}} + \frac{\lfloor (n-r)(n-r-1) \rfloor^i}{1.2.\lfloor n(n-1) \rfloor^{i-1}}$$
$$- \frac{\lfloor (n-r)(n-r-1)(n-r-2) \rfloor^i}{1.2.3.\lfloor n(n-1)(n-2) \rfloor^{i-1}}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots$$

he abbricht. Bezeichnet man die Glieder dieſer
n zweiten an, durch A, B, C, D, E, ...;
Probabilität

$$\frac{1}{1}\cdot\frac{(n-r)^i}{n^{i-1}}+\frac{A}{2}\cdot\frac{(n-r-1)^i}{(n-1)^{i-1}}$$

$$\frac{B}{3}\cdot\frac{(n-r-2)^i}{(n-2)^{i-1}}+\frac{C}{4}\cdot\frac{(n-r-3)^i}{(n-3)^{i-1}}-\ldots$$

$$\frac{n}{1}\left\{\frac{n-r}{n}\right\}^i+\frac{(n-1)A}{2}\left\{\frac{n-r-1}{n-1}\right\}^i$$

$$\frac{(n-2)B}{3}\left\{\frac{n-r-2}{n-2}\right\}^i+\frac{(n-3)C}{4}\left\{\frac{n-r-3}{n-3}\right\}^i-\ldots$$

90, r = 5, i = 100 findet Euler obig
it = 0,7419, Trembley (Mém. de Berlin
p. 76.), der die Rechnung genauer geführ
,7410, alſo $> \frac{7}{10}$, d. i. um $\frac{2}{10}$ größer als $\frac{1}{2}$.

aplace's Auflöſung.

iplace hat dieſe Aufgabe nach einer Methode
welche in Fällen dieſer Art häufig mit großem
ewandt wird, und daher hier einer Erläuterung

men, und außerdem noch alle Fälle, in denen zwar 1, 2, 3, ... q—1, aber nicht mit q verbunden, vorkommen. Die Anzahl der letztern ist aber offenbar der Anzahl der Fälle gleich, in welchen bei einer Lotterie von n — 1 Nummern, die q nicht enthält, die Nummern 1, 2, 3, ... q—1 in i Ziehungen alle herauskommen; d. i. $= Z_{n-1,\,q-1}$. Es ist folglich

$$Z_{n,\,q-1} = Z_{n,\,q} + Z_{n-1,\,q-1},$$

woraus obige Gleichung augenblicklich folgt. Betrachtet man nun die Reihe

$$Z_{1,\,q-1},\ Z_{2,\,q-1},\ Z_{3,\,q-1},\ Z_{4,\,q-1},\ \ldots\ Z_{n,\,q-1},\ \ldots$$

so ist nach der in den Artikeln Arithmetische Reihen höherer Ordnungen und Differenzenrechnung angewandten Bezeichnung:

$$\begin{aligned}
Z_{2,\,q-1} - Z_{1,\,q-1} &= \Delta Z_{1,\,q-1},\\
Z_{3,\,q-1} - Z_{2,\,q-1} &= \Delta Z_{2,\,q-1},\\
Z_{4,\,q-1} - Z_{3,\,q-1} &= \Delta Z_{3,\,q-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\\
Z_{n,\,q-1} - Z_{n-1,\,q-1} &= \Delta Z_{n-1,\,q-1},\\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Folglich]

$$Z_{n,\,q} = \Delta Z_{n-1,\,q-1};$$

und, wenn man $q-1 = 1, 2, 3, 4, \ldots$ setzt:

$$\begin{aligned}
Z_{n,\,2} &= \Delta Z_{n-1,\,1},\\
Z_{n,\,3} &= \Delta Z_{n-1,\,2} = \Delta^2 Z_{n-2,\,1},\\
Z_{n,\,4} &= \Delta Z_{n-1,\,3} = \Delta^3 Z_{n-3,\,1},\\
Z_{n,\,5} &= \Delta Z_{n-1,\,4} = \Delta^4 Z_{n-4,\,1},\\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Also allgemein

$$Z_{n,\,q} = \Delta^{q-1} Z_{n-q+1,\,1}.$$

Im Allgemeinen bedeutet nun $Z_{n,\,i}$ die Anzahl aller Fälle, in welchen in i Ziehungen bei einer Lotterie von n Nummern die Nummer 1 herausgekommen ist. Die Anzahl dieser Fälle ist offenbar der Anzahl aller möglichen Fälle bei n Nummern und i Ziehungen gleich, weniger der Anzahl der Fälle, in welchen bei n Nummern und i Ziehungen die Nummer 1 fehlt, d. i. weniger der Anzahl aller möglichen Fälle bei n — 1 Nummern und i Ziehungen. Folglich, da jedes Mal r Nummern gezogen werden:

$z_{n,1} = \left[\frac{n}{r}\right]^i - \left[\frac{n-1}{r}\right]^i$,

hl aller möglichen Fälle bei n Nummern =
.). Alſo

$$\frac{-1)..(n-r+1)\}^i - \{(n-1)(n-2)..(n-r)\}^i}{\{1.2.3...r\}^i},$$

zug auf n als veränderlich (wie oben),

$$_1 = \frac{A.\{(n-1)(n-2)..(n-r)\}^i}{\{1.2.3...r\}^i},$$

h, $n-q+1$ für n geſetzt, nach dem Ver-

:

$$-1 \left\{\frac{A.\{(n-q)..(n-q-r+1)\}^i}{\{1.2.3...r\}^i}\right\}$$

$$\cdot\frac{\{(n-q)(n-q-1)..(n-q-r+1)\}^i}{\{1.2.3....r\}^i}.$$

zahl aller möglichen Fälle iſt, bei n Nummern
ngen,

$$= \frac{\{n(n-1)...(n-r+1)\}^i}{\{1.2.3...3\}^i} \quad (52.).$$

e Hauptreihe iſt; ſo iſt, wie aus dem Art. Arithmetiſche eihen höherer Ordnungen (2.) leicht geſchloſſen wird, ige qte Differenz

$$\begin{aligned}
&\left\{(s+q)(s+q-1)..(s-r+q+1)\right\}^i\\
&-\frac{q}{1}\left\{(s+q-1)(s+q-2)..(s-r+q)\right\}^i\\
&+\frac{q(q-1)}{1.2}\left\{(s+q-2)(s+q-3)..(s-r+q-1)\right\}^i\\
&-\frac{q(q-1)(q-2)}{1.2.3}\left\{(s+q-3)(s+q-4)..(s-r+q-2)\right\}^i\\
&\qquad\qquad\cdots\cdots\cdots\\
&\pm\frac{q(q-1)}{1.2}\left\{(s+2)(s+1)..(s-r+3)\right\}^i\\
&\mp\frac{q}{1}\left\{(s+1)s(s-1)..(s-r+2)\right\}^i\\
&\pm\left\{s(s-1)(s-2)..(s-r+1)\right\}^i,
\end{aligned}$$

obei nur zu bemerken iſt, daß die Reihe a. a. O. des angezogenen Artikels umgekehrt werden muß;

$$\begin{aligned}
&\left\{n(n-1)..(n-r+1)\right\}^i\\
&-\frac{q}{1}\left\{(n-1)(n-2)..(n-r)\right\}^i\\
&+\frac{q(q-1)}{1.2}\left\{(n-2)(n-3)..(n-r-1)\right\}^i\\
&\frac{q(q-1)(q-2)}{1.2.3}\left\{(n-3)(n-4)..(n-r-2)\right\}^i\\
&\qquad\qquad\cdots\cdots\cdots\\
&\mp\frac{q}{1}\left\{(n-q+1)(n-q)..(n-q-r+2)\right\}^i\\
&\pm\left\{(n-q)(n-q-1)..(n-q-r+1)\right\}^i
\end{aligned}$$

elches noch durch

$$\left|n(n-1)..(n-r+1)\right|^i$$

ividirt werden muß, um die Probabilität zu erhalten. Dadurch erhält man leicht für die Probabilität, daß in Ziehungen q Nummern herauskommen, folgenden Ausruck:

$$\left\{\frac{n-r}{n}\right\}^i$$

$$\frac{(q-1)}{1.2}\left\{\frac{(n-r)(n-r-1)}{n(n-1)}\right\}^i$$

$$\frac{(q-1)(q-2)}{1.2.3}\left\{\frac{(n-r)(n-r-1)(n-r-2)}{n(n-1)(n-2)}\right\}^i$$

. . . . . .

$$\left\{\frac{(n-r)(n-r-1)..(n-r-q+2)}{n(n-1)..(n-q+2)}\right\}^i$$

$$\frac{(n-r)(n-r-1)..(n-r-q+1)}{n(n-1)..(n-q+1)}\Big\}^i.$$

an hierin $q = n$; ſo erhält man leicht die
52. 53.) gefundenen Ausdrücke für die Proba-
in i Ziehungen alle n Nummern herauskom-
ſieht, daß Laplace's ſcharfſinnige Auf-
neiner iſt, als die von Euler gegebene.

place's großes Werk über die Wahrſcheinlich-
g iſt nicht bloß wichtig wegen der vielen ſchwie-
nerkwürdigen Aufgaben, deren Auflöſung es
dern auch wegen der vielen neuen analytiſchen

jener Reihe übereinstimmen. Vergleicht man überhaupt die Factoren

$$\left(\frac{n-m}{n}\right)^i \text{ und } \left(\frac{n-1}{n}\right)^{mi}$$

zweier gleichstelligen Glieder mit einander, und nimmt die Logarithmen; so erhält man

$$\log_n\left(\frac{n-m}{n}\right)^i = i\log_n\left(1-\frac{m}{n}\right)$$

$$= -\frac{mi}{n} - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{m^2i}{n^2} - \tfrac{1}{3}\cdot\frac{m^3i}{n^3} - \tfrac{1}{4}\cdot\frac{m^4i}{n^4} - \ldots,$$

$$\log_n\left(\frac{n-1}{n}\right)^{mi} = mi\log_n\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$$= -\frac{mi}{n} - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{mi}{n^2} - \tfrac{1}{3}\cdot\frac{mi}{n^3} - \tfrac{1}{4}\cdot\frac{mi}{n^4} - \ldots.$$

Die ersten Glieder dieser beiden Reihen stimmen mit einander überein. Ist also n eine sehr große Zahl, und man vernachlässigt die Glieder von der Ordnung $\frac{1}{n^2}$ an; so ist

$$\log\left(\frac{n-m}{n}\right)^i = \log_n\left(\frac{n-1}{n}\right)^{mi},$$

und folglich auch

$$\left(\frac{n-m}{n}\right)^i = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{mi}$$

näherungsweise. Der Unterschied wächst desto mehr, je größer m wird, wie aus dem Obigen erhellet. Wollte man nun z. B. die Anzahl von Ziehungen bestimmen, bei welchen für ein sehr großes n die obige Probabilität

$$\frac{\Delta^n \cdot s^i}{n^i} = \frac{1}{k}$$

wird; so setze man nach der so eben gedachten Nährungsmethode

$$\frac{1}{k} = \left\{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^i\right\}^n,$$

woraus man leicht erhält:

$$i = \frac{\log\left(1-\sqrt[n]{\frac{1}{k}}\right)}{\log(n-1)-\log n}.$$

Man nehme natürliche Logarithmen, und es sey

$$\sqrt[n]{\frac{1}{k}} = 1-s$$

n leicht

$$\frac{1}{n}\log n\,k = z + \tfrac{1}{2}z^2 + \ldots,$$

$\frac{1}{n}\log n\,k = y$:

$$y = z + \tfrac{1}{2}z^2 + \ldots$$

$= Ay + By^2 + \ldots$; so erhält man durch

t

$$y = Ay + (B + \tfrac{1}{2}A^2)y^2 + \ldots;$$

$$A = 1,\ B + \tfrac{1}{2}A^2 = 0,\ B = -\tfrac{1}{2};$$

$$y - \tfrac{1}{2}y^2 + \ldots = \frac{\log n\,k}{n} - \frac{(\log n\,k)^2}{2n^2} + \ldots$$

un bloß bis zu Gliedern von der Ordnung $\frac{1}{n^2}$;

n

$$z = \frac{\log n\,k}{n}\left\{1 - \frac{\log n\,k}{2n}\right\},$$

auch

$$1 - \sqrt[n]{\frac{1}{k}} = \frac{\log n\,k}{n}\left\{1 - \frac{\log n\,k}{2n}\right\},$$

$$\sqrt[n]{1}\ \ldots = \log n\,(\log n\,k) \ldots$$

$$= \frac{n\left\{\log n\, n - \log n(\log n\, k)\right\} + \frac{1}{2}\log n\, k}{1 + \frac{1}{2n}}$$

$$= \frac{n\left\{\log n\, n - \log n(\log n\, k)\right\}\left(1-\frac{1}{2n}\right)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n}\right)\log n\, k}{1 - \frac{1}{4n^2}}$$

$$n\left\{\log n\, n - \log n(\log n\, k)\right\}\left(1-\frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n}\right)\log n\, k,$$

r auch, wenn $\log n\, k$ klein, und n sehr groß ist,

$$i = n\left\{\log n\, n - \log n(\log n\, k)\right\}\left(1-\frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{2}\log n\, k.$$

r $n = 10000$, $k = 2$ findet Laplace nach einer an- n annähernden Formel, die sich hier nicht entwickeln t, die Anzahl der Ziehungen $= 95767{,}4$.

Für $r = 5$ ist die Probabilität nach dem Obigen

$$= 1 - \frac{n}{1}\left(\frac{n-5}{n}\right)^i + \frac{n(n-1)}{1.2}\left\{\frac{(n-5)(n-6)}{n(n-1)}\right\}^i - \ldots.$$

ese Reihe vergleicht Laplace mit

$$-\frac{n}{1}\left(\frac{n-5}{n}\right)^i + \frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{n-5}{n}\right)^{2i} - \ldots = \left\{1 - \left(\frac{n-5}{n}\right)^i\right\}^n.$$

e ersten Glieder beider Reihen stimmen überein. Man in daher näherungsweise die gesuchte Probabilität

$$= \left\{1 - \left(\frac{n-5}{n}\right)^i\right\}^n$$

en. Soll dieselbe $= \frac{1}{2}$ werden; so findet man aus der eichung

$$\left\{1 - \left(\frac{n-5}{n}\right)^i\right\}^n = \frac{1}{2}$$

rch bekannte arithmetische Methoden

$$i = \frac{\log\left(\frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{2}-1}\right)}{\log\left(\frac{n}{n-5}\right)}.$$

Für $n = 90$ findet Laplace aus einer andern ge- uern Formel $i = 85{,}53$, und nach der hier entwickelten ormel $i = 85{,}204$, wo der Unterschied also $= 0{,}326$ trägt. Werden also in jeder Ziehung 5 Nummern gezo- n, so kann man, da die Probabilität, daß alle 90 Num-

ommen, $= \frac{1}{2}$ ſeyn ſoll, etwas weniger als
Eins wetten, daß dies in 85, und etwas
s gegen Eins, daß dies in 86 Ziehungen ge-
ezug auf den erſtern genauern Werth von

Urne enthalte x Kugeln; man ſoll die Wahr-
finden, daß man, indem man in die Urn
eine gerade oder eine ungerade Anzahl K
werde.

hl der Verbindungen der gegebenen Kugeln z
echs, u. ſ. f. iſt (Combination 12.)

$$\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3.4}, \frac{x(x-1)\ldots(x-5)}{1.2.3\ldots6}, \ldots;$$

r Verbindungen zu eins, drei, fünf u. ſ. f.

$$\frac{(x-2)}{1.3}, \frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-4)}{1.2.3.4.5}; \ldots$$

nzahl aller möglichen Verbindungen der geg-

$$2^x = 2\left\{1 + \frac{x(x-1)}{1.2} + \frac{x..(x-3)}{1...4} + \frac{x..(x-5)}{1...6} + \ldots\right\},$$

$$2^x = 2\left\{\frac{x}{1} + \frac{x..(x-2)}{1.2.3} + \frac{x..(x-4)}{1.2..5} + \ldots\right\}.$$

Also die Probabilität, eine gerade Anzahl zu ergreifen,

$$= \frac{2^{x-1}-1}{2^x-1},$$

und die Probabilität, eine ungerade Anzahl zu ergreifen,

$$= \frac{2^{x-1}}{2^x-1}.$$

Die Summe beider Probabilitäten ist, wie es seyn muß, $= 1$. Auch ist klar, daß es wahrscheinlicher ist, eine ungerade, als eine gerade, Anzahl der Kugeln zu ergreifen. Es ist

$$2^{x-1} > 2^{x-1} - \tfrac{1}{2},\ 2^{x-1} > \tfrac{1}{2}\left\{2^x - 1\right\};$$

$$\frac{2^{x-1}}{2^x-1} > \tfrac{1}{2},\ \text{also}\ \frac{2^{x-1}-1}{2^x-1} < \tfrac{1}{2}.$$

Sey also $\frac{2^{x-1}}{2^x-1} = \frac{1}{2} + y$; so findet man leicht, wenn man aus dieser Gleichung y bestimmt,

$$\frac{2^{x-1}}{2^x-1} = \tfrac{1}{2} + \frac{1}{2(2^x-1)},\ \frac{2^{x-1}-1}{2^x-1} = \tfrac{1}{2} - \frac{1}{2(2^x-1)}.$$

Je größer x ist, desto kleiner wird der Bruch

$$\frac{1}{2(2^x-1)}.$$

Je größer also die Anzahl der Kugeln ist, desto mehr nähern sich die beiden Wahrscheinlichkeiten der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$. Je kleiner x ist, desto mehr nähert sich obiger Bruch dem Bruche $\frac{1}{2}$, also die Wahrscheinlichkeit, eine ungerade Anzahl zu greifen, der Gewißheit, die Wahrscheinlichkeit, eine gerade Anzahl zu greifen, dagegen der Null, d. i. der Unmöglichkeit. Für $x = 1$ wird erstere Wahrscheinlichkeit wirklich $= 1$, letztere $= 0$.

57. Ist x unbekannt, und bloß bestimmt, daß es nicht $> n$ sey, also selbst alle Werthe von 1 bis n haben kann; so ist jetzt die Anzahl aller möglichen Fälle nach (56.)

$$= (2-1) + (2^2-1) + (2^3-1) + (2^4-1) + \ldots + (2^n-1)$$
$$= 2^{n+1} - n - 2.$$

Wahrscheinlichkeit, eine ungerade Anzahl von greifen, nach (8.) und (56.)

$$\frac{+2^1+2^2+2^3+\ldots.+2^{n-1}}{2^{n+1}-n-2}=\frac{2^n-1}{2^{n+1}-n-2}.$$

ahrscheinlichkeit, eine gerade Anzahl Kugeln zu

$$\frac{(2^1-1)+(2^2-1)+..+(2^{n-1}-1)}{2^{n+1}-n-2}=\frac{2^n-n-1}{2^{n+1}-n-2}.$$

ahrscheinlichkeit ist wieder größer als letztere, und e beider, wie es seyn muß, $=1$.

ie Urne enthalte jetzt x weiße und eben so viele ugeln; man sucht die Wahrscheinlichkeit, bei irgend einer geraden Anzahl von Kugeln halb halb schwarze Kugeln zu ziehen.

engen der Fälle eine, zwei, drei, vier, u. s. f. jeder Farbe zu ziehen, sind nach dem Vorher- 56.)

$$\left[\frac{x}{1}\right],\ \left[\frac{x}{2}\right],\ \left[\frac{x}{3}\right],\ \left[\frac{x}{4}\right],\ \left[\frac{x}{5}\right],\ \ldots$$

e Anzahl von Kugeln gezogen werde. Folglich die ge-
te Probabilität

$$= \frac{\left[\frac{2x}{x}\right] - 1}{2^{2x-1} - 1}.$$

tzte man nicht voraus, daß immer eine gerade Anzahl
Kugeln gezogen, sondern ganz willkührlich in die Urne
riffen würde; so wäre die Anzahl aller Fälle $= 2^{2x} - 1$,
folglich unter dieser Voraussetzung die Wahrscheinlich-
, eine gleiche Anzahl weißer und schwarzer Kugeln zu
en,

$$= \frac{\left[\frac{2x}{x}\right] - 1}{2^{2x} - 1}.$$

ch ist

$$\left[\frac{2x}{x}\right] = \frac{2x(2x-1)\ldots(x+1)}{1.2.3\ldots x}$$
$$= \frac{2x(2x-1)..(x+1).x(x-1)\ldots 1}{1.2.3..x \cdot 1.2.3\ldots x}$$
$$= \frac{1.2.3.4\ldots 2x}{\{1.2.3\ldots x\}^2}.$$

lglich obige beide Probabilitäten

$$= \frac{\frac{1.2.3.4\ldots 2x}{\{1.2.3\ldots x\}^2} - 1}{2^{2x-1} - 1},$$

und $= \frac{\frac{1.2.3.4\ldots 2x}{\{1.2.3\ldots x\}^2} - 1}{2^{2x} - 1}.$

59. Nach dem Artikel Binomial-Coefficienten (16.)
immer

$$\left[\frac{2x}{x}\right] < 2^{2x}.\sqrt{\frac{1}{x\pi}}, \quad \left[\frac{2x}{x}\right] > 2^{2x}.\sqrt{\frac{2}{(2x+1)\pi}}.$$

as Verhältniß dieser Gränzen ist, wie man leicht findet,

$$= \sqrt{\frac{2x+1}{2x}},$$

d wird, wenn man $x+1$ für x setzt,

$$= \sqrt{\frac{2x+3}{2x+2}}.$$

ey nun

$\Gamma\frac{2x+1}{2x} = 1+\alpha, \Gamma\frac{2x+3}{2x+2} = 1+\alpha'.$

$= \frac{2x+2+1}{2x+2} = 1+\frac{1}{2x+2}, \quad \frac{2x+1}{2x} = 1+\frac{1}{2x}$

fenbar

$\frac{2x+3}{2x+2} < \frac{2x+1}{2x}, \quad \Gamma\frac{2x+3}{2x+2} < \Gamma\frac{2x+1}{2x}.$

:, und das Verhältniß obiger Gränzen kommt
erhältniſſe der Gleichheit deſto näher, je größ
alſo x ſehr groß, ſo kann man offenbar die
t

$$\frac{\left[\frac{2x}{x}\right]-1}{2^{2x-1}-1} = \frac{\left[\frac{2x}{x}\right]}{2^{2x-1}}$$

urch die Größe dieſes Bruchs nicht merklich g
. Denn ſey überhaupt

$$\frac{p-1}{q-1} = \frac{p}{q} + z; \text{ ſo iſt}$$

$$z = \frac{p-1}{q-1} - \frac{p}{q} = \frac{p-q}{q(q-1)},$$

ſehr kleiner Bruch, wenn q ſehr groß iſt

welches für die beiden ersten Ziehungen $(p+q)(p'+q')$ verschiedene Fälle giebt. Jeder dieser Fälle kann sich wieder mit jedem der $p''+q''$ bei der dritten Ziehung möglichen Fälle verbinden, welches für die drei ersten Ziehungen überhaupt $(p+q)(p'+q')(p''+q'')$ verschiedene Fälle giebt. Eben so erhält man für alle Ziehungen die Anzahl der möglichen Fälle

$$= (p+q)(p'+q')(p''+q'')(p'''+q''') \ldots .$$

Um nun die Anzahl der günstigen Fälle zu bestimmen, wollen wir zuerst die Anzahl der Fälle suchen, in welchen x weiße Kugeln aus den $x+x'$ Urnen gezogen werden können. Diese x weißen Kugeln sind offenbar aus x Urnen gezogen, und da sich jede der in der ersten dieser x Urnen enthaltenen weißen Kugeln mit jeder der in der zweiten dieser x Urnen enthaltenen weißen Kugeln, jede dieser Verbindungen zu zweien sich wieder mit jeder der in der dritten dieser x Urnen enthaltenen weißen Kugeln verbinden kann, u. s. f.; so giebt das Product der Zahlen, welche anzeigen, wie oft eine weiße Kugel in jeder dieser x Urnen enthalten ist, die Anzahl der möglichen Arten, aus den genannten x Urnen x weiße Kugeln zu ziehen. Da aber diese x Urnen ganz willkührlich sind; so erhellet, wenn man sich die $x+x'$ gegebenen Urnen auf alle mögliche Arten zu x (natürlich ohne Wiederholungen) combinirt denkt, daß man die Anzahl aller möglichen Arten, x weiße Kugeln aus den $x+x'$ Urnen zu ziehen, erhält, wenn man für die Elementenreihe

$$p, p', p'', p''', p'''', \ldots\ldots$$

die $x$te Klasse der Combinationen ohne Wiederholungen entwickelt, und jede Combination als ein Product der in ihr enthaltenen Elemente betrachtet. Das Aggregat dieser Combinationen, welches wir durch C bezeichnen wollen, ist dann die gesuchte Zahl.

Jede Art, aus x bestimmten Urnen x weiße Kugeln zu ziehen, kann sich nun aber mit jeder Art, aus den übrigen x' Urnen x' schwarze Kugeln zu ziehen verbinden, so daß man also die Anzahl aller Arten, aus den gegebenen $x+x'$ Urnen x weiße und x' schwarze Kugeln zu ziehen, erhält,

erhellet leicht, wie man auf dieſe Art weiter
Für $x+x'+x''+x'''$ Urnen mit p, q, r,
, s'; p'', q'', r'', s''; u. ſ. f. weißen, ſchwar
und gelben Kugeln, erhält man, wenn man
e Art wie vorher A und A' das Aggregat A''
Probabilität, x weiße, x' ſchwarze, x'' roth
lbe Kugeln aus den $x+x'+x''+x'''$ Urnen
wenn man aus jeder eine zieht,

$$\frac{A''}{(+r+s)(p'+q'+r'+s')(p''+q''+r''+s'')\ldots},$$

$p=p'=p''=\ldots$, $q=q'=q''=\ldots$
$r''=\ldots$, $s=s'=s''=\ldots$, iſt,

$$=\frac{1.2.3\ldots(x+x'+x''+x''')}{1\ldots x.1\ldots x'.1\ldots x''.1\ldots x'''}$$

$$\left(\frac{p}{p+q+r+s}\right)^{x}\cdot\left(\frac{q}{p+q+r+s}\right)^{x'}\cdot\left(\frac{r}{p+q+r+s}\right)^{x''}\cdot\left(\frac{s}{p+q+r+s}\right)^{x'''}\cdot$$

gaben leiten uns zu folgendem ſehr wichtigen
Wahrſcheinlichkeitsrechnung.

rſcheinlichkeit bei wiederholten

sch ist. Setzt man also p und p′ für die dortigen $\frac{p}{p+q}$ nd $\frac{q}{p+q}$; so erhält man die gesuchte Probabilität

$$= \frac{1.2.3....(x+x')}{1.2.3...x.1.2.3...x'} p^x p'^{x'}.$$

Eben so leicht erhellet, daß die allgemeinere Aufgabe: ie Probabilität zu bestimmen, daß bei mehrern Ereignissen, ren Probabilitäten p, p′, p″, p‴, ..., sind, so daß

$$p + p' + p'' + p''' + ... = 1$$

, in $x + x' + x'' + x''' + ...$ Versuchen das erste Ereigniß xmal, das zweite x′mal, das dritte x″mal eintreffe u. s. f. mit der in (63.) und (64.) aufgelösten allgemeinern Aufgabe identisch, und die gesuchte Probabilität glich

$$= \frac{1.2.3...(x+x'+x''+x'''+...)}{1...x.1...x'.1...x''.1...x'''....} p^x p'^{x'} p''^{x''} ....$$

66. Die Probabilität

$$\frac{1.2.3...(x+x')}{1...x.1...x'} p^x p'^{x'}$$

ird leicht auf folgenden Ausdruck gebracht:

$$\left[\frac{x+x'}{x'}\right] p^{x+x'-x'} p'^{x'},$$

elches das $(x'+1)$te Glied in der Entwickelung von $+p')^{x+x'}$ ist. Setzen wir nun $x+x'=\alpha$, so drücken e Glieder der Entwickelung von $(p+p')^{\alpha}$ nach der Reihe e Wahrscheinlichkeiten aus, daß in α Versuchen das in ede stehende Ereigniß, dessen Wahrscheinlichkeit $= p$ ist, mal und das entgegengesetzte kein Mal, $(\alpha-1)$mal und s entgegengesetzte ein Mal; $(\alpha-2)$mal und das entgegengesetzte zwei Mal eintreffe, u. s. f.

67. Soll das in Rede stehende Ereigniß in α Versuen wenigstens $(\alpha-\beta)$mal, wo natürlich $\beta < \alpha$ ist, treffen, so kann es αmal, $(\alpha-1)$mal, $(\alpha-2)$mal, ... $-\beta+1)$mal, $(\alpha-\beta)$mal eintreffen, und die Wahrscheinlichkeit, daß ein Fall von diesen statt finde, ist nach .) und dem Vorhergehenden

$$= p^{\alpha} + \frac{\alpha}{1} p^{\alpha-1} p' + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2} p^{\alpha-2} p'^{2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-\beta+1)}{1.2.3\ldots\beta} p^{\alpha-\beta} p'^{\beta}$$

$$p^{\alpha}\left\{1 + \frac{\alpha}{1}\cdot\frac{p'}{p} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2}\left(\frac{p'}{p}\right)^{2} + \ldots.\right.$$

$$\ldots. + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-\beta+1)}{1.2.3\ldots\beta}\left(\frac{p'}{p}\right)^{\beta}$$

$$p^{\alpha}\left(1+\frac{p'}{p}\right)^{\beta}\left\{1 + \frac{\alpha-\beta}{1}\cdot\frac{p'}{p+p'}\right.$$

$$+ \frac{(\alpha-\beta+1)(\alpha-\beta)}{1.2}\left(\frac{p'}{p+\right.$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-\beta)}{1.2.3\ldots\beta}($$

rmung der Reihen 19.) oder, da $p + p'$

$$= p^{\alpha-\beta}\left\{1 + \frac{\alpha-\beta}{1}p' + \frac{(\alpha-\beta+1)(\alpha-\beta)}{1.2}\right.$$

$$+ \frac{(\alpha-\beta+2)(\alpha-\beta+1)(\alpha-\beta)}{1.2.3}$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-\beta)}{1.2.3\ldots\beta}p^{\beta}$$

dessen Probabilität $= p$ ist, wenigstens γmal eintrifft, $= w$ wird; so muß man aus der Gleichung

$$w = p^\alpha + \frac{\alpha}{1}p^{\alpha-1}p' + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2}p^{\alpha-2}p'^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\gamma+1)}{1.2.3\ldots(\alpha-\gamma)}p^\gamma p'^{\alpha-\gamma}$$
$$= p^\gamma\left\{1 + \frac{\gamma}{1}(1-p) + \frac{(\gamma+1)\gamma}{1.2}(1-p)^2 + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots\gamma}{1.2.3\ldots(\alpha-\gamma)}(1-p)^{\alpha-\gamma}\right\}$$

wo p, p', γ, w bekannt sind, α bestimmen.

Für $\gamma = 1$ wird diese Gleichung

$$w = p^\alpha + \frac{\alpha}{1}p^{\alpha-1}p' + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2}p^{\alpha-2}p'^2 + \ldots.$$
$$\ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots2}{1.2.3\ldots(\alpha-1)}pp'^{\alpha-1}$$
$$= p\left\{1 + (1-p) + (1-p)^2 + (1-p)^3 + \ldots + (1-p)^{\alpha-1}\right\}$$
$$= p.\frac{(1-p)^\alpha - 1}{1-p-1} = 1 - (1-p)^\alpha \text{ (Geom. Reihe. 4.)}.$$

Also

$$(1-p)^\alpha = 1 - w,$$

woraus durch Logarithmen

$$\alpha = \frac{\log(1-w)}{\log(1-p)},$$

und, wenn man

$$1 - w = \frac{v}{v'},\ 1 - p = \frac{u}{u'}$$

setzt,

$$\alpha = \frac{\log v - \log v'}{\log u - \log u'} = \frac{\log v' - \log v}{\log u' - \log u}.$$

Sey z. B. die Anzahl der Würfe mit zwei Würfeln zu bestimmen, bei welcher es eben so wahrscheinlich ist, zwei Sechsen zu werfen, als nicht; so ist $w = \frac{1}{2}$, $1 - w = \frac{1}{2}$, $v = 1$, $v' = 2$, $p = \frac{1}{36}$, $1 - p = \frac{35}{36}$, $u = 35$, $u' = 36$; also

$$\alpha = \frac{\log 2}{\log 36 - \log 35} = 24{,}6.$$

Wirft man also nur 24 Mal, so ist es wahrscheinlicher, nicht zwei Sechsen zu werfen; wirft man aber 25 Mal, so ist es wahrscheinlicher zwei Sechsen zu werfen, als nicht.

Will man beſtimmen, wie oft bei α
gniß, deſſen Wahrſcheinlichkeit = p,
geſetzte Wahrſcheinlichkeit = p′ iſt,
ſten eintrifft; ſo muß man offenbar (6
lung von $(p + p')^\alpha$ das größte Glied a
$+ 1)$te Glied ſey =

$$\left[\frac{\alpha}{k}\right] p^{\alpha-k} p'^{k} = t .$$

hſt vorhergehende und nächſtfolgende Gl

$\left[\frac{\alpha}{k-1}\right] p^{\alpha-k+1} p'^{k-1} = {}'t$, $\left[\frac{\alpha}{k+1}\right] p^{\alpha-k-1} p'^{k+1} =$

wird ſich leicht überzeugen, daß

$${}'t = t . \frac{k}{\alpha-k+1} \cdot \frac{p}{1-p}, \quad t' = t . \frac{\alpha-k}{k+1} \cdot \frac{1-p}{p} ,$$

ten wir nun zuerſt den einfachſten
$- p = \frac{1}{2}$ iſt; ſo iſt

$${}'t = t . \frac{k}{\alpha-k+1}, \quad t' = t . \frac{\alpha-k}{k+1} .$$

elnen Glieder der Reihe ſeyen A, B, C,
rnach

lung von $(p + p')^{2\beta}$ bekanntlich $2\beta+1 = \beta+1+\beta$ Glieder hat; so ist t' in dieser Entwickelung das mittelste Glied

$$= \left[\frac{2\beta}{\beta}\right] p^{2\beta-\beta}\, p'^{\beta} = \left[\frac{2\beta}{\beta}\right] \cdot (\tfrac{1}{2})^{2\beta}$$

$$= \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\frac{1}{2}\alpha+1)}{1.2.3\ldots\frac{1}{2}\alpha} \cdot (\tfrac{1}{2})^{\alpha}.$$

Es ist also am wahrscheinlichsten, daß das Ereigniß, dessen Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ ist, in α Versuchen $2\beta-\beta = \beta = \frac{1}{2}\alpha$mal eintrifft, und die Wahrscheinlichkeit, daß dies wirklich geschehe, wird durch obigen Ausdruck dargestellt.

Ist α eine ungerade Zahl, $= 2\beta+1$; so hat man nach dem Obigen $k < \frac{1}{2}(2\beta+1-1)$, $< \beta$, so daß also die Glieder zunehmen bis $k = \beta-1$, $k+1 = \beta$, also wieder bis t'. Die folgenden Glieder sind

$$t'' = t' \cdot \frac{2\beta+1-\beta}{\beta+1} = t' \cdot \frac{\beta+1}{\beta+1},$$

$$t''' = t'' \cdot \frac{2\beta+1-(\beta+1)}{\beta+2} = t'' \cdot \frac{\beta}{\beta+2},$$

$$t'''' = t''' \cdot \frac{2\beta+1-(\beta+2)}{\beta+3} = t''' \cdot \frac{\beta-1}{\beta+3},$$

. . . . . .

und nehmen folglich von t'' an, welches $= t'$ ist, ab. Die größte Wahrscheinlichkeit ist also entweder t' oder t''. Da nun t' das $(\beta+1)$te, t'' das $(\beta+2)$te Glied ist, so ist die Wahrscheinlichkeit am größten, daß das Ereigniß entweder $2\beta+1-\beta = \beta+1$, oder $2\beta+1-(\beta+1) = \beta$mal eintrifft. Die Wahrscheinlichkeit selbst ist

$$= \left[\frac{2\beta+1}{\beta}\right] p^{2\beta+1-\beta}\, p'^{\beta} = \left[\frac{2\beta+1}{\beta}\right] \cdot (\tfrac{1}{2})^{\alpha}$$

$$= \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots\left(\frac{\alpha+1}{2}+1\right)}{1.2.3\ldots\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)} (\tfrac{1}{2})^{\alpha}.$$

Da $(p+p')^{2\beta+1}$ bekanntlich $2\beta+2 = \beta+1+1+\beta$ Glieder hat; so ist obige Wahrscheinlichkeit ebenfalls das mittelste Glied, wobei jedoch zu bemerken, daß hier zwei Mittelglieder vorkommen, die aber einander gleich sind.

In dem Falle, wo α eine gerade Zahl,
) nach dem Art. Binomial-Coefficienten (
n der Probabilität

$$2^{2\beta}\cdot\sqrt{\frac{2}{(2\beta+1)\pi}}\cdot(\tfrac{1}{2})^{2\beta},\quad 2^{2\beta}\cdot\sqrt{\frac{1}{2\beta\pi}}\cdot(\tfrac{1}{2})^{2\beta}$$

d. i. $\sqrt{\frac{2}{(\alpha+1)\pi}}$ und $\sqrt{\frac{2}{\alpha\pi}}$.

ſe Gränzen kommen einander offenbar deſt
er α iſt.

: $\alpha = 2\beta+1$ iſt die Probabilität

$$=\left[\frac{2\beta+1}{2\beta}\right]\cdot(\tfrac{1}{2})^{\alpha}=\frac{2\beta+1}{\beta+1}\cdot\left[\frac{2\beta}{\beta}\right]\cdot(\tfrac{1}{2})^{\alpha}.$$

) die Gränzen derſelben:

$$\frac{1}{1}\cdot 2^{2\beta}\cdot\sqrt{\frac{2}{(2\beta+1)\pi}}\cdot(\tfrac{1}{2})^{\alpha},\quad \frac{2\beta+1}{\beta+1}\cdot 2^{2\beta}\cdot\sqrt{\frac{2}{2\beta\pi}}\cdot$$

d. i. $\frac{2\beta+1}{\beta+1}\cdot\sqrt{\frac{2}{(2\beta+1)\pi}}\cdot\frac{1}{2},\quad \frac{2\beta+1}{\beta+1}\cdot\sqrt{\frac{2}{2\beta\pi}}\cdot\frac{1}{2}$;

oder $\frac{\alpha}{\alpha+1}\sqrt{\frac{2}{\alpha\pi}}$ und $\frac{\alpha}{\alpha+1}\sqrt{\frac{2}{(\alpha-1)\pi}}$.

Andere Nährungsausdrücke erhält man

so erhält man mittelst der gefundenen Formel

$$\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-\beta+1)$$

$$= \left\{\sqrt{2\pi}\cdot\frac{\alpha^{\alpha+\frac{1}{2}}}{e^{\alpha}}\cdot e^{\frac{1}{12\alpha}-\frac{1}{360\alpha^3}+\cdots}\right\}$$

$$: \left\{\sqrt{2\pi}\cdot\frac{(\alpha-\beta)^{\alpha-\beta+\frac{1}{2}}}{e^{\alpha-\beta}}\cdot e^{\frac{1}{12(\alpha-\beta)}-\frac{1}{360(\alpha-\beta)^3}+\cdots}\right\}$$

$$= \frac{\alpha^{\alpha+\frac{1}{2}}}{e^{\beta}\cdot(\alpha-\beta)^{\alpha-\beta+\frac{1}{2}}}\cdot e^{\frac{1}{12}\left\{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha-\beta}\right\}-\cdots}$$

Folglich der Binomial-Coefficient

$$\left[\frac{\alpha}{\beta}\right] = \frac{\alpha^{\alpha+\frac{1}{2}}}{e^{\beta}\cdot(\alpha-\beta)^{\alpha-\beta+\frac{1}{2}}}\cdot e^{\frac{1}{12}\left\{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha-\beta}\right\}-\cdots}$$

$$: \sqrt{2\pi}\cdot\frac{\beta^{\beta+\frac{1}{2}}}{e^{\beta}}\cdot e^{\frac{1}{12\beta}-\frac{1}{360\beta^3}+\cdots}$$

$$= \frac{\alpha^{\alpha+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}\cdot\beta^{\beta+\frac{1}{2}}\cdot(\alpha-\beta)^{\alpha-\beta+\frac{1}{2}}}\cdot e^{\frac{1}{12}\left\{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha-\beta}-\frac{1}{\beta}\right\}-\cdots}$$

ein Nährungsausdruck für jeden Binomial-Coefficienten, welchen man, wenn die Anzahl der Factoren sehr groß ist, mit Vortheil gebrauchen wird. Für $\alpha = 2\beta$ wird

$$\left[\frac{2\beta}{\beta}\right] = \frac{(2\beta)^{2\beta+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}\cdot\beta^{\beta+\frac{1}{2}}\cdot\beta^{\beta+\frac{1}{2}}}\cdot e^{\frac{1}{12}\left\{\frac{1}{2\beta}-\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\beta}\right\}-\cdots}$$

$$= \frac{2^{2\beta+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}\cdot\beta^{\frac{1}{2}}}\cdot e^{-\frac{1}{8\beta}-\cdots} = \frac{2^{2\beta}}{\sqrt{\beta\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{8\beta}-\cdots}$$

Für $\alpha = 2\beta+1$ wird

$$\left[\frac{2\beta+1}{\beta}\right] = \frac{(2\beta+1)^{2\beta+\frac{3}{2}}}{\sqrt{2\pi}\cdot\beta^{\beta+\frac{1}{2}}\cdot(\beta+1)^{\beta+\frac{3}{2}}}\cdot e^{\frac{1}{12}\left\{\frac{1}{2\beta+1}-\frac{1}{\beta+1}-\frac{1}{\beta}\right\}-\cdots}$$

Nährungsausdrücke für die obige Probabilität lassen sich hieraus nun leicht construiren.

72. Gehen wir nun zu dem allgemeinern Falle über, wenn die Wahrscheinlichkeit nicht $= \frac{1}{2}$ ist; so ist, wenn das größte Glied in der Entwickelung von $(p+p')^{\alpha}$ das

ſ, und = t geſetzt, übrigens ganz die vorige beibehalten wird, wie vorher (69.):

$= t.\frac{k}{\alpha-k+1}.\frac{p}{1-p}$, $t' = t.\frac{\alpha-k}{k+1}.\frac{1-p}{p}$.

da nach der Bedingung der Aufgabe $t > {}'t$, muß,

$> t.\frac{k}{\alpha-k+1}.\frac{p}{1-p}$, $t > t.\frac{\alpha-k}{k+1}.\frac{1-p}{p}$,

leicht findet:

$(\alpha+1)(1-p)$, $k > \alpha(1-p) - p$;

$\alpha(1-p)-p+1$, $k > \alpha(1-p)-p$,

die größte in $\alpha(1-p)-p+1$ enthaltene oder die ganze Zahl iſt, welche zunächſt $)-p$ iſt. Die vor dem t vorhergehenden, lgenden Glieder ſind

$${}'t = t.\frac{k}{\alpha-k+1}.\frac{p}{1-p},$$

$${}''t = {}'t.\frac{k-1}{\alpha-k+2}.\frac{p}{1-p},$$

$${}'''t = {}''t.\frac{k-2}{\alpha-k+3}.\frac{p}{1-p},$$

, t''', ... zwei abnehmende Reihen, also t das größte lied in der Entwickelung von $(p+p')^\alpha$.

73. Setzt man, da k die ganze Zahl ist, welche zuächst größer als $\alpha(1-p)-p$ ist,

$$k = \alpha(1-p) - p + \delta ;$$

o δ einen echten Bruch bezeichnet; so erhält man leicht

$$\frac{p}{1-p} = \frac{\alpha-k+\delta}{k-\delta+1} .$$

ie größer k und $\alpha - k$ sind, desto genauer ist, da < 1,

$$\frac{p}{1-p} = \frac{\alpha-k}{k} .$$

)a nun $\alpha-k$ und k die Exponenten von p und $p' = -p$ in dem durch t bezeichneten Gliede sind (69.); so hellet aus dem Vorhergehenden und aus (66.) leicht, aß bei einer sehr großen Anzahl von Versuchen zur Herorbringung eines Ereignisses oder seines entgegengesetzten ie wahrscheinlichste Verbindung dieser Ereignisse die ist, welcher jedes derselben seiner Probabilität proportional iederholt vorkommt.

74. Das $l$te Glied nach oder vor dem größten, d. h. as $(k+1\pm l)$te oder $(k+1+l)$te Glied, wenn man gehörig positiv und negativ nimmt, ist

$$= \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k-l+1)}{1.2.3\ldots(k+l)} p^{\alpha-k-l}(1-p)^{k+l}$$

$$= \frac{1.2.3\ldots\alpha}{1.2.3\ldots(k'-l).1.2.3\ldots(k+l)} p^{k'-l}(1-p)^{k+l} ,$$

ür $k+k' = \alpha$.

Eine Nährungsformel zur Berechnung dieses Gliedes rhält man auf folgende Art. Nach (71.) ist, wenn an sich die Potenz von e mit dem zusammengesetzten Exponenten entwickelt denkt:

$$1.2.3\ldots\alpha = \alpha^{\alpha+\frac{1}{2}} . e^{-\alpha} . \sqrt{2\pi} . \left\{1 + \frac{1}{12\alpha} + \ldots\right\} ,$$

$$\frac{1}{1.2.3..(k'-l)} = (k'-l)^{l-k'-\frac{1}{2}} . \frac{e^{k'-l}}{\sqrt{2\pi}} . \left\{1 - \frac{1}{12(k'-l)} - \ldots\right\} ,$$

$$\frac{1}{1.2.3..(k+l)} = (k+l)^{-l-k-\frac{1}{2}} . \frac{e^{k+l}}{\sqrt{2\pi}} . \left\{1 - \frac{1}{12(k+l)} - \ldots\right\} .$$

rboliſche Logarithmus von $(k'-1)^{l-k'-}$

$= (l-k'-\frac{1}{2})\left\{\log n\, k' + \log n\left(1-\frac{1}{k'}\right)\right\}$

$= (l-k'-\frac{1}{2})\left\{\log n\, k' - \frac{1}{k'} - \frac{l^2}{2k'^2} - \frac{l^3}{3k'^3} - \right.$

$= (l-k'-\frac{1}{2})\log n\, k' + l + \frac{l}{2k'} - \frac{l^2}{2k'} - \frac{l^3}{6k'^2}$

$+ \frac{l^2}{4k'}\cdot\frac{1}{k'} + \frac{l^2}{6k'}\cdot\frac{1}{k'^2} + \frac{1}{6}\left(\frac{l^2}{k'}\right)^3\cdot\frac{1}{k'^2} + \cdots$

$- \frac{1}{12}\left(\frac{l^2}{k'}\right)^2\cdot\frac{1}{k'} - \frac{1}{240}\left(\frac{l^2}{k'}\right)^2\cdot\frac{1}{k'^2} - \frac{1}{360}\left(\frac{l^2}{k'}\right)^3\cdot\frac{1}{k'}$

nan nun l im Verhältniß zu k′ nur klei
rſt l^2 mit k′ verglichen werden kann;
ungsweiſe hieraus

$$\log n\,(k'-1)^{l-k'-\frac{1}{2}}$$

$$-k'-\tfrac{1}{2})\log n\, k' + 1 + \frac{l}{2k'} - \frac{l^2}{2k'} - \frac{l^3}{6k'^2}$$

$$k'^{l-k'-\frac{1}{2}} + \log n\, e^{1+\frac{l}{2k'}-\frac{l^2}{2k'}-\frac{l^3}{6k'^2}},$$

ich

$$(k'-1)^{l-k'-\frac{1}{2}}$$

Aber $k + k' = \alpha$; also $k' < \alpha + 1$, und um so mehr $-\alpha\delta < \alpha + 1$, wenn $\alpha\delta < k'$ ist. Ist aber $\alpha\delta > k'$, ist, weil $\delta < 1$ ist, doch $\alpha\delta < \alpha$, $\alpha\delta - k' < \alpha$, $< \alpha + 1$. Folglich, ohne Rücksicht auf das Zeichen, immer $z < 1$. Ferner ist

$$1 - p = 1 - \frac{k' - z}{\alpha} = \frac{\alpha - k' + z}{\alpha} = \frac{k + z}{\alpha};$$

$$\text{also } p^{k'-1}(1-p)^{k+1} = \frac{(k'-z)^{k'-1}.(k+z)^{k+1}}{\alpha^{\alpha}}$$

$$= \frac{k'^{k'-1}.k^{k+1}}{\alpha^{\alpha}}\left(1 - \frac{z}{k'}\right)^{k'-1}.\left(1 + \frac{z}{k}\right)^{k+1}$$

$$= \frac{k'^{k'-1}.k^{k+1}}{\alpha^{\alpha}}\left\{1 - \frac{k'-1}{1}.\frac{z}{k'}\right\}\left\{1 + \frac{k+1}{1}.\frac{z}{k}\right\}$$

$$= \frac{k'^{k'-1}.k^{k+1}}{\alpha^{\alpha}}\left\{1 + \frac{(k+k')lz}{kk'}\right\} = \frac{k'^{k'-1}.k^{k+1}}{\alpha^{\alpha}}\left\{1 + \frac{\alpha lz}{kk'}\right\},$$

wenn man immer die z^2 enthaltenden Glieder vernachlässigt. Aus allem Vorhergehenden erhält man endlich

$$\frac{1.2.3....\alpha}{1.2.3..(k'-1).1.2.3..(k+1)} \cdot p^{k'-1}(1-p)^{k+1}$$

$$= \alpha^{\alpha+\frac{1}{2}}.e^{-\alpha}\sqrt{2\pi}.\left\{1 + \frac{1}{12\alpha}\right\}$$

$$\times e^{1 - \frac{l^2}{2k'}}.k^{1-k'-\frac{1}{2}}.\left\{1 + \frac{l}{2k'} - \frac{l^2}{6k'^2}\right\}$$

$$\times \frac{e^{k'-1}}{\sqrt{2\pi}}\left\{1 - \frac{1}{12(k'-1)}\right\}$$

$$\times e^{-1 - \frac{l^2}{2k}}.k^{-1-k-\frac{1}{2}}.\left\{1 - \frac{l}{2k} + \frac{l^2}{6k^2}\right\}$$

$$\times \frac{e^{k+1}}{\sqrt{2\pi}}\left\{1 - \frac{1}{12(k+1)}\right\}$$

$$\times \frac{k'^{k'-1}.k^{k+1}}{\alpha^{\alpha}}\left\{1 + \frac{\alpha lz}{kk'}\right\}.$$

Das Product der Factoren vor den Parentheſen iſt, wie man leicht findet,

$$= \frac{\sqrt{\alpha}.e^{-\frac{\alpha l^2}{2kk'}}}{\sqrt{\pi}.\sqrt{2kk'}}.$$

Das Product der eingeſchloſſenen Größen iſt, wenn man, mit Laplace, die Glieder $\frac{1}{12\alpha}$, $\frac{1}{12(k'-1)}$, $\frac{1}{12(k+1)}$ vernachläſſigt,

$$= 1 + \frac{1}{2k'} - \frac{1^3}{6k'^2} - \frac{1}{2k} + \frac{1^3}{6k^2} + \frac{\alpha l z}{kk'}$$

$$= 1 + \frac{\alpha l z}{kk'} + \frac{1(k-k')}{2kk'} - \frac{1^3}{6k'^2} + \frac{1^3}{6k^2},$$

mit Vernachläſſigung der übrigen Glied

$$\frac{1.2.3....\alpha}{.2.3..(k'-1).1.2.3..(k+1)} \cdot p^{k'-1}.(1-$$

$$\frac{-\frac{\alpha l^2}{2kk'}}{\pi \cdot \sqrt{2kk'}} \cdot \left\{1 + \frac{\alpha l z}{kk'} + \frac{1(k-k')}{2kk'} - \frac{1^3}{6k'^2} + \right.$$

Glied nach dem größten, und folglich
r dem größten

$$\frac{-\frac{\alpha l^2}{2kk'}}{\pi \cdot \sqrt{2kk'}} \cdot \left\{1 - \frac{\alpha l z}{kk1} - \frac{1(k-k')}{2kk'} + \frac{1^3}{6k'^2} - \right.$$

Summe dieſer beiden Glieder

$$= \frac{2\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{2kk'}} \cdot e^{-\frac{\alpha l^2}{2kk'}}.$$

ie Summe aller Glieder in der Entwicke

)a nun allgemein

$$\frac{\partial . me^{-nv^2}}{\partial v} = -2mnve^{-nv^2},$$

$$\frac{\partial^2 . me^{-nv^2}}{\partial v^2} = -2mne^{-nv^2} + 4mn^2v^2e^{-nv^2},$$

u. s. f. u. s. f.

; so erhellet, wenn man $n = \frac{a}{2kk'}$, $nv = \frac{al}{2kk'}$ setzt, ß die Differentialquotienten $\frac{\partial y}{\partial l}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial l^2}$, ... nur sehr klein)n können, und man also berechtigt ist,

$$\Sigma y = \int y \partial l - \tfrac{1}{2} y$$

setzen, das Integral von $l = o$ bis $l = l$ genommen. ies giebt

$$\Sigma^l_o y = \int^l_o y\partial l - \underset{(l=l)}{\tfrac{1}{2}y} + \underset{(l=o)}{\tfrac{1}{2}y}$$

$$= \int^l_o y\partial l - \tfrac{1}{2}y + \frac{\Gamma a}{\Gamma\pi \cdot \Gamma 2kk'}.$$

ezeichnet man das größte Glied durch Y; so erhält man s dem obigen allgemeinen Ausdruck für das lte Glied ch dem größten, indem man $l = o$ setzt,

$$Y = \frac{\Gamma a}{\Gamma\pi \cdot \Gamma 2kk'}.$$

ies giebt

$$\Sigma^l_o y = \int^l_o y\partial l - \tfrac{1}{2}y + Y.$$

ezeichnen wir die Summe der Glieder zwischen dem lten r und nach dem größten durch S; so ist nach dem Obigen

$$S = \Sigma^l_o y - Y; \text{ also } S = \int^l_o y\partial l - \tfrac{1}{2}y.$$

ie Summe des lten Gliedes vor und des lten Gliedes ch dem größten ist nach dem Obigen $= y$. Demnach, nn S′ die Summe der Glieder vom lten Gliede vor, bis m lten Gliede nach dem größten bezeichnet,

$$S' = S + y = \int^l_o y\partial l + \tfrac{1}{2}y.$$

etzt man nun

$$\frac{l\Gamma a}{\Gamma 2kk'} = t;$$

erhält man leicht

$$S' = \frac{2}{\Gamma\pi}\int e^{-t^2}\partial t + \frac{\Gamma a}{\Gamma\pi \cdot \Gamma 2kk'} \cdot e^{-t^2},$$

al zwiſchen den Gränzen $l = o$, $l = 1$, d. i.
$= t$, genommen.

em Obigen iſt $k' = \alpha p + z$, $k = \alpha - k'$
$- p) - z$, woraus leicht

$$\sqrt{2kk'} = \alpha\sqrt{2p(1-p) + \frac{2z}{\alpha}(1-p) - \frac{2z^2}{\alpha^2}}.$$

man leicht

$$\frac{\pm l}{\alpha} - p = \frac{\alpha p + z \pm l}{\alpha} - p$$

$$= \pm\frac{1}{\alpha} + \frac{z}{\alpha} = \pm\frac{t\sqrt{2kk'}}{\alpha\sqrt{\alpha}} + \frac{z}{\alpha}.$$

erſten Falle der zuſammengeſetzten Wahrſchein-
) wird durch die Formel

$$\frac{2}{\sqrt{\alpha}}\int e^{-t^2}\partial t + \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{2kk'}}\cdot e^{-t^2}$$

ſcheinlichkeit ausgedrückt, daß das Ereigniß,
che Wahrſcheinlichkeit $= p$ iſt, in α Verſuchen
ger als $(k' - 1)$mal, und nicht öfter als
al, eintrifft; oder die Wahrſcheinlichkeit, daß
ng zwiſchen dem Verhältniß der Anzahl der Wie-
n des Ereigniſſes, deſſen Wahrſcheinlichkeit $= p$

oder, wenn man diese Reihe in's Unendliche fortsetzt,

$$\int e^{-t^2}\partial t = -\frac{e^{-t^2}}{2t}\left\{1 - \frac{1}{2t^2} + \frac{1.3}{2^2 t^4} - \frac{1.3.5}{2^3 t^6} + \ldots\right\}.$$

Für $t = \infty$ verschwindet diese Reihe. Also ist zwischen den Gränzen $t = T$, $t = \infty$:

$$\int e^{-t^2}\partial t = \frac{e^{-T^2}}{2T}\left\{1 - \frac{1}{2T^2} + \frac{1.3}{2^2 T^4} - \frac{1.3.5}{2^3 T^6} + \ldots\right\}$$

$$= \frac{e^{-T^2}}{2T}\left\{1 - 1.q + 1.3.q^2 - 1.3.5.q^3 + \ldots\right\}$$

für $\frac{1}{2T^2} = q$. Verwandelt man die eingeschlossene Reihe in einen Kettenbruch (Kettenbruch. 60.), so wird zwischen obigen Gränzen

$$\int e^{-t^2}\partial t = \frac{e^{-T^2}}{2T} \cdot \cfrac{1}{1+\cfrac{q}{1+\cfrac{2q}{1+\cfrac{3q}{1+\cfrac{4q}{1+\ldots}}}}}.$$

Entwickelt man e^{-t^2} in eine Reihe; so erhält man

$$\int e^{-t^2}\partial t = t - \frac{1}{1}\cdot\frac{t^3}{3} + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{t^5}{5} - \frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{t^7}{7} + \ldots$$

eine für $t = o$ verschwindende Reihe. Also ist zwischen den Gränzen $t = o$, $t = T$:

$$\int e^{-t^2}\partial t = T - \frac{1}{1}\cdot\frac{T^3}{3} + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{T^5}{5} - \frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{T^7}{7} + \ldots.$$

Noch eine Reihe erhält man so. Es ist allgemein

$$\int e^{-t^2} t^{2\alpha}\partial t = \frac{e^{-t^2} t^{2\alpha+1}}{2\alpha+1} + \frac{2}{2\alpha+1}\int e^{-t^2} t^{2\alpha+2}\partial t,$$

wovon man sich ebenfalls leicht durch Differentiation überzeugen wird. Durch successive Anwendung dieser Formel erhält man, wenn die Reihe in's Unendliche fortgesetzt wird,

$$\int e^{-t^2}\partial t = e^{-t^2} t\left\{1 + \frac{2t^2}{1.3} + \frac{(2t^2)^2}{1.3.5} + \frac{(2t^2)^3}{1.3.5.7} + \ldots\right\};$$

folglich, zwischen den Gränzen $t = o$, $t = T$:

$$\int e^{-t^2}\partial t = e^{-T^2} T\left\{1 + \frac{2T^2}{1.3} + \frac{(2T^2)^2}{1.3.5} + \frac{(2T^2)^3}{1.3.5.7} + \ldots\right\}.$$

afel der Werthe dieſes Integrals und ſeiner Lo-
at Kramp in ſeiner Analyse des réfractions
ques. Leips. 1798. p. 193 — 210. geliefert.

ſo die Probabilität in (74.), wenn man die
t = T ſetzt,

$$\frac{2}{\sqrt{n}}\left\{\frac{1}{2}\sqrt{\pi} - \frac{e^{-T^2}}{2T}\cdot\cfrac{1}{1+\cfrac{q}{1+\cfrac{2q}{1+\cfrac{3q}{1+\cfrac{4q}{1+\cdots}}}}}\right\}$$

$$+\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{2kk'}}\cdot e^{-T^2}$$

$$1 - \frac{e^{-T^2}}{T\sqrt{\pi}}\cdot\cfrac{1}{1+\cfrac{q}{1+\cfrac{2q}{1+\cfrac{3q}{1+\cdots}}}}$$

$$+\frac{e^{-T^2}}{\sqrt{2\alpha\pi}\left\{p(1-p)+\frac{z}{\alpha}(1-2p)-\frac{z^2}{\alpha^2}\right\}},$$

$\frac{1}{\sqrt{\ }}$, $k' = \alpha p + z$, $z = k' - \alpha p$ iſt.

hkeit p dieses Ereignisses, gegebene Gränzen nicht über-
preitet, der Gewißheit beliebig nahe gebracht wird (Vergl.
4.). Wir sind bei dem Beweise dieses wichtigen, zuerst
on Jacob Bernoulli gefundenen, Theorems vor-
glich der Darstellung von Laplace gefolgt. Auch
Poivre hat sich mit diesem Gegenstande beschäftigt.

Berechnung der wahrscheinlichsten Resul-
te aus gegebenen Beobachtungen. Me-
thode der kleinsten Quadrate.

77. Wir beginnen diesen wichtigen Abschnitt, welcher
e Grundlage aller Anwendungen der Wahrscheinlichkeits-
chnung auf die Erscheinungen der Natur enthält, größerer
eutlichkeit wegen mit einem Beispiele. Der Gegenstand
ses Abschnitts ist nach unserer Ansicht nicht sowohl selbst
on eine Anwendung der Probabilitätenrechnung, son-
rn er liefert vielmehr eine Theorie der wichtigsten Anwen-
ngen derselben, und durfte daher, als unbedingt zur
eorie selbst gehörend, hier nicht fehlen.

Folgende, aus Bohnenbergers Astronomie. Tü-
ngen. 1811. S. 450. entlehnte, Tabelle enthält eine
bersicht der unter verschiedenen geographischen Breiten
obachteten Längen des Sexagesimalsecunden-Pendels.
ie Länge des Sexagesimalsecunden-Pendels zu Paris,
ch Bordas Bestimmung = 440,559 par. Linien, ist
derselben als Einheit angenommen.

Beobachter.	Ort.	Breite.	Pendellänge.
Bouguer.	Peru.	0°. 0′	0,99669
—	Portobello.	9. 34	0,99689
Le Gentil.	Pondichery.	11. 56	0,99710
Campbell.	Jamaika.	18. 0	0,99745
Bouguer.	Klein Goava.	18. 27	0,99728
La Caille.	Cap.	33. 55	0,99877
	Formentera.	38. 40	0,99908
Darquier.	Toulouse.	43. 36	0,99950
Liesganig.	Wien.	48. 13	0,99987
Bouguer.	Paris.	48. 50	1,00000
v. Zach.	Gotha.	50. 56	1,00006
Graham.	London.	51. 31	1,00018
Grischow.	Arensberg.	58. 15	1,00074
Mallet.	Petersburg.	59. 56	1,00101
Maupertuis.	Pello.	66. 48	1,00137
Mallet.	Ponoi.	67. 5	1,00148

ichtigſte Blick auf dieſe Tabelle zeigt, daß die
en vom Aequator nach den Polen hin wachſen.
Pendellängen von Jamaika und Klein Goava
von eine Ausnahme. Die Breiten ſind aber
wenig von einander verſchieden, daß dieſe Ab-
om Geſetze offenbar Folge der Beobachtungs-
da der von dem Breitenunterſchiede herrührende
der Pendellängen kleiner ſein kann als der
ngsfehler. Vergleicht man aber genauer die
der Pendellängen mit den Breiten, ſo bemerkt
bald, daß erſtere, vom Aequator angerechnet,
den Quadraten der Sinus der Breiten propor-
, welches Geſetz wir hier nur als ein Reſultat
eobachtungen anſehen wollen, da wir uns nu
die Beſtätigung, welche es durch die Theorie
tion elliptiſcher Sphäroide in der Mechanik er
dieſem Werke nicht einlaſſen können. Bezeich
lſo im Allgemeinen die der Breite L entſpre
ndellänge durch l, ſo wird das bemerkte Geſetz
urch folgende Formel dargeſtellt:

s obiger Gleichung ergiebt sich aber durch Multiplica- ı mit α^2 sogleich:

$$\alpha^2 l = \alpha^2 A + \alpha^2 B \sin L^2 ,$$

$l_1 = A_1 + B_1 \sin L^2$, so daß also die Gleichung

$$l = A + B \sin L^2$$

h für das Decimalsecunden-Pendel gilt. Neuere bachtungen der Länge des Decimalsecunden-Pendels, che wir im Folgenden gebrauchen werden, enthält fol- de Tafel (Biot Astronomie. Paris. 1810. T. III. d. p. 164.):

Beobachter.	Ort.	Breite.	Pendellänge in Metern.
go, Chaix, Biot.	Formentera.	38°.39'.46"	0,7412517
thieu, Biot.	Figeac.	44. 36. 45	0,7416243
thieu, Biot.	Bordeaux.	44. 50. 25	0,7416151
thieu, Biot.	Clermont.	46. 48. 4	0,7417157
ıvard, Mathieu, Biot.	Paris.	48. 50. 15	0,7419262
thieu, Biot.	Dunkerque.	51. 2. 8	0,7420865

Soll die Formel

$$l = A + B \sin L^2$$

ktisch brauchbar seyn, so kommt es vorzüglich auf die aue Bestimmung der Constanten A, B an. Man über- gt sich leicht, daß dazu zwei beobachtete Pendellängen reichen. Ist nämlich l' irgend eine andere Pendellänge, die entsprechende Breite, so hat man

$$l = A + B \sin L^2 , \quad l' = A + B \sin L'^2 ;$$
$$l - l' = B \{\sin L^2 - \sin L'^2\}$$
$$= B \{\sin L + \sin L'\} \{\sin L - \sin L'\}$$
$$= B \sin (L + L') \sin (L - L') ;$$
$$B = \frac{l - l'}{\sin (L + L') \sin (L - L')} ,$$
$$A = l - B \sin L^2 = l' - B \sin L'^2 ;$$

raus sich A, B bestimmen lassen. Gebraucht man zu ser Bestimmung die Pendellängen von Dünkirchen und rmentera aus obiger Tafel, so findet man

$$A = c^m, 7397310, \quad B = o^m, 00389622 ;$$

glich überhaupt die Pendellänge unter der Breite L =

[redacted]

eht also, daß nur der oben supponirte Fall zulässig ist, enn die aus den Beobachtungen abgeleiteten Resultate ıch nur einiges Zutrauen verdienen sollen. Wir verlassen tzt unser obiges Beispiel, jedoch in der Absicht, nachher ieder zu demselben zurückzukehren, und wenden uns nun der Aufsuchung einer allgemeinen Methode der Berech- ıng gegebener Beobachtungen, welche den oben an eine lche Methode gemachten Anforderungen entspricht.

78. Seyen daher überhaupt

$$X, X', X'', X''', X'''', \ldots.$$

ınctionen der unbekannten Größen $x, y, z, v, \ldots.$ ie Anzahl jener sey $= n$, die Anzahl dieser $= m$,) also nach der schon oben gemachten Voraussetzung im- er $n > m$ ist. Durch unmittelbare Beobachtungen seyen spective die Werthe

$$A, A', A'', A''', A'''' \ldots.$$

iger Functionen gefunden. Die Fehler der einzelnen eobachtungen seyen nach der Reihe

$$\begin{aligned} A - X &= \Delta, \\ A' - X' &= \Delta', \\ A'' - X'' &= \Delta'', \\ A''' - X''' &= \Delta''', \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

elche also ebenfalls Functionen von $x, y, z, v, \ldots$ sind.

Die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler bei der ersten eobachtung in der That Δ sey, ist offenbar eine Function ın Δ, und soll daher überhaupt durch $\varphi\Delta$ bezeichnet wer- ın. Setzen wir nun zuerst voraus, daß die Beobachtun- ın alle gleich gut sind, und folglich kein Grund vorhan- ın ist, die eine für mehr oder weniger genau zu halten als ne andere, so wird auch bei allen Beobachtungen die Wahrscheinlichkeit, gleich große Fehler zu begehen, gleich oß seyn, welches uns berechtigt, bei allen obigen Beobach- ıngen nach der Reihe die Wahrscheinlichkeiten, die Fehler ', Δ'', Δ''', Δ'''', ... zu begehen, durch dasselbe unctionszeichen zu bezeichnen. Es sind also

$$\varphi\Delta, \varphi\Delta', \varphi\Delta'', \varphi\Delta''', \varphi\Delta'''', \ldots.$$

ahrscheinlichkeiten, bei den obigen einzelnen
nach der Reihe die Fehler

$$\Delta, \Delta', \Delta'', \Delta''', \Delta'''', \ldots$$

ehen.

lglich ist die Wahrscheinlichkeit, daß die F
en Beobachtungen respective Δ, Δ', Δ
... sind, d. h. die Wahrscheinlichkeit, daß
bei den einzelnen Beobachtungen wirklich
, wenn wir diese Wahrscheinlichkeit dur
n, nach (9.) =

$$W = \varphi\Delta \cdot \varphi\Delta' \cdot \varphi\Delta'' \cdot \varphi\Delta''' \cdot \varphi\Delta'''' \ldots$$

n die Größen x, y, z, v, ... so bestim
n den Functionen

$$X, X', X'', X''', X'''', \ldots$$

en durch unmittelbare Beobachtung g
en

$$A, A', A'', A''', A'''', \ldots$$

en die Differenzen

$$\Delta, \Delta', \Delta'', \Delta''', \Delta'''', \ldots$$

$$\frac{1}{W}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right) = \frac{1}{\varphi\Delta}\left(\frac{\partial\varphi\Delta}{\partial x}\right) + \frac{1}{\varphi\Delta'}\left(\frac{\partial\varphi\Delta'}{\partial x}\right) + \frac{1}{\varphi\Delta''}\left(\frac{\partial\varphi\Delta''}{\partial x}\right) + \frac{1}{\varphi\Delta'''}\left(\frac{\partial\varphi\Delta'''}{\partial x}\right) + \ldots\ldots\ldots$$

olglich, wenn man

$$\frac{\partial\varphi\Delta}{\varphi\Delta} = \varphi'\Delta.\partial\Delta$$

ßt, zugleich in Bezug auf die übrigen partiellen Differenalquotienten von W, wie leicht erhellen wird:

$$\left(\frac{\partial\Delta}{\partial x}\right)\varphi'\Delta + \left(\frac{\partial\Delta'}{\partial x}\right)\varphi'\Delta' + \left(\frac{\partial\Delta''}{\partial x}\right)\varphi'\Delta'' + \ldots\ldots = 0$$

$$\left(\frac{\partial\Delta}{\partial y}\right)\varphi'\Delta + \left(\frac{\partial\Delta'}{\partial y}\right)\varphi'\Delta' + \left(\frac{\partial\Delta'}{\partial y}\right)\varphi'\Delta'' + \ldots\ldots = 0$$

$$\left(\frac{\partial\Delta}{\partial z}\right)\varphi'\Delta + \left(\frac{\partial\Delta'}{\partial z}\right)\varphi'\Delta' + \left(\frac{\partial\Delta'}{\partial z}\right)\varphi'\Delta'' + \ldots\ldots = 0$$

$$\left(\frac{\partial\Delta}{\partial v}\right)\varphi'\Delta + \left(\frac{\partial\Delta'}{\partial v}\right)\varphi'\Delta' + \left(\frac{\partial\Delta''}{\partial v}\right)\varphi'\Delta'' + \ldots\ldots = 0$$

u. ſ. f. u. ſ. f.

›o es nun vorzüglich auf die Beſtimmung der Form der ›unction φ', und ſomit auch der Function φ ankommt, ›ozu man auf folgende Weiſe gelangt.

Nach einem längſt bekannten Grundſatze erhält man, ›enn eine Größe aus mehrern gleich guten Beobach›ngen zu beſtimmen iſt, den wahrſcheinlichſten Werth erſelben, indem man das arithmetiſche Mittel aller ſich us den Beobachtungen ergebenden Werthe nimmt, wozu ie Annahme berechtigt, daß offenbar die bei den Beobach›ngen begangenen Fehler bald poſitiv, bald negativ ſeyn ›erden, ſo daß alſo dieſe Fehler, wenn man nach dem obi›en Grundſatze verfährt, ſich gegenſeitig aufheben oder ›mpenſiren werden. Wollte man annehmen, daß die Feh›r immer nur mit demſelben Zeichen behaftet wären, ſo ›ürden ſich einige Beobachtungen offenbar zu weit von der Wahrheit entfernen, und die Beobachtungen würden alſo

den Namen gleich guter Beobachtunge
och bei Anwendung des obigen Princips i
eſetzt werden muß. Zugleich iſt klar, daß
uf eine deſto größere Wahrſcheinlichkeit wir
en können, je größer die Anzahl der zum
n Beobachtungen iſt, ſo daß alſo auch hier n
ültigung der Beobachtungen als unbeding
ß zur Erreichung möglichſter Genauigkeit
obiges Princip geſtützt, gelangt man nun a
ſe zur Beſtimmung der Form der Function
al

$$X = X' = X'' = X''' = X'''' = \ldots = x,$$

nach obigem Grundſatze, wenn wir den
en Werth von x durch p bezeichnen,

$$p = \frac{1}{n}\left(A + A' + A'' + A''' + A'''' + \ldots\right)$$

ben die Anzahl der in der Parentheſe eing
en $= n$ geſetzt worden iſt. Alſo ſind die
en Werthe der Fehler Δ, Δ', Δ'', Δ''',
Reihe:

so ist

$$\begin{aligned} & A + A' + A'' + A''' + A'''' + \ldots \\ &= A + (n-1)(A-nB) \\ &= nA - n(n-1)B , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{n}\left(A + A' + A'' + A''' + A'''' + \ldots\right) \\ &= A - (n-1)B . \end{aligned}$$

Folglich

$$\begin{aligned} A \;\; - p &= A \qquad - A + (n-1)B = (n-1)B \\ A' \; - p &= A - nB - A + (n-1)B = -B \\ A'' \; - p &= A - nB - A + (n-1)B = -B \\ A''' - p &= A - nB - A + (n-1)B = -B \end{aligned}$$

u. s. f. u. s. f.

Also nach dem Obigen

$$\varphi'(n-1)B + \varphi'(-B) + \varphi'(-B) + \varphi'(-B) + \ldots = 0 ,$$

d. i., da die Anzahl der Größen A', A'', A''', u. s. f. $= n-1$ ist:

$$\begin{aligned} & \varphi'(n-1)B + (n-1)\varphi'(-B) = 0 , \\ & \varphi'(1-n)(-B) - (1-n)\varphi'(-B) = 0 , \\ & \varphi'(1-n)(-B) = (1-n)\varphi'(-B) . \end{aligned}$$

Folglich, wenn man auf beiden Seiten mit $(1-n)(-B)$ dividirt:

$$\frac{\varphi'(1-n)(-B)}{(1-n)(-B)} = \frac{\varphi'(-B)}{(-B)} .$$

Diese Relation gilt offenbar für jedes B, und jedes ganze positive n. Setzen wir also überhaupt $-B = \Theta$, so hat man für jedes ganze positive n und jedes Θ:

$$\frac{\varphi'(1-n)\Theta}{(1-n)\Theta} = \frac{\varphi'\Theta}{\Theta} .$$

Für $n = 2$ erhält man

$$\frac{\varphi'(-\Theta)}{(-\Theta)} = \frac{\varphi'\Theta}{\Theta} .$$

Also

$$\frac{\varphi'(1-n)\Theta}{(1-n)\Theta} = \frac{\varphi'(n-1)\Theta}{(n-1)\Theta} ,$$

und daher, wenn wir $n-1 = \mu$ setzen, für jedes ganze positive μ:

$$\frac{\varphi'\mu\Theta}{\mu\Theta} = \frac{\varphi'\Theta}{\Theta} ,$$

ıs, wenn man, welches offenbar verſtat
Θ, und alſo $\frac{\Theta}{\mu}$ für Θ ſchreibt, ſogleich f
ür jedes ganze poſitive μ:

$$\frac{\varphi'\Theta}{\Theta} = \frac{\varphi'\frac{\Theta}{\mu}}{\frac{\Theta}{\mu}}$$

nuß. Bezeichnet nun $\frac{\mu}{\nu}$ irgend einen poſiti
hiernach:

$$\frac{\varphi'\left(\pm\frac{\mu}{\nu}\right)\Theta}{\left(\pm\frac{\mu}{\nu}\Theta\right)} = \frac{\varphi'\frac{\mu}{\nu}(\pm\Theta)}{\frac{\mu}{\nu}(\pm\Theta)} = \frac{\varphi'\mu\left(\pm\frac{\Theta}{\nu}\right)}{\mu\left(\pm\frac{\Theta}{\nu}\right)}$$

$$= \frac{\varphi'\left(\pm\frac{\Theta}{\nu}\right)}{\left(\pm\frac{\Theta}{\nu}\right)} = \frac{\varphi'(\pm\Theta)}{(\pm\Theta)} = \frac{\varphi'\Theta}{\Theta},$$

ß alſo für jeden poſitiven oder negativen

$$\varphi'\frac{\mu}{\nu}\Theta$$

d. i. $\log n \varphi\Theta = \frac{1}{2}k\Theta^2 + \text{Const}$, oder, für Const $=$ $\log n\, k'$:

$$\begin{aligned}\log n\, \varphi\Theta &= \tfrac{1}{2}k\Theta^2 + \log n\, k' \\ &= \log n\, e^{\frac{1}{2}k\Theta^2} + \log n\, k' \\ &= \log n\,(k' e^{\frac{1}{2}k\Theta^2}) .\end{aligned}$$

Also

$$\varphi\Theta = k' e^{\frac{1}{2}k\Theta^2} .$$

Also auch

$$\varphi\Delta = k' e^{\frac{1}{2}k\Delta^2} .$$

79. Setzen wir nun nach und nach Δ, Δ', Δ'', Δ''', ... für Θ, und multipliciren die einzelnen Functionen in einander, so wird nach dem Obigen

$$\begin{aligned}W &= \varphi\Delta . \varphi\Delta' . \varphi\Delta'' . \varphi\Delta''' \ldots . \\ &= k'^n . e^{\frac{1}{2}k(\Delta^2 + \Delta'^2 + \Delta''^2 + \Delta'''^2 + \ldots)} .\end{aligned}$$

Wäre k positiv, so würde, da

$$\Delta^2 + \Delta'^2 + \Delta''^2 + \Delta'''^2 + \ldots .$$

immer positiv ist, offenbar W mit

$$\Delta^2 + \Delta'^2 + \Delta''^2 + \Delta'''^2 + \ldots$$

in's Unendliche zu- und abnehmen, also gar kein Maximum statt finden können, wobei nur zu bemerken, daß $e > 1$ ist. Also muß k negativ seyn, und man ist folglich berechtigt, $k = -2h^2$ zu setzen, so daß also

$$\varphi\Delta = k' e^{-h^2\Delta^2} ,$$

wo es nun noch vorzüglich auf die Bestimmung der Constante k' ankommt. Zu dem Ende wollen wir zunächst die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen suchen, daß der Fehler überhaupt zwischen den Gränzen δ und δ' enthalten ist. Zu dem Ende denke man sich das Intervall $\delta' - \delta$ in n gleiche Intervalle getheilt, deren jedes $= i$, und nehme an, daß in jedem dieser kleinen Intervalle für alle Punkte desselben die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler in einen dieser Punkte falle, gleich groß sey, welches offenbar mit desto größerem Rechte verstattet ist, je kleiner die einzelnen durch i bezeichneten Intervalle sind. Die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler δ sey, ist überhaupt $= \varphi\delta$, und eben so die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler $\delta + i$,

$\delta + 3i, \ldots\ldots \delta + ni = \delta'$ ſey, $=$
$2i), \varphi(\delta + 3i), \ldots \varphi(\delta + ni)$. Da n
n Intervalle die Wahrſcheinlichkeit als g
nmen wird, ſo iſt nach dem Taylor'ſche
hrſcheinlichkeit im 1ten, 2ten, 3ten, ...
nach der Reihe:

$$\varphi(\delta + i) = \varphi\delta + \frac{\partial\varphi\delta}{\partial\delta}\cdot\frac{i}{1} + \frac{\partial^2\varphi\delta}{\partial\delta^2}\cdot\frac{i^2}{1.2} + \ldots$$

$$\varphi(\delta + 2i) = \varphi\delta + \frac{\partial\varphi\delta}{\partial\delta}\cdot\frac{2i}{1} + \frac{\partial^2\varphi\delta}{\partial\delta^2}\cdot\frac{2^2i^2}{1.2} + \ldots$$

$$\varphi(\delta + 3i) = \varphi\delta + \frac{\partial\varphi\delta}{\partial\delta}\cdot\frac{3i}{1} + \frac{\partial^2\varphi\delta}{\partial\delta^2}\cdot\frac{3^2i^2}{1.2} + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi(\delta + ni) = \varphi\delta + \frac{\partial\varphi\delta}{\partial\delta}\cdot\frac{ni}{1} + \frac{\partial^2\varphi\delta}{\partial\delta^2}\cdot\frac{n^2i^2}{1.2} + \ldots$$

ir haben hier nämlich die Wahrſcheinlichkeit
den Intervalls für die in dem ganzen entſp
alle herrſchende Wahrſcheinlichkeit genomm
heinlichkeiten, daß der Fehler überhaupt i
te, ... nte Intervall falle, ſind, da jedes
. nach dem in (8.) bewieſenen Satze von d

$$= \varphi\delta.ni + \frac{\partial\varphi\delta}{\partial\delta}\cdot\frac{i^2}{1}(1+2+3+..+n)$$
$$+ \frac{\partial^2\varphi\delta}{\partial\delta^2}\cdot\frac{i^3}{1.2}(1^2+2^2+3^2+..+n^2)$$
$$+ \frac{\partial^3\varphi\delta}{\partial\delta^3}\cdot\frac{i^4}{1.2.3}(1^3+2^3+3^3+..+n^3)$$
$$+ \ldots\ldots$$

d. i., wenn man nach dem Art. Potenz. (39.) die dort gefundenen Summen der Potenzen substituirt, wobei hier nur alle Coefficienten, auf deren Werth es weiter nicht ankommt, durch (.) bezeichnet werden,

$$= \varphi\delta.ni + \frac{\partial\varphi\delta}{\partial\delta}\cdot\frac{i^2}{1}\left\{\tfrac{1}{3}n^2+(.)n\right\}$$
$$+ \frac{\partial^2\varphi\delta}{\partial\delta^2}\cdot\frac{i^3}{1.2}\left\{\tfrac{1}{4}n^3+(.)n^2+(.)n\right\}$$
$$+ \frac{\partial^3\varphi\delta}{\partial\delta^3}\cdot\frac{i^3}{1.2.3}\left\{\tfrac{1}{5}n^4+(.)n^3+(.)n^2+(.)n\right\}$$
$$+ \ldots\ldots$$

$$= \varphi\delta.ni + \frac{\partial\varphi\delta}{\partial\delta}\left\{\tfrac{1}{2}(ni)^2+(.)ni.i\right\}\cdot\frac{1}{1}$$
$$+ \frac{\partial^2\varphi\delta}{\partial\delta^2}\left\{\tfrac{1}{3}(ni)^3+(.)(ni)^2.i+(.)ni.i^2\right\}\cdot\frac{1}{1.2}$$
$$+ \frac{\partial^3\varphi\delta}{\partial\delta^3}\left\{\tfrac{1}{4}(ni)^4+(.)(ni)^3.i+..+(.)ni.i^3\right\}\cdot\frac{1}{1.2.3}$$
$$+ \ldots\ldots$$

also, wenn wir

$$ni = \delta' - \delta = \alpha$$

setzen,

$$= \varphi\delta.\alpha + \frac{\partial\varphi\delta}{\partial\delta}\left\{\tfrac{1}{2}\alpha^2+(.)\alpha i\right\}\cdot\frac{1}{1}$$
$$+ \frac{\partial^2\varphi\delta}{\partial\delta^2}\left\{\tfrac{1}{3}\alpha^3+(.)\alpha^2 i+(.)\alpha i^2\right\}\cdot\frac{1}{1.2}$$
$$+ \frac{\partial^3\varphi\delta}{\partial\delta^3}\left\{\tfrac{1}{4}\alpha^4+(.)\alpha^3 i+(.)\alpha^2 i^2+(.)\alpha i^3\right\}\cdot\frac{1}{1.2.3}$$
$$+ \ldots\ldots$$

und demnach, wenn I überhaupt eine Function von i bezeichnet, welche für $i = o$ verschwindet, obige Wahrscheinlichkeit

$$= \varphi\delta.\alpha + \frac{\partial\varphi\delta}{\partial\delta}\cdot\frac{\alpha^2}{1.2} + \frac{\partial^2\varphi\delta}{\partial\delta^2}\cdot\frac{\alpha^3}{1.2.3} + \ldots. + I.$$

Je kleiner i ist, desto mehr nähert sich dieser Ausdruck unbedingter Richtigkeit. Um selbige aber wirklich zu errei-

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\Theta} = \varphi\Theta,\quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial\Theta^2} = \frac{\partial\varphi\Theta}{\partial\Theta},\quad \frac{\partial^3\Phi}{\partial\Theta^3} =$$

wenn man

$$\delta' = \Theta + (\delta' - \Theta)$$

ſetzt, nach dem Taylor'ſchen Lehrſatze

$$\Phi_{(\Theta=\delta')} = \Phi + \frac{\partial\Phi}{\partial\Theta}\cdot\frac{\delta'-\Theta}{1} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\Theta^2}\cdot\frac{(\delta'-$$

$$= \Phi + \varphi\Theta\cdot\frac{\delta'-\Theta}{1} + \frac{\partial\varphi\Theta}{\partial\Theta}\cdot\frac{(\delta'-$$

$$\Phi_{(\Theta=\delta')} - \Phi = \varphi\Theta\cdot\frac{\delta'-\Theta}{1} + \frac{\partial\varphi\Theta}{\partial\Theta}\cdot\frac{(\delta'-$$

wenn man jetzt δ für Θ ſetzt:

$$\Phi_{(\Theta=\delta')} - \Phi_{(\Theta=\delta)} = \varphi\delta\cdot\frac{\delta'-\delta}{1} + \frac{\partial\varphi\delta}{\partial\delta}\cdot\frac{(\delta'-$$

un aber

$$\Phi = \int\varphi\Theta\cdot\partial\Theta$$

ſt nach der gewöhnlichen Bezeichnu

ntegrale:

$$\int_{\delta}^{\delta'}\varphi\Theta\cdot\partial\Theta = \Phi_{(\Theta=\delta')} - \Phi_{(\Theta=\delta)}$$

emnach die Wahrſcheinlichkeit, daß

n Gränzen δ und δ' liegt.

Nach den gewöhnlichen Begriffen der Integralrechnung hließt man hier ganz kurz so. Die Wahrscheinlichkeit, aß der Fehler in das unendlich kleine Intervall $\partial\Delta$ fällt, t nach (8.) $= \varphi\Delta.\partial\Delta$. Folglich die Wahrscheinlichkeit, aß der Fehler zwischen den Gränzen o und δ' enthalten ist,

$$= \int \varphi\Delta.\partial\Delta$$

as Integral so bestimmt, daß es für $\Delta = o$ verschwinet, und dann $\Delta = \delta'$ gesetzt, woraus denn weiter leicht olgt, daß die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler zwischen en Gränzen δ und δ' enthalten ist, durch das obige beimmte Integral ausgedrückt wird. Obige Darstellung hien mir jedoch den Vorzug der größern Strenge und Deutlichkeit zu haben, wenn sie sich auch nicht eben so sehr urch Kürze empfiehlt. Sie würde sich auch leicht ganz llgemein machen lassen. Die große Wichtigkeit des Gegenandes mag diese Weitläufigkeit, mit der vielleicht Einigen :dient ist, entschuldigen.

Also ist nach dem Obigen die Wahrscheinlichkeit, daß :r Fehler zwischen den Gränzen δ und δ' liegt,

$$= k' \int_{\delta}^{\delta'} e^{-h^2\Delta^2} \partial\Delta .$$

;n (75.) haben wir aber gefunden:

$$\int_{o}^{\infty} e^{-\Delta^2} \partial\Delta = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} .$$

Folglich auch nach bekannten Sätzen der Integralechnung

$$\int_{-\infty}^{o} e^{-\Delta^2} \partial\Delta = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} ;$$

lso

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\Delta^2} \partial\Delta = \sqrt{\pi} .$$

ür $h\Delta = \Delta_1$ ist

$$\int e^{-h^2\Delta^2} \partial\Delta = \int \frac{e^{-\Delta_1^2}\partial\Delta_1}{h} = \frac{1}{h}\int e^{-\Delta_1^2}\partial\Delta_1 .$$

Ist $\Delta = \infty$, so ist auch $\Delta_1 = \infty$. Also

$$-h^2\Delta^2\,\partial\Delta = \frac{1}{h}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\Delta_1^2}\,\partial\Delta_1 = \frac{\gamma\pi}{h},$$

die Wahrſcheinlichkeit, daß der Fehler zwiſchen $-\infty$ und $+\infty$ liegt, nach dem Obigen

$$= k'\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2\Delta^2}\,\partial\Delta = \frac{k'\gamma\pi}{h}.$$

ſcheinlichkeit iſt aber offenbar Gewißheit, in- ler nothwendig zwiſchen den Gränzen $-\infty$ egen muß, d. i. $= 1$. Alſo

$$1 = \frac{k'\gamma\pi}{h},\quad k' = \frac{h}{\gamma\pi};$$

endlich:

$$\varphi\Delta = \frac{h}{\gamma\pi} e^{-h^2\Delta^2},$$

$$n\,\gamma^{-\frac{1}{2}n}\, e^{-h^2(\Delta^2+\Delta'^2+\Delta''^2+\Delta'''^2+\ldots)}.$$

Obigen müſſen x, y, z, v, ... ſo beſtimmt ß W ein Maximum wird. Dem Maximum richt aber offenbar das Minimum von

$$\Delta^2 + \Delta'^2 + \Delta''^2 + \Delta'''^2 + \ldots$$

so erhält man für die Fehler (s. 78.) leicht folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\Delta &= A - \alpha + bx + cy + dz + ev + \ldots. \\
\Delta' &= A' - \alpha' + b'x + c'y + d'z + e'v + \ldots. \\
\Delta'' &= A'' - \alpha'' + b''x + c''y + d''z + e''v + \ldots. \\
\Delta''' &= A''' - \alpha''' + b'''x + c'''y + d'''z + e'''v + \ldots.
\end{aligned}$$

u. s. f. u. s. f.

oder, wenn wir

$A - \alpha = a$, $A' - \alpha' = a'$, $A'' - \alpha'' = a''$, $A''' - \alpha''' = a'''$ . . .

setzen:

$$\begin{aligned}
\Delta &= a + bx + cy + dz + ev + \ldots. \\
\Delta' &= a' + b'x + c'y + d'z + e'v + \ldots. \\
\Delta'' &= a'' + b''x + c''y + d''z + e''v + \ldots. \\
\Delta''' &= a''' + b'''x + c'''y + d'''z + e'''v + \ldots.
\end{aligned}$$

u. s. f. u. s. f.

Es muß aber

$$\Delta^2 + \Delta'^2 + \Delta''^2 + \Delta'''^2 + \ldots.$$

ein Minimum, und folglich

$$2\Delta\left(\frac{\partial\Delta}{\partial x}\right) + 2\Delta'\left(\frac{\partial\Delta'}{\partial x}\right) + 2\Delta''\left(\frac{\partial\Delta''}{\partial x}\right) + \ldots. = 0,$$

$$\Delta\left(\frac{\partial\Delta}{\partial x}\right) + \Delta\left(\frac{\partial\Delta'}{\partial x}\right) + \Delta'\left(\frac{\partial\Delta''}{\partial x}\right) + \Delta''\left(\frac{\partial\Delta'''}{\partial x}\right) + \ldots = 0$$

synn, wo die eingeschlossenen Differentialquotienten wieder partielle Differentiale sind. Aber

$$\left(\frac{\partial\Delta}{\partial x}\right) = b, \quad \left(\frac{\partial\Delta'}{\partial x}\right) = b', \quad \left(\frac{\partial\Delta''}{\partial x}\right) = b'', \ldots.$$

Also

$$b\Delta + b'\Delta' + b''\Delta'' + b'''\Delta''' + \ldots. = 0.$$

Verfährt man in Bezug auf die übrigen unbekannten Größen eben so, so erhält man:

$$\begin{aligned}
b\Delta + b'\Delta' + b''\Delta'' + b'''\Delta''' + \ldots. &= 0 \\
c\Delta + c'\Delta' + c''\Delta'' + c'''\Delta''' + \ldots. &= 0 \\
d\Delta + d'\Delta' + d''\Delta'' + d'''\Delta''' + \ldots. &= 0 \\
e\Delta + e'\Delta' + e''\Delta'' + e'''\Delta''' + \ldots. &= 0
\end{aligned}$$

u. s. f. u. s. f.

Nen so viele Gleichungen des ersten Grades als unbekannte Größen, welche also aus derselben durch Elimination nach bekannten algebraischen Methoden gefunden werden kön-

Setzt man in der erſten Gleichung für
gen Ausdrücke, ſo erhält man

$$
\begin{aligned}
& b\,(a + bx + cy + dz + ev + \ldots \\
+\ & b'\,(a' + b'x + c'y + d'z + e'v + \ldots \\
+\ & b''\,(a'' + b''x + c''y + d''z + e''v + \ldots \\
+\ & b'''\,(a''' + b'''x + c'''y + d'''z + e'''v + \ldots \\
+\ & \ldots\ldots \\
+\ & ab + a'b' + a''b'' + a'''b''' + \ldots \\
+\ & (bb + b'b' + b''b'' + b'''b''' + \ldots)x \\
+\ & (bc + b'c' + b''c'' + b'''c''' + \ldots)y \\
+\ & (bd + b'd' + b''d'' + b'''d''' + \ldots)z \\
+\ & \ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

ach einer leicht zu verſtehenden abkürzende
mittelſt des Summenzeichens $\int$, zugleich
übrigen obigen Gleichungen, die ſich natü
die erſte behandeln laſſen:

$$
\begin{aligned}
\int ab + x\int bb + y\int bc + z\int bd + \ldots &= o \\
\int ac + x\int bc + y\int cc + z\int cd + \ldots &= o \\
\int ad + x\int bd + y\int cd + z\int dd + \ldots &= o \\
\int ae + x\int be + y\int ce + z\int de + \ldots &= o
\end{aligned}
$$

u. ſ. f. u. ſ. f.

Bildet man nun die durch $\int$ bezeichneten Summen, so erhält man folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} -\ 88 + 27x + 6y &= 0 \\ -\ 70 + 6x + 15y + z &= 0 \\ -\ 107 + y + 54z &= 0 . \end{aligned}$$

Aus diesen drei Gleichungen findet man durch Elimination die wahrscheinlichsten Werthe:

$$x = 2{,}470 ; \ y = 3{,}551 ; \ z = 1{,}916 .$$

81. Kehren wir nun wieder zu dem obigen Beispiel vom Pendel (77.) zurück. Sey das Dortige

$$l = X, \ A = x, \ B = y ;$$

also die gegebene Gleichung:

$$X = x + y \sin L^2 .$$

Die zweiten a. a. O. mitgetheilten sechs Beobachtungen geben die durch Beobachtung gefundenen Werthe:

$$\begin{aligned} A &= 0{,}7412517 \\ A' &= 0{,}7416243 \\ A'' &= 0{,}7416151 \\ A''' &= 0{,}7417157 \\ A^{IV} &= 0{,}7419262 \\ A^{V} &= 0{,}7420865 . \end{aligned}$$

Folglich sind, wenn man die Sinus der entsprechenden Breiten gehörig substituirt:

$$\begin{aligned} \Delta &= 0{,}7412517 - x - 0{,}3903417 . y \\ \Delta' &= 0{,}7416243 - x - 0{,}4942370 . y \\ \Delta'' &= 0{,}7416151 - x - 0{,}4972122 . y \\ \Delta''' &= 0{,}7417157 - x - 0{,}5136117 . y \\ \Delta^{IV} &= 0{,}7419262 - x - 0{,}5667721 . y \\ \Delta^{V} &= 0{,}7420865 - x - 0{,}6045628 . y . \end{aligned}$$

Wendet man nun auf diese Gleichungen die obige allgemeine Methode an, so erhält man folgende zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} -\ 4{,}4502195 + 6x + 3{,}0657375 . y &= 0 \\ -\ 2{,}27397288 + 3{,}0657375 . x + 1{,}59339312 . y &= 0 . \end{aligned}$$

Also, wenn man mit 6 dividirt:

$$\begin{aligned} -\ 0{,}74170325 + x + 0{,}51095625 . y &= 0 \\ -\ 0{,}37899548 + 0{,}51095625 . x + 0{,}26556552 . y &= 0 . \end{aligned}$$

Bestimmt man nun aus diesen beiden Gleichungen nach be-

Methoden der Algebra x, y; ſo erhält man, da
.) Alles in Metern ausgedrückt iſt:

$$x = A = 0^m,739703526$$
$$y = B = 0^m,003913689 ;$$

en

$$l = A + B \sin L^2 ,$$

des Decimalſecunden-Pendels unter der Breite L;

$$l = 0^m,739703526 + 0^m,003913689 . \sin L^2 ,$$

Länge des Decimalſecunden-Pendels unter dem
, B der Unterſchied zwiſchen dieſer Pendellänge
Pendellänge unter dem Pol. Wir haben dieſes
Beiſpiel aus Biot Traité d'Astronomie phys.
164 — 169. entlehnt. Die Rechnungen ſind
thieu gemacht, hier aber noch mehr den oben
en allgemeinen Formeln gemäß zu führen ge-
den.

rſten in (77.) mitgetheilten Beobachtungen, mit
e der Pendellänge von Formentera, hat Puiſ.
raité de Géodésie. T. II. p. 341.) berechnet.

Ist also $h\delta = h'\delta'$, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß i den ersten Beobachtungen der Fehler zwischen die Gren- n $-\delta$, $+\delta$, bei den zweiten zwischen die Grenzen $-\delta'$, $+\delta'$ falle, gleich groß. Ist also bei den erſten eobachtungen für eine gewiſſe Wahrscheinlichkeit das In- rvall, in welchem der Fehler liegt, $-\delta$, $+\delta$, oder r Fehler ſelbſt $= \delta$, entweder poſitiv oder negativ ge- ommen, ſo iſt bei den zweiten Beobachtungen für dieſelbe Wahrſcheinlichkeit der Fehler $= \delta' = \frac{h\delta}{h'}$. Setzen wir un

$$h : h' = 1 : n, \quad h' = nh;$$

$$\text{ſo iſt } \delta' = \frac{h\delta}{nh} = \frac{1}{n}\delta, \quad \delta = n\delta',$$

ıd es kann alſo bei den erſten Beobachtungen eben ſo leicht - i. mit derſelben Wahrſcheinlichkeit) ein nfacher Fehler angen werden, wie bei den zweiten ein einfacher. Man lt daher nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauche den eiten Beobachtungen eine nfache Genauigkeit oder Prä- ion, einen nfachen Werth, ein nfaches Gewicht bei, er es verhalten ſich überhaupt rückſichtlich der Güte, des Werths oder Gewichts die erſten Beobachtungen zu den eiten $= 1 : n = h : h'$, ſo daß alſo überhaupt durch h' der verhältnißmäßige Werth, die verhältnißmäßige äciſion der Beobachtungen dargeſtellt wird. Man nennt her die Größe h ſelbſt die Präciſion, den Werth er das Gewicht der entſprechenden Beobachtungen.

83. Das in (79.) entwickelte Princip ſetzt alle in Rech- ung zu nehmenden Beobachtungen als gleich gut voraus. aben aber die Beobachtungen ungleiches Gewicht, ſo yen, wie gewöhnlich,

$$\Delta, \Delta, \Delta', \Delta'', \Delta''', \ldots.$$

ie Fehler, und

$$h, h', h'', h''', h'''', \ldots.$$

ie reſpectiven Gewichte der gegebenen Beobachtungen. nter der Vorausſetzung, daß alle Beobachtungen mit glei- er Genauigkeit gemacht wären, ſetze man das Gewicht $= 1$, und bezeichne die Fehler der Beobachtungen nach er Reihe durch

$$\Delta_1, \Delta'_1, \Delta''_1, \Delta'''_1, \ldots;$$

llet, weil sich offenbar die Fehler umgeke
yte verhalten, augenblicklich die Richtigk
Proportionen und Gleichungen:

$$1 : h = \Delta : \Delta_1; \quad \Delta_1 = h\Delta$$
$$1 : h' = \Delta' : \Delta'_1; \quad \Delta'_1 = h'\Delta'$$
$$1 : h'' = \Delta'' : \Delta''_1; \quad \Delta''_1 = h''\Delta''$$
$$1 : \Delta''' = \Delta''' : \Delta'''_1; \quad \Delta'''_1 = h'''\Delta'''$$

u. ſ. f. u. ſ. f.

n nach dem Princip der kleinſten Quadra
ten Größen ſo beſtimmt werden müſſen,

$$\Delta_1^2 + \Delta'^2_1 + \Delta''^2_1 + \Delta'''^2_1 + \ldots$$

inimum wird, ſo muß auch jetzt dieſe B
genommen werden, daß

$$(h\Delta)^2 + (h'\Delta')^2 + (h''\Delta'')^2 + (h'''\Delta''')^2 + \ldots$$

inimum wird. Es iſt alſo hiermit vorlieg
en erſten Fall zurückgeführt, indem man
hler ſelbſt die mit den reſpectiven Gewicht

$$\begin{array}{llll} ah\ , & bh\ , & ch\ , & dh\ , \ldots. \\ a'h\ , & b'h'\ , & c'h'\ , & d'h'\ , \ldots. \\ a''h''\ , & b''h''\ , & c''h''\ , & d''h''\ , \ldots. \\ a'''h'''\ , & b'''h'''\ , & c'''h'''\ , & d'''h'''\ , \ldots, \end{array}$$

u. s. f. u. s. f.

ıtt der dortigen

$$\begin{array}{llll} a\ , & b\ , & c\ , & d\ , \ldots. \\ a'\ , & b'\ , & c'\ , & d'\ , \ldots. \\ a''\ , & b''\ , & c''\ , & d''\ , \ldots. \\ a'''\ , & b'''\ , & c'''\ , & d'''\ , \ldots. \end{array}$$

u. s. f. u. s. f.

ıfetzt werden.

84. Das Vorhergehende bezieht sich auf Gleichungen es ersten Grades, oder sogenannte lineare Gleichungen. Es läßt sich aber jeder andere Fall auf diesen zurückführen. Da nämlich die Anzahl der unbekannten Größen $= m$, die Anzahl der gegebenen Gleichungen $= n$, und $n > m$ ist, so berechne man mittelst der gewöhnlichen Eliminationsmethoden aus m der gegebenen Gleichungen die genäherten Werthe

$$x_1\ ,\ y_1\ ,\ z_1\ ,\ v_1\ ,\ \ldots.$$

für m unbekannten Größen, setze nun

$$x = x_1 + x'\ ,\ y = y_1 + y'\ ,\ z = z_1 + z'\ ,\ v = v_1 + v'\ ,\ \ldots.$$

und führe diese Ausdrücke in die gegebenen Gleichungen für $x, y, z, v, \ldots.$ ein. Da nun bei Beobachtungen welche im Allgemeinen den Namen guter Beobachtungen verdienen, bei denen nämlich nicht augenscheinliche Fehler vorgefallen sind — und solche dürfen ja überhaupt nur in Rechnung genommen werden, wenn das Resultat brauchbar seyn soll — offenbar $x', y', z', v', \ldots$ immer nur sehr klein seyn werden, so kann man alle die erste übersteigenden Dimensionen dieser Unterschiede vernachlässigen, wodurch die gegebenen Gleichungen sogleich auf den Fall linearer Gleichungen zurückgeführt werden.

85. Nach diesen Bemerkungen kehren wir zu dem ersten Falle, wo die gegebenen Gleichungen linear, und die Gewichte der Beobachtungen nicht von einander verschieden sind, wieder zurück. Vorzüglich ist nun noch die Bestim-

ıg der relativen Gewichte der durch die obi
ındenen Werthe der einzelnen unbekannt
ig. Wir gehen dabei von einer nähern
Function

$$\Delta^2 + \Delta'^2 + \Delta''^2 + \Delta'''^2 + \ldots,$$

che im Folgenden immer durch V bezeichnet
, schicken jedoch noch folgenden allgemeine
Functionen voraus.

Wenn die Function

$$F = f(x, y, z, \ldots) - \varphi(x, y, z, \ldots)$$

einer der in ihr enthaltenen veränderliche
B. x, unabhängig ist, so erhält man den v
gigen Ausdruck dieser Function, wenn man
ichung

$$\varphi(x, y, z, \ldots) = 0$$

immt, und den erhaltenen Ausdruck für x
ene Function setzt.

Da die gegebene Function von x unabhän
ssen alle mit x behafteten Glieder sich gegens
, und es muß also allgemein

er nach dem Obigen

$$\varphi(x, y, z, \ldots) = 0;$$

o

$$F = f(y, z, \ldots) - \varphi'(y, z, \ldots)$$

schon oben gefundene von x befrei'te Ausdruck der nction F.

86. Setzen wir nun

$$\Delta^2 + \Delta'^2 + \Delta''^2 + \Delta'''^2 + \ldots = V,$$

d (vergl. 80.)

$$P = b\Delta + b'\Delta' + b''\Delta'' + b'''\Delta''' + \ldots$$
$$Q = c\Delta + c'\Delta' + c''\Delta'' + c'''\Delta''' + \ldots$$
$$R = d\Delta + d'\Delta' + d''\Delta'' + d'''\Delta''' + \ldots$$
$$S = e\Delta + e'\Delta' + e''\Delta'' + e'''\Delta''' + \ldots$$

u. s. f. u. s. f.

bei immer

$$\Delta = a + bx + cy + dz + ev + \ldots,$$
$$\Delta' = a' + b'x + c'y + d'z + e'v + \ldots.$$
$$\Delta'' = a'' + b''x + c''y + d''z + e''v + \ldots.$$
$$\Delta''' = a''' + b'''x + c'''y + d'''z + e'''v + \ldots.$$

u. s. f. u. s. f.

Differentiirt man V nach x, so wird

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = 2\Delta\left(\frac{\partial \Delta}{\partial x}\right) + 2\Delta'\left(\frac{\partial \Delta'}{\partial x}\right) + 2\Delta''\left(\frac{\partial \Delta''}{\partial x}\right) + \ldots$$

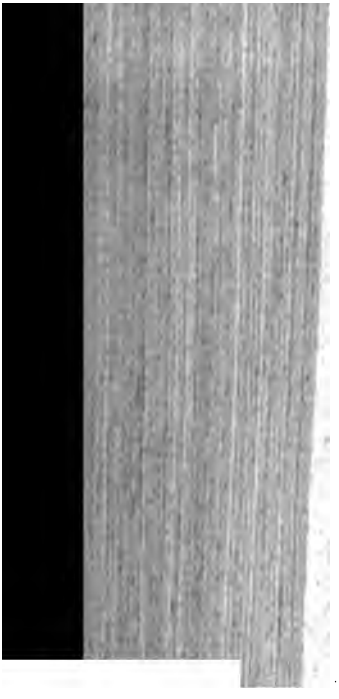
$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \Delta\left(\frac{\partial \Delta}{\partial x}\right) + \Delta'\left(\frac{\partial \Delta'}{\partial x}\right) + \Delta''\left(\frac{\partial \Delta''}{\partial x}\right) + \ldots$$

$$\begin{aligned} = {} & (a + bx + cy + dz + ev + \ldots).b \\ & + (a' + b'x + c'y + d'z + e'v + \ldots).b' \\ & + (a'' + b''x + c''y + d''z + e''v + \ldots).b'' \\ & + (a''' + b'''x + c'''y + d'''z + e'''y + \ldots).b''' \\ & + \ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = {} & ab + a'b' + a''b'' + a'''b''' + \ldots. \\ & + (bb + b'b' + b''b'' + b'''b''' + \ldots.)x \\ & + (bc + b'c' + b''c'' + b'''c''' + \ldots.)y \\ & + (bd + b'd' + b''d'' + b'''d''' + \ldots.)z \\ & + \ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

an kann folglich

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \lambda + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta v + \ldots$$



$$\left(\frac{\partial}{\partial}\right.$$

$$= 2\Omega \cdot$$

woraus die Beha
ſich auch aus der

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \Delta$$

unmittelbar, daß

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = 1$$

d. i. daß

$$\tfrac{1}{2}\left($$

$$\tfrac{1}{2}\left($$

$$\tfrac{1}{2}\left($$

$$\tfrac{1}{2}\left($$

estimmt, und den gefundenen Ausdruck für x setzt (85.). Nach dieser Substitution wird, wegen $\Omega = o$,

$$V' = V ,$$

o daß also V', eben so wie V, eine Summe von Quadraen ist, die aber von x unabhängig ist. Auch ist klar, daß n den Größen, aus deren Quadraten V' besteht, alle unekannte Größen nur in der ersten Dimension vorkommen, ben so wie in V. Also ist ganz wie vorher

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V'}{\partial y}\right) = \lambda' + \beta' y + \gamma' z + \delta' v + \ldots = \Omega ;$$

' ist, wie vorher α, positiv, und

$$V' - \frac{\Omega'^2}{\beta'} = V'' ,$$

elches nach dem Obigen natürlich kein x mehr enthält, auch von y unabhängig. Man erhält daher wieder den on y befrei'ten Ausdruck von V'', wenn man y aus der leichung

$$\Omega' = o$$

stimmt, und den gefundenen Werth substituirt, wodurch man

$$V'' = V'$$

hält, so daß also V'' wieder eine Function von ganz ähnher Beschaffenheit wie V' und V ist, auf welche sich also ieder ganz dieselben Schlüsse wie vorher anwenden lassen, le sogleich erhellen wird.

Man hat also nach dem Bisherigen:

$$V - \frac{\Omega^2}{\alpha} = V' , \; V = \frac{\Omega^2}{\alpha} + V' ;$$

$$V' - \frac{\Omega'^2}{\beta'} = V'' , \; V' = \frac{\Omega'^2}{\beta'} + V'' ;$$

$$V'' - \frac{\Omega''^2}{\gamma''} = V''' , \; V'' = \frac{\Omega''^2}{\gamma''} + V''' ;$$

$$V''' - \frac{\Omega'''^2}{\delta'''} = V'''' , \; V''' = \frac{\Omega'''^2}{\delta'''} + V'''' ;$$

u. s. f. u. s. f.

o jede der Functionen

$$V, V', V'', V''', V'''', \ldots .$$

ne unbekannte Größe weniger enthält als die nächst vor-

e, und α, β', γ'', δ''', ... alle pos
ccessive Substitution erhält man hieraus

$$V = \frac{\Omega^2}{\alpha} + V'$$
$$= \frac{\Omega^2}{\alpha} + \frac{\Omega'^2}{\beta'} + V''$$
$$= \frac{\Omega^2}{\alpha} + \frac{\Omega'^2}{\beta'} + \frac{\Omega''^2}{\gamma''} + V'''$$
$$= \frac{\Omega^2}{\alpha} + \frac{\Omega'^2}{\beta'} + \frac{\Omega''^2}{\gamma''} + \frac{\Omega'''^2}{\delta'''} + V''',$$

u. ſ. f. u. ſ. f.

ich,

$$V = A^2 + A'^2 + A''^2 + A'''^2 + \ldots.$$
$$= \frac{\Omega^2}{\alpha} + \frac{\Omega'^2}{\beta'} + \frac{\Omega''^2}{\gamma''} + \frac{\Omega'''^2}{\delta'''} + \ldots. + C$$

Nenner poſitiv ſind.

Man denke ſich jetzt irgend ein Syſtem

$$1, 1', 1'', 1''', \ldots.$$

ter Werthe von

$$x, y, z, v, \ldots.,$$

eichne die Fehler, d. i. die Unterſchied

lein annimmt, nach der Regel der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit (8.), offenbar der Größe

$$e^{-h^2V}\partial x$$

roportional. Folglich überhaupt die Wahrscheinlichkeit, aß, indem alle übrigen unbekannten Größen ungeändert leiben, der Werth von x zwischen den endlichen Gränzen $-\delta$ und $+\delta$ enthalten sey, dem bestimmten Integral

$$\int_{-\delta}^{+\delta} e^{-h^2V}\partial x$$

roportional, wovon man sich nach einer strengen Methode anz auf dieselbe Weise wie in (79.) bei einem ganz ähnli- en Fall überzeugen kann, indem die Allgemeinheit der ortigen Schlüsse leicht in die Augen fällt. Läßt man nun völlig unbestimmt, so sind $-\infty$ und $+\infty$ die Grän- n, zwischen welche sein Werth überhaupt fallen kann, nd demnach, wenn x unbestimmt bleibt, die Wahrschein- chkeit des in Rede stehenden Systems der Werthe der rigen unbekannten Größen dem bestimmten Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2V}\partial x$$

oportional. Nach (79.) ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2x^2}\partial x = \frac{\sqrt{\pi}}{h},$$

nd nach (86.)

$$e^{-h^2V}\partial x = e^{-h^2\left\{\frac{1}{a}\Omega^2 + V'\right\}}\partial x$$

$$= e^{-h^2V'} \cdot e^{-\frac{1}{a}h^2\Omega^2}\partial x,$$

o V′ kein x mehr enthält, so daß also

$$\int e^{-h^2V}\partial x = e^{-h^2V'}\int e^{-\frac{1}{a}h^2\Omega^2}\partial x.$$

Da nun ferner (86.)

$$\Omega = 1 + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta v + \ldots$$

t, so ist, da hier bloß x als veränderlich betrachtet wird:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial x}{\partial\Omega} = \frac{1}{a}.$$

$$e^{-h^2\Omega^2}\partial x = e^{-\frac{1}{\alpha}h^2\Omega^2}\partial\Omega \cdot \frac{\partial x}{\partial\Omega} = \frac{1}{\alpha}e^{-\frac{1}{\alpha}h}$$

$$\int e^{-h^2V}\partial x = \frac{1}{\alpha}e^{-h^2V'}\int e^{-\frac{1}{\alpha}h^2\Omega^2}\partial\Omega .$$

$$\Omega = \lambda + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta v + \ldots ,$$

positiv ist (86.), die Größen y, z, v,
ıstant betrachtet werden, so ist offenbar g
$\pm\infty$, $\Omega = \pm\infty$, wo die obern und u
h auf einander beziehen. Also

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2V}\partial x = \frac{1}{\alpha}e^{-h^2V'}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{\alpha}h^2\Omega}$$

$$= \frac{1}{\alpha}e^{-h^2V'}\cdot\frac{\Gamma\pi}{h\Gamma\frac{1}{\alpha}} = h^{-1}\alpha^{-\frac{1}{2}}\pi^{\frac{1}{2}}e^{-h^2V'}$$

nur y, z, v, ... enthält.

ſo iſt, indem x unbeſtimmt bleibt, die Wa
des Syſtems der Werthe der übrigen unb

. i. der Größe

$$e^{-h^2 V'''}$$

roportional ist, u. s. f.

Obgleich wir die folgenden Betrachtungen auf den Fall eschränken werden, wenn nur vier unbekannte Größen , y, z, v zu bestimmen sind, so wird dies doch der All- meinheit nicht schaden. Die Wahrscheinlichkeit des Wer- es von v ist nach dem Vorhergehenden der Größe

$$e^{-h^2 V'''}$$

oportional. Aber nach (86.)

$$V''' = \frac{\Omega'''^2}{\delta'''} + V'''',$$

» V'''' kein v mehr enthält, und demnach eine constante rösse ist, so daß also

$$V''' = \frac{\Omega'''^2}{\delta'''} + C,$$

ge Wahrscheinlichkeit folglich der Größe

$$e^{-h^2\left\{\frac{\Omega'''^2}{\delta'''} + C\right\}} = e^{-h^2 C} \cdot e^{-h^2 \frac{\Omega'''^2}{\delta'''}},$$

. der Größe

$$e^{-\frac{h^2 \Omega'''^2}{\delta'''}}$$

portional ist. Die Wahrscheinlichkeit wird also am ßten, wenn

$$e^{-\frac{h^2 \Omega'''^2}{\delta'''}}$$

Maximum wird. Differentiirt man nun diese bloß v abhängende Function, und setzt den Differentialquo- ten = o, so erhält man:

$$-\frac{h^2}{\delta'''} e^{-\frac{h^2 \Omega''^2}{\delta'''}} \cdot 2\Omega''' \cdot \frac{\partial \Omega'''}{\partial v} = o.$$

er (86.)

$$\Omega''' = \lambda''' + \delta''' v, \quad \frac{\partial \Omega'''}{\partial v} = \delta'''.$$

lglich

$$- 2h^2 \Omega''' e^{-\frac{h^2 \Omega'''^2}{\delta'''}} = o ,$$

aus sogleich:

$$\Omega''' = o, \lambda''' + \delta''' v = o, v = - \frac{\lambda'''}{\delta'''}$$

ches also der wahrscheinlichste Werth von v
ten zu demselben Resultat auch auf anderm
unserer frühern Formeln gelangen können,
nachher auf die Uebereinstimmung der Resul
s aufmerksam machen. Der wahre Werth
für diese Bestimmung, wenn wir, wie oben,
durch v′ bezeichnen:

$$v = - \frac{\lambda'''}{\delta'''} + v' ,$$

lches, für v in Ω''' gesetzt, giebt:

$$\Omega''' = \lambda''' + \delta''' \left| - \frac{\lambda'''}{\delta'''} + v' \right| = \delta''' v' ,$$

daß also die Wahrscheinlichkeit, den Fehler v′ z
Größe

$$e^{-\frac{h^2 \delta'''^2 v'^2}{\delta'''}} = e^{-h^2 \delta''' v'^2}$$

da $\Omega = \lambda + \alpha x + \beta y + \delta z + \ldots$,

so das partielle Differential

$$\left(\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right) = \beta$$

. Ferner ist

$$\begin{aligned} R &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V'}{\partial z}\right) + \frac{\Omega}{\alpha}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial z}\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V''}{\partial z}\right) + \frac{\Omega'}{\beta'}\left(\frac{\partial\Omega'}{\partial z}\right) + \frac{\Omega}{\alpha}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial z}\right) \\ &= \Omega'' + \frac{\gamma'}{\beta'}\Omega' + \frac{\gamma}{\alpha}\Omega . \end{aligned}$$

ıdlich

$$\begin{aligned} S &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial v}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V'}{\partial v}\right) + \frac{\Omega}{\alpha}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial v}\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V''}{\partial v}\right) + \frac{\Omega'}{\beta'}\left(\frac{\partial\Omega'}{\partial v}\right) + \frac{\Omega}{\alpha}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial v}\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V'''}{\partial v}\right) + \frac{\Omega''}{\gamma'}\left(\frac{\partial\Omega''}{\partial v}\right) + \frac{\Omega'}{\beta'}\left(\frac{\partial\Omega'}{\partial v}\right) + \frac{\Omega}{\alpha}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial v}\right) \\ &= \Omega''' + \frac{\delta''}{\gamma''}\Omega'' + \frac{\delta'}{\beta'}\Omega' + \frac{\delta}{\alpha}\Omega . \end{aligned}$$

an hat also folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} P &= \Omega \\ Q &= \Omega' + \frac{\beta}{\alpha}\Omega \\ R &= \Omega'' + \frac{\gamma'}{\beta'}\Omega' + \frac{\gamma}{\alpha}\Omega \\ S &= \Omega''' + \frac{\delta''}{\gamma''}\Omega'' + \frac{\delta'}{\beta'}\Omega' + \frac{\delta}{\alpha}\Omega \end{aligned}$$

er auch, wie leicht erhellet:

$$\begin{aligned} \Omega &= P \\ \Omega' &= Q + \mathfrak{A}P \\ \Omega'' &= R + \mathfrak{B}'Q + \mathfrak{A}'P \\ \Omega''' &= S + \mathfrak{C}''R + \mathfrak{B}''Q + \mathfrak{A}''P \end{aligned}$$

) alle Coefficienten von P, Q, R, S, bekannte Größen d. Aber

$$\Omega''' = \lambda''' + \delta'''v, \quad v = -\frac{\lambda'''}{\delta'''} + \frac{\Omega'''}{\delta'''} .$$

so allgemein

$$v = -\frac{\lambda'''}{\delta'''} + \frac{\mathfrak{A}''}{\delta'''}P + \frac{\mathfrak{B}''}{\delta'''}Q + \frac{\mathfrak{C}''}{\delta'''}R + \frac{1}{\delta'''}S .$$

rückt man also v durch eine Gleichung von der Form

$v = L''' + A_1''' P + B_1''' Q + C_1''' R + D_1''' S$

ist, wie aus dem Obigen erhellet, L'''
chste Werth von v, und, da

$$\frac{1}{\delta'''} = D_1''', \quad \delta''' = \frac{1}{D_1'''}$$

$\delta''' = \frac{1}{\gamma D_1'''}$ dessen Gewicht, das Gewich
gen $= 1$ gesetzt.

eraus ergiebt sich nun, da die Allgemeinhe
hlüsse sogleich in die Augen fällt, unmitt

Es ist nach dem Obigen überhaupt

$$P = bA + b'A' + b''A'' + b'''A''' + \ldots$$
$$Q = cA + c'A' + c''A'' + c'''A''' + \ldots$$
$$R = dA + d'A' + d''A'' + d'''A''' + \ldots$$
$$S = eA + e'A' + e''A'' + e'''A''' + \ldots$$

u. s. f. u. s. f.

ichungen zwischen den m unbekannten
v, ..., welche in A, A', A'', A''', ..
ersten Dimension vorkommen. Eliminirt
esen Gleichungen x, y, z, v, ... nac
ebraischen Methoden, so wird man die

Ist nur eine unbekannte Größe x zu bestimmen, und man hat folgende Gleichungen für die Fehler:

$$\Delta = a + bx,\ \Delta' = a' + b'x,\ \Delta'' = a'' + b''x,\ \ldots.$$

so erhält man leicht:

$$P = ab + a'b' + a''b'' + \ldots + (b^2 + b'^2 + b''^2 + \ldots)x$$

$$x = -\frac{ab + a'b' + a''b'' + \ldots}{b^2 + b'^2 + b''^2 + \ldots} + \frac{1}{b^2 + b'^2 + b''^2 + \ldots}P.$$

Also der wahrscheinlichste Werth von x

$$= -\frac{ab + a'b' + a''b'' + a'''b''' + \ldots}{b^2 + b'^2 + b''^2 + b'''^2 + \ldots}$$

und sein Gewicht

$$= r(b^2 + b'^2 + b'^2 + b'''^2 + \ldots).$$

Sind die Gleichungen für die Fehler

$$\Delta = a - x,\ \Delta' = a' - x,\ \Delta'' = a'' - x,\ \ldots$$

und die Anzahl der Beobachtungen $= n$, so ist der wahrscheinlichste Werth

$$= \frac{a + a' + a'' + a''' + \ldots.}{n}$$

und das Gewicht $= \sqrt{n}$, das Gewicht der Beobachtungen $= 1$ gesetzt. Ist also das Gewicht der Beobachtungen $= h$, so ist das Gewicht des Resultats $= h\sqrt{n}$. Ist daher der wahrscheinlichste Fehler der Beobachtungen $= \Delta$, so ist der wahrscheinlichste Fehler des Resultates offenbar nur $= \frac{\Delta}{\sqrt{n}}$, da dessen Gewicht $\sqrt{n}$ Mal größer ist.

Sey jetzt, um noch einmal zu dem schon in (80.) behandelten Beispiel, wenn auch hier in noch etwas anderer Beziehung zurückzukehren:

$$\begin{aligned} X &= x - y + 2z \\ X' &= 3x + 2y - 5z \\ X'' &= 4x + y + 4z \\ X''' &= -2x + 6y + 6z \end{aligned}$$

und durch Beobachtung gefunden:

$$A = 3,\ A' = 5,\ A'' = 21,\ A''' = 28.$$

Die Gewichte der drei ersten Beobachtungen seyen einander gleich, der letzten aber sey nur das halbe Gewicht von jenem beizulegen. Die Fehler sind

$$\Delta_1, \Delta_1, \Delta'_1, \Delta''_1, \Delta''_2, \ldots;$$

ellet, weil ſich offenbar die Fehler umgekeh
hte verhalten, augenblicklich die Richtigke
n Proportionen und Gleichungen:

$$\begin{aligned}
1 : h &= \Delta : \Delta_1 ; \Delta_1 = h\Delta \\
1 : h' &= \Delta' : \Delta'_1 ; \Delta'_1 = h'\Delta' \\
1 : h'' &= \Delta'' : \Delta''_1 ; \Delta''_1 = h''\Delta'' \\
1 : \Delta''' &= \Delta''' : \Delta'''_1 ; \Delta'''_1 = h'''\Delta'''
\end{aligned}$$

u. ſ. f. u. ſ. f.

un nach dem Princip der kleinſten Quadrate
nten Größen ſo beſtimmt werden müſſen, d

$$\Delta_1^2 + \Delta'^2_1 + \Delta'^2_1 + \Delta''^2_1 + \ldots$$

Minimum wird, ſo muß auch jetzt dieſe Be
rgenommen werden, daß

$$(h\Delta)^2 + (h'\Delta')^2 + (h''\Delta'')^2 + (h'''\Delta''')^2 + \ldots$$

Minimum wird. Es iſt alſo hiermit vorliege
den erſten Fall zurückgeführt, indem man
Fehler ſelbſt die mit den reſpectiven Gewichte
[illegible] Beobachtungen multiplicirten Fehler

ah , bh , ch , dh , ...
a'h , b'h' , c'h' , d'h' , ...
a''h'' , b''h'' , c''h'' , d''h'' , ...
a'''h''' , b'''h''' , c'''h''' , d'''h''' , ...,
u. s. f. u. s. f.

kt der dortigen

a , b , c , d , ...
a , b' , c' , d' , ...
a'' , b'' , c'' , d'' , ...
a''' , b''' , c''' , d''' , ...
u. s. f. u. s. f.

:tzt werden.

84. Das Vorhergehende bezieht sich auf Gleichungen : ersten Grades, oder sogenannte lineare Gleichungen. läßt sich aber jeder andere Fall auf diesen zurückführen. a nämlich die Anzahl der unbekannten Größen $= m$, die Zahl der gegebenen Gleichungen $= n$, und $n > m$ ist, berechne man mittelst der gewöhnlichen Eliminationsme- den aus m der gegebenen Gleichungen die genäherten erthe

$x_1 , y_1 , z_1 , v_1 , \ldots$

m unbekannten Größen, setze nun

$= x_1 + x' , y = y_1 + y' , z = z_1 + z' , v = v_1 + v' , \ldots$

D führe diese Ausdrücke in die gegebenen Gleichungen : x, y, z, v, ... ein. Da nun bei Beobachtungen lche im Allgemeinen den Namen guter Beobachtungen dienen, bei denen nämlich nicht augenscheinliche Fehler gefallen sind — und solche dürfen ja überhaupt nur in chnung genommen werden, wenn das Resultat brauch- seyn soll — offenbar x', y', z', v', ... immer nur r klein seyn werden, so kann man alle die erste überstei- den Dimensionen dieser Unterschiede vernachlässigen, wo- ch die gegebenen Gleichungen sogleich auf den Fall linea- Gleichungen zurückgeführt werden.

85. Nach diesen Bemerkungen kehren wir zu dem er- n Falle, wo die gegebenen Gleichungen linear, und die wichte der Beobachtungen nicht von einander verschieden d, wieder zurück. Vorzüglich ist nun noch die Bestim-

ber relativen Gewichte der durch die obig
nen Werthe der einzelnen unbekannt
Wir gehen dabei von einer nähern
nction

$$\Delta^2 + \Delta'^2 + \Delta''^2 + \ldots,$$

im Folgenden immer durch V bezeichnet
chicken jedoch noch folgenden allgemeine
nctionen voraus.

enn die Function

$$F = f(x, y, z, \ldots) - \varphi(x, y, z, \ldots)$$

ner der in ihr enthaltenen veränderliche
, unabhängig iſt, ſo erhält man den v
n Ausdruck dieſer Function, wenn ma
ing

$$\varphi(x, y, z, \ldots) = 0$$

nt, und den erhaltenen Ausdruck für x
Function ſetzt.

die gegebene Function von x unabhän
alle mit x behafteten Glieder ſich gegenſ
nd es muß alſo allgemein

er nach dem Obigen

$$\varphi(x, y, z, \ldots) = 0;$$

o

$$F = f'(y, z, \ldots) - \varphi'(y, z, \ldots)$$

schon oben gefundene von x befreite Ausdruck der nction F.

86. Setzen wir nun

$$\Delta^2 + \Delta'^2 + \Delta''^2 + \Delta'''^2 + \ldots = V,$$

d (vergl. 80.)

$$\begin{aligned} P &= b\Delta + b'\Delta' + b''\Delta'' + b'''\Delta''' + \ldots \\ Q &= c\Delta + c'\Delta' + c''\Delta'' + c'''\Delta''' + \ldots \\ R &= d\Delta + d'\Delta' + d''\Delta'' + d'''\Delta''' + \ldots \\ S &= e\Delta + e'\Delta' + e''\Delta'' + e'''\Delta''' + \ldots \end{aligned}$$

u. s. f. u. s. f.

bei immer

$$\begin{aligned} \Delta &= a + bx + cy + dz + ev + \ldots, \\ \Delta' &= a' + b'x + c'y + d'z + e'v + \ldots. \\ \Delta'' &= a'' + b''x + c''y + d''z + e''v + \ldots. \\ \Delta''' &= a''' + b'''x + c'''y + d'''z + e'''v + \ldots. \end{aligned}$$

u. s. f. u. s. f.

Differentiirt man V nach x, so wird

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = 2\Delta\left(\frac{\partial \Delta}{\partial x}\right) + 2\Delta'\left(\frac{\partial \Delta'}{\partial x}\right) + 2\Delta''\left(\frac{\partial \Delta''}{\partial x}\right) + \ldots$$

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \Delta\left(\frac{\partial \Delta}{\partial x}\right) + \Delta'\left(\frac{\partial \Delta'}{\partial x}\right) + \Delta''\left(\frac{\partial \Delta''}{\partial x}\right) + \ldots$$

$$\begin{aligned} = {} & (a + bx + cy + dz + ev + \ldots).b \\ & + (a' + b'x + c'y + d'z + e'v + \ldots).b' \\ & + (a'' + b''x + c''y + d''z + e''v + \ldots).b'' \\ & + (a''' + b'''x + c'''y + d'''z + e'''y + \ldots).b''' \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ = {} & ab + a'b' + a''b'' + a'''b''' + \ldots. \\ & + (bb + b'b' + b''b'' + b'''b''' + \ldots.)x \\ & + (bc + b'c' + b''c'' + b'''c''' + \ldots.)y \\ & + (bd + b'd' + b''d'' + b'''d''' + \ldots.)z \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

an kann folglich

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = 1 + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta v + \ldots$$

wo immer α eine Summe von Quadr
positiv ist. Setzt man der Kürze wegen

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \lambda + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta v + \ldots =$$

ich leicht zeigen, daß

$$V - \frac{\Omega^2}{\alpha} = V',$$

nabhängig ist. Differentiirt man nämli
t man

$$\left(\frac{\partial V'}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) - \frac{2\Omega}{\alpha}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)$$

$$= 2\Omega - \frac{2\Omega}{\alpha} \cdot \alpha = 2\Omega - 2\Omega = 0,$$

die Behauptung unmittelbar folgt. Fern
aus der Gleichung

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \Delta\left(\frac{\partial \Delta}{\partial x}\right) + \Delta\left(\frac{\partial \Delta'}{\partial x}\right) + \Delta'\left(\frac{\partial \Delta''}{\partial x}\right) +$$

lbar, daß

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = b\Delta + b'\Delta' + b''\Delta'' + b'''\Delta''' + \ldots$$

kimmt, und den gefundenen Ausdruck für x setzt (85.). ıch dieser Substitution wird, wegen $\Omega = 0$,

$$V' = V,$$

›aß also V', eben so wie V, eine Summe von Quadra- ist, die aber von x unabhängig ist. Auch ist klar, daß den Größen, aus deren Quadraten V' besteht, alle un- annte Größen nur in der ersten Dimension vorkommen, n so wie in V. Also ist ganz wie vorher

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V'}{\partial y}\right) = \lambda' + \beta' y + \gamma' z + \delta' v + \ldots = \Omega;$$

ſt, wie vorher α, positiv, und

$$V' - \frac{\Omega'^2}{\beta'} = V'',$$

ches nach dem Obigen natürlich kein x mehr enthält, ıuch von y unabhängig. Man erhält daher wieder den y befrei'ten Ausdruck von V'', wenn man y aus der ichung

$$\Omega' = 0$$

immt, und den gefundenen Werth substituirt, wo- ch man

$$V'' = V'$$

ilt, so daß also V'' wieder eine Function von ganz ähn- r Beschaffenheit wie V' und V ist, auf welche sich also der ganz dieselben Schlüsse wie vorher anwenden lassen, sogleich erhellen wird.

Man hat also nach dem Bisherigen:

$$V - \frac{\Omega^2}{\alpha} = V', \quad V = \frac{\Omega^2}{\alpha} + V';$$

$$V' - \frac{\Omega'^2}{\beta'} = V'', \quad V' = \frac{\Omega'^2}{\beta'} + V'';$$

$$V'' - \frac{\Omega''^2}{\gamma''} = V''', \quad V'' = \frac{\Omega''^2}{\gamma''} + V''';$$

$$V''' - \frac{\Omega'''^2}{\delta'''} = V'''', \quad V''' = \frac{\Omega'''^2}{\delta'''} + V'''';$$

u. s. f. u. s. f.

jede der Functionen

$$V, V', V'', V''', V'''', \ldots.$$

unbekannte Größe weniger enthält als die nächst vor-

de, und α, β', γ'', δ''', ... alle po
ucceſſive Subſtitution erhält man hieraus

$$V = \frac{\Omega^2}{\alpha} + V'$$
$$= \frac{\Omega^2}{\alpha} + \frac{\Omega'^2}{\beta'} + V''$$
$$= \frac{\Omega^2}{\alpha} + \frac{\Omega'^2}{\beta'} + \frac{\Omega''^2}{\gamma''} + V'''$$
$$= \frac{\Omega^2}{\alpha} + \frac{\Omega'^2}{\beta'} + \frac{\Omega''^2}{\gamma''} + \frac{\Omega'''^2}{\delta'''} + V''''$$

u. ſ. f. u. ſ. f.

lich,

$$V = A^2 + A'^2 + A''^2 + A'''^2 + \ldots.$$
$$= \frac{\Omega^2}{\alpha} + \frac{\Omega'^2}{\beta'} + \frac{\Omega''^2}{\gamma''} + \frac{\Omega'''^2}{\delta'''} + \ldots. +$$

Nenner poſitiv ſind.

Man denke ſich jetzt irgend ein Syſtem

$$1, 1', 1'', 1''', \ldots.$$

nter Werthe von

$$x, y, z, v, \ldots.;$$

klein annimmt, nach der Regel der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit (8.), offenbar der Größe

$$e^{-h^2V}\partial x$$

proportional. Folglich überhaupt die Wahrscheinlichkeit, daß, indem alle übrigen unbekannten Größen ungeändert bleiben, der Werth von x zwischen den endlichen Gränzen $-\delta$ und $+\delta$ enthalten sey, dem bestimmten Integral

$$\int_{-\delta}^{+\delta} e^{-h^2V}\partial x$$

proportional, wovon man sich nach einer strengen Methode ganz auf dieselbe Weise wie in (79.) bei einem ganz ähnlichen Fall überzeugen kann, indem die Allgemeinheit der dortigen Schlüsse leicht in die Augen fällt. Läßt man nun x völlig unbestimmt, so sind $-\infty$ und $+\infty$ die Gränzen, zwischen welche sein Werth überhaupt fallen kann, und demnach, wenn x unbestimmt bleibt, die Wahrscheinlichkeit des in Rede stehenden Systems der Werthe der übrigen unbekannten Größen dem bestimmten Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2V}\partial x$$

proportional. Nach (79.) ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2x^2}\partial x = \frac{\sqrt{\pi}}{h},$$

und nach (86.)

$$e^{-h^2V}\partial x = e^{-h^2\left\{\frac{1}{a}\Omega^2 + V'\right\}}\partial x$$

$$= e^{-h^2V'} \cdot e^{-\frac{1}{a}h^2\Omega^2}\partial x,$$

da V' kein x mehr enthält, so daß also

$$\int e^{-h^2V}\partial x = e^{-h^2V'}\int e^{-\frac{1}{a}h^2\Omega^2}\partial x.$$

Da nun ferner (86.)

$$\Omega = 1 + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta v + \ldots$$

ist, so ist, da hier bloß x als veränderlich betrachtet wird:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial x}{\partial\Omega} = \frac{1}{a}.$$

$$\partial x = e^{-\frac{1}{\alpha}h^2\Omega^2}\,\partial\Omega\cdot\frac{\partial x}{\partial\Omega} = \frac{1}{\alpha}e^{-}$$

$$\int e^{-h^2V}\partial x = \frac{1}{\alpha}e^{-h^2V'}\int e^{-\frac{1}{\alpha}h^2\Omega^2}\,\partial$$

$$\Omega = \lambda + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta v + \ldots,$$

poſitiv iſt (86.), die Größen y, z,
ſtant betrachtet werden, ſo iſt offenba
$\pm\infty$, $\Omega = \pm\infty$, wo die obern und
h auf einander beziehen. Alſo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2V}\partial x = \frac{1}{\alpha}e^{-h^2V'}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{\alpha}h}$$

$$= \frac{1}{\alpha}e^{-h^2V'}\cdot\frac{\Gamma\pi}{h\Gamma\frac{1}{\alpha}} = h^{-1}\alpha^{-\frac{1}{2}}\pi^{\frac{1}{2}}e^{-h^2}$$

nur y, z, v, ... enthält.

ſo iſt, indem x unbeſtimmt bleibt, die
des Syſtems der Werthe der übrigen

i. der Größe

$$e^{-h^2 V'''}$$

oportional ist, u. s. f.

Obgleich wir die folgenden Betrachtungen auf den Fall schränken werden, wenn nur vier unbekannte Größen , y, z, v zu bestimmen sind, so wird dies doch der Allmeinheit nicht schaden. Die Wahrscheinlichkeit des Wertes von v ist nach dem Vorhergehenden der Größe

$$e^{-h^2 V''}$$

oportional. Aber nach (86.)

$$V''' = \frac{\Omega'''^2}{\delta'''} + V'''',$$

o V'''' kein v mehr enthält, und demnach eine constante röße ist, so daß also

$$V''' = \frac{\Omega'''^2}{\delta'''} + C,$$

ige Wahrscheinlichkeit folglich der Größe

$$e^{-h^2\left\{\frac{\Omega'''^2}{\delta'''} + C\right\}} = e^{-h^2 C} \cdot e^{-h^2 \frac{\Omega'''^2}{\delta'''}},$$

i. der Größe

$$e^{-\frac{h^2 \Omega'''^2}{\delta'''}}$$

oportional ist. Die Wahrscheinlichkeit wird also am ößten, wenn

$$e^{-\frac{h^2 \Omega''^2}{\delta'''}}$$

ı Maximum wird. Differentiirt man nun diese bloß n v abhängende Function, und setzt den Differentialquonten $= 0$, so erhält man:

$$-\frac{h^2}{\delta'''} e^{-\frac{h^2 \Omega''^2}{\delta'''}} \cdot 2\Omega''' \cdot \frac{\partial \Omega'''}{\partial v} = 0.$$

er (86.)

$$\Omega''' = \lambda''' + \delta''' v, \quad \frac{\partial \Omega'''}{\partial v} = \delta'''.$$

lglich

$$-2h^2\Omega'''e^{-\frac{h^2\Omega'''^2}{\delta'''}} = o,$$

aus sogleich:

$$\Omega''' = o,\ \lambda''' + \delta'''v = o,\ v = -\frac{\lambda'''}{\delta'''}$$

ches also der wahrscheinlichste Werth von
en zu demselben Resultat auch auf ander
unserer frühern Formeln gelangen könne
nachher auf die Uebereinstimmung der Re
s aufmerksam machen. Der wahre We
für diese Bestimmung, wenn wir, wie ob
durch v′ bezeichnen:

$$v = -\frac{\lambda'''}{\delta'''} + v',$$

ches, für v in Ω''' gesetzt, giebt:

$$\Omega''' = \lambda''' + \delta'''\left\{-\frac{\lambda'''}{\delta'''} + v'\right\} = \delta''' v',$$

aß also die Wahrscheinlichkeit, den Fehler v
Größe

$$-\frac{h^2\delta'''^2 v'^2}{\delta'''} \qquad -h^2\delta''' v'^2$$

da $\Omega = \lambda + \alpha x + \beta y + \delta z + \ldots$,

so das partielle Differential

$$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right) = \beta$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} R &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V'}{\partial z}\right) + \frac{\Omega}{\alpha}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial z}\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V''}{\partial z}\right) + \frac{\Omega'}{\beta'}\left(\frac{\partial \Omega'}{\partial z}\right) + \frac{\Omega}{\alpha}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial z}\right) \\ &= \Omega'' + \frac{\gamma'}{\beta'}\Omega' + \frac{\gamma}{\alpha}\Omega . \end{aligned}$$

ndlich

$$\begin{aligned} S &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial v}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V'}{\partial v}\right) + \frac{\Omega}{\alpha}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial v}\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V''}{\partial v}\right) + \frac{\Omega'}{\beta'}\left(\frac{\partial \Omega'}{\partial v}\right) + \frac{\Omega}{\alpha}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial v}\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V'''}{\partial v}\right) + \frac{\Omega''}{\gamma''}\left(\frac{\partial \Omega''}{\partial v}\right) + \frac{\Omega'}{\beta'}\left(\frac{\partial \Omega'}{\partial v}\right) + \frac{\Omega}{\alpha}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial v}\right) \\ &= \Omega'' + \frac{\delta''}{\gamma''}\Omega'' + \frac{\delta'}{\beta'}\Omega' + \frac{\delta}{\alpha}\Omega . \end{aligned}$$

an hat also folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} P &= \Omega \\ Q &= \Omega' + \frac{\beta}{\alpha}\Omega \\ R &= \Omega'' + \frac{\gamma'}{\beta'}\Omega' + \frac{\gamma}{\alpha}\Omega \\ S &= \Omega''' + \frac{\delta''}{\gamma''}\Omega'' + \frac{\delta'}{\beta'}\Omega' + \frac{\delta}{\alpha}\Omega \end{aligned}$$

er auch, wie leicht erhellet:

$$\begin{aligned} \Omega &= P \\ \Omega' &= Q + \mathfrak{A}P \\ \Omega'' &= R + \mathfrak{B}'Q + \mathfrak{A}'P \\ \Omega''' &= S + \mathfrak{C}''R + \mathfrak{B}''Q + \mathfrak{A}''P \end{aligned}$$

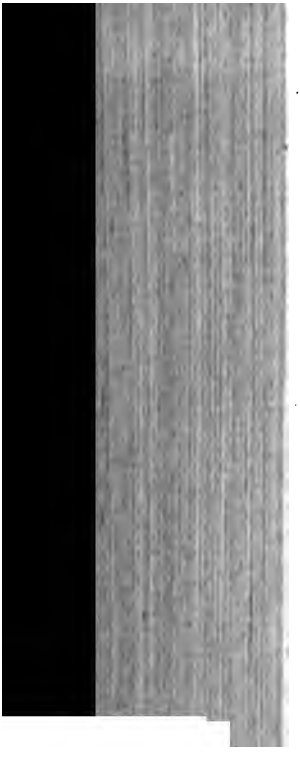
alle Coefficienten von P, Q, R, S, bekannte Größen d. Aber

$$\Omega''' = \lambda''' + \delta'''v, \quad v = -\frac{\lambda'''}{\delta'''} + \frac{\Omega'''}{\delta'''} .$$

so allgemein

$$v = -\frac{\lambda'''}{\delta'''} + \frac{\mathfrak{A}'''}{\delta'''}P + \frac{\mathfrak{B}'''}{\delta'''}Q + \frac{\mathfrak{C}'''}{\delta'''}R + \frac{1}{\delta'''}S .$$

rückt man also v durch eine Gleichung von der Form



gendes. Es iſt nach t

$$P = b\Delta +$$
$$Q = c\Delta +$$
$$R = d\Delta +$$
$$S = e\Delta +$$

u. ſ.

m Gleichungen zwiſch
y, z, v, ..., welche
in der erſten Dimenſio
aus dieſen Gleichunge
ten algebraiſchen Met
ſer unbekannten Größ
von folgender Form da

$$x = L + A_1P$$
$$y = L' + A_1'P$$
$$z = L'' + A_1''P$$
$$v = L''' + A_1'''P$$

u. ſ. f.

Hat man dieſe Ausdrü

L,

die wahrſcheinlichſten
y, z, v, ..., und

Ist nur eine unbekannte Größe x zu bestimmen, und an hat folgende Gleichungen für die Fehler:

$$\Delta = a + bx,\ \Delta' = a' + b'x,\ \Delta'' = a'' + b''x, \ldots.$$

erhält man leicht:

$$P = ab + a'b' + a''b'' + \ldots + (b^2 + b'^2 + b''^2 + \ldots)x$$

$$x = -\frac{ab + a'b' + a''b'' + \ldots}{b^2 + b'^2 + b''^2 + \ldots} + \frac{1}{b^2 + b'^2 + b''^2 + \ldots}P.$$

lso der wahrscheinlichste Werth von x

$$= -\frac{ab + a'b' + a''b'' + a'''b''' + \ldots}{b^2 + b'^2 + b''^2 + b'''^2 + \ldots}$$

ıd sein Gewicht

$$= r(b^2 + b'^2 + b'^2 + b'''^2 + \ldots).$$

ind die Gleichungen für die Fehler

$$\Delta = a - x,\ \Delta = a' - x,\ \Delta'' = a'' - x, \ldots$$

ıd die Anzahl der Beobachtungen = n, so ist der wahrscheinlichste Werth

$$= \frac{a + a' + a'' + a''' + \ldots.}{n}$$

ıd das Gewicht = $\sqrt{n}$, das Gewicht der Beobachtungen = 1 gesetzt. Ist also das Gewicht der Beobachtungen = h, so ist das Gewicht des Resultats = $h\sqrt{n}$. ist daher der wahrscheinlichste Fehler der Beobachtungen = Δ, so ist der wahrscheinlichste Fehler des Resultates offenbar nur = $\frac{\Delta}{\sqrt{n}}$, da dessen Gewicht $\sqrt{n}$ Mal größer ist.

Sey jetzt, um noch einmal zu dem schon in (80.) behandelten Beispiel, wenn auch hier in noch etwas anderer Beziehung zurückzukehren:

$$\begin{aligned} X &= x - y + 2z \\ X' &= 3x + 2y - 5z \\ X'' &= 4x + y + 4z \\ X''' &= -2x + 6y + 6z \end{aligned}$$

ıd durch Beobachtung gefunden:

$$A = 3,\ A' = 5,\ A'' = 21,\ A''' = 28.$$

ie Gewichte der drei ersten Beobachtungen seyen einander gleich, der letzten aber sey nur das halbe Gewicht von nem beizulegen. Die Fehler sind

Wahrſcheinlich

$$\Delta = A - X =$$
$$\Delta' = A' - X' =$$
$$\Delta'' = A'' - X'' = 2$$
$$\Delta''' = A''' - X''' =$$

ber der vierten Beobach
gen iſt, ſo muß man n
die Rechnung einführ
Ausdrücke für die Fehl

$$\Delta = 3 -$$
$$\Delta' = 5 - 3$$
$$\Delta'' = 21 - 4$$
$$\Delta''' = 14 +$$

ſo a, b, c, u. ſ. f. di
. Es iſt nun z. B.

$$P = b\Delta + b'\Delta' +$$
$$= \begin{cases} - 3 + x \\ - 15 + 9x \\ - 84 + 16x \\ 14 + x \end{cases}$$
$$= - 88 + 27x$$

man dieſe Rechnung n

$$x = \frac{49154}{19899} = 2{,}470$$
$$y = \frac{2617}{757} = 3{,}551$$
$$z = \frac{12707}{6633} = 1{,}916\,.$$

Gewichte dieser Bestimmungen sind, das Gewicht Beobachtnngen = 1 gesetzt;

$$\text{für } x \ldots = \sqrt{\tfrac{19899}{809}} = 4{,}96$$
$$\text{für } y \ldots = \sqrt{\tfrac{737}{54}} = 3{,}69$$
$$\text{für } z \ldots = \sqrt{\tfrac{6633}{123}} = 7{,}34\,.$$

) ist z von allen am schärfsten bestimmt, y am wenig- genau, so daß y nur halb so sicher ist als z.

88. Weder bei Ausmittelung der wahrscheinlichsten rthe der unbekannten Größen, noch bei Bestimmung relativen Gewichte derselben, brauchte man, wie aus Vorhergehenden erhellet, den Werth der Größe h zu ien. Indeß ist eine Kenntniß dieser Größe immer an interessant und lehrreich, und wir wollen daher jetzt) einige Bemerkungen über die Art und Weise hinzufü- , wie man durch die Beobachtungen selbst zu einer sol- Kenntniß gelangen kann. Den Werth des Integrals

$$\int \frac{2e^{-t^2}\partial t}{\sqrt{\pi}},$$

t = o an gerechnet, wollen wir bei dieser Untersu- ig durch Θt bezeichnen. Mittelst der in (75.) gegebe- Formeln findet man leicht folgende von Gauß berech- Werthe dieser Function:

0,5000000	$= \Theta 0{,}4769363$	$= \Theta\varrho$
0,6000000	$= \Theta 0{,}5951161$	$= \Theta 1{,}247790\varrho$
0,7000000	$= \Theta 0{,}7328691$	$= \Theta 1{,}536618\varrho$
0,8000000	$= \Theta 0{,}9061939$	$= \Theta 1{,}900032\varrho$
0,8427008	$= \Theta 1$	$= \Theta 2{,}096716\varrho$
0,9000000	$= \Theta 1{,}1630872$	$= \Theta 2{,}438664\varrho$
0,9900000	$= \Theta 1{,}8213864$	$= \Theta 3{,}818930\varrho$
0,9990000	$= \Theta 2{,}3276754$	$= \Theta 4{,}880475\varrho$
0,9999000	$= \Theta 2{,}7510654$	$= \Theta 5{,}768204\varrho$
1	$= \Theta\infty$	$= \Theta\infty$.

se Werthe werden von dem Gange unserer Function hinlängliche Uebersicht geben.

ie Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler Δ eine
g zwischen den Grenzen $-\delta$ und $+\delta$ enthal
ohne Rücksicht auf das Zeichen, nicht größe
ist nach (79.)

$$\int_{-\delta}^{+\delta} e^{-h^2\Delta^2}\partial\Delta = \int_{-\delta}^{+\delta} \frac{e^{-h^2\Delta^2}\partial . h\Delta}{\sqrt{\pi}}$$

$$\int_{o}^{\delta} \frac{e^{-h^2\Delta^2}\partial . h\Delta}{\sqrt{\pi}} = \int_{o}^{\delta} \frac{2e^{-h^2\Delta^2}\partial . h\Delta}{\sqrt{\pi}}$$

nmer die Grenzen bloß auf die veränderlich
beziehen, wie sich von selbst versteht. Setze
$\Delta = t$, so ist, für $\Delta = o$, auch $t = o$, fü
er $t = h\delta$, und folglich obige Wahrscheinlichkei

$$= \int_{o}^{h\delta} \frac{2e^{-t^2}\partial t}{\sqrt{\pi}} = \Theta h\delta ,$$

un natürlich die Grenzen auf die veränderliche
beziehen. Setzen wir $h\delta = \varrho$, $\delta = \frac{\varrho}{h}$,
Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler zwischen den

$\frac{9}{100}$, und folglich die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit, e Wahrscheinlichkeit nämlich, daß der Fehler über ,438664ϱ oder 3,818930ϱ hinausgehe, nur $\frac{1}{10}$, $= \frac{1}{100}$, u. s. w.

90. Die Wahrscheinlichkeit, daß bei n wirklich angeellten Beobachtungen die Fehler Δ, Δ', Δ'', Δ''', ... yen, war nach (79.)

$$= h^n \pi^{-\frac{1}{2}n} e^{-h^2(\Delta^2+\Delta'^2+\Delta''^2+\Delta'''^2+\ldots)}$$

o h als gegeben oder beständig, die Fehler dagegen als eränderlich angesehen werden. Betrachtet man aber jetzt mgekehrt die Fehler als gegeben oder beständig, das Geicht h der Beobachtungen dagegen als unbekannt oder eränderlich, so wird der richtige Werth von h offenbar erjenige seyn, welcher den Fehlern Δ, Δ, Δ', Δ'', entricht, und es wird folglich offenbar durch obige Größe, enn die Fehler als gegeben oder constant betrachtet wern, auch die Wahrscheinlichkeit ausgedrückt, daß h der ahre Werth des Gewichts der Beobachtungen sey, so ß also diese Wahrscheinlichkeit der Größe

$$h^n e^{-h^2(\Delta^2+\Delta'^2+\Delta''^2+\Delta'''^2+\ldots)}$$

oportional ist. Der wahrscheinlichste Werth von h wird o derjenige seyn, für welchen diese Größe ein Maximum rd. Differentiirt man nun, indem man die Fehler als nstant betrachtet, und

$$\Delta^2 + \Delta'^2 + \Delta''^2 + \Delta'''^2 + \ldots = S$$

t, nach h, und setzt das Differential $= 0$, so erlt man:

$$nh^{n-1} e^{-h^2 S} - 2h^{n+1} S e^{-h^2 S} = 0,$$

$$n - 2h^2 S = 0,$$

$$h = \sqrt{\frac{n}{2S}} = \sqrt{\frac{n}{2(\Delta^2+\Delta'^2+\Delta''^2+\Delta'''^2+\ldots)}},$$

lches also der wahrscheinlichste Werth von h seyn wird. eraus erhält man unmittelbar den wahrscheinlichsten erth von r, d. h. den wahrscheinlichsten Werth des ahrscheinlichen Fehlers $=$

$$\varrho \sqrt{\frac{2(\Delta^2+\Delta'^2+\Delta''^2+\Delta'''^2+\ldots)}{n}}$$

$$= 0{,}4769363 \sqrt{\frac{2(\Delta^2+\Delta'^2+\Delta''^2+\Delta'''^2+}{n}}$$

$$= 0{,}6744897 \sqrt{\frac{\Delta^2+\Delta'^2+\Delta''^2+\Delta'''^2+\ldots}{n}}$$

wahrscheinlichste Werth von h soll der Kü
nden durch H bezeichnet werden, so daß

$$H = \sqrt{\frac{n}{2(\Delta^2+\Delta'^2+\Delta''^2+\Delta'''^2+\ldots)}}$$

Eben so soll der obige wahrscheinlichste S
R bezeichnet werden, so daß also

$$R = 0{,}6744897 \sqrt{\frac{\Delta^2+\Delta'^2+\Delta''^2+\Delta'''^2+\ldots}{n}}$$

Man sieht hieraus, daß immer

$$HR = \frac{0{,}6744897}{r^2} = 0{,}47693631 = \varrho$$

1. Man begreift leicht, daß man von die
von h und r desto weniger berechtigt ist
keit zu erwarten, je kleiner n ist. Ent
den Grad der Genauigkeit, welchen ma

r (Logarithmus. 42.)

$$-\frac{2H\lambda+\lambda^2}{2H^2}+\log n\left\{1+\frac{\lambda}{H}\right\}$$

$$:-\frac{\lambda}{H}-\frac{\lambda^2}{2H^2}+\frac{\lambda}{H}-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\lambda^2}{H^2}+\tfrac{1}{3}\cdot\frac{\lambda^3}{H^3}-\tfrac{1}{4}\cdot\frac{\lambda^4}{H^4}+\cdots$$

$$:-\frac{\lambda^2}{H^2}\left\{1-\tfrac{1}{3}\cdot\frac{\lambda}{H}+\tfrac{1}{4}\cdot\frac{\lambda^2}{H^2}-\tfrac{1}{5}\cdot\frac{\lambda^3}{H^3}+\cdots\right\}$$

folglich das Verhältniß obiger Wahrscheinlichkeiten

$$=1:e^{-\frac{n\lambda^2}{H^2}\left\{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{\lambda}{H}+\frac{1}{4}\cdot\frac{\lambda^2}{H^2}-\frac{1}{5}\cdot\frac{\lambda^3}{H^3}+\cdots\right\}}.$$

gen des negativen Exponenten und der beträchtlichen öße von n wird das zweite Glied dieses Verhältnisses dann gegen das erste noch merklich seyn, wenn $\frac{\lambda}{H}$ sehr kleiner Bruch ist, d. h. es wird nur dann noch ei- e Wahrscheinlichkeit vorhanden seyn, daß nicht H, son- n H + λ der wahre Werth von h ist, wenn $\frac{\lambda}{H}$ ein sehr ner Bruch ist, welches uns berechtigt, statt des obigen rhältnisses kürzer dieses zu gebrauchen:

$$1:e^{-\frac{n\lambda^2}{H^2}},$$

daß also die Wahrscheinlichkeit, daß H + λ der wahre erth von h ist,

$$=Ke^{-\frac{n\lambda^2}{H^2}},$$

etzt werden muß, wo K eine constante Größe bezeichnet. so ist, nach einer früher schon öfter gebrauchten Schluß- , die Wahrscheinlichkeit, daß der wahre Werth von h schen den Gränzen H — λ und H + λ enthalten ist,

$$=K\int_{-\lambda}^{+\lambda}e^{-\frac{n\lambda^2}{H^2}}\partial\lambda.$$

nun der Werth von h gewiß zwischen den Gränzen — λ und H + λ enthalten ist, wenn man für λ den ßten überhaupt zulässigen Werth λ′ setzt, so ist , daß man die Constante K so bestimmen muß, daß

$$K\int_{-\lambda'}^{+\lambda'}e^{-\frac{n\lambda^2}{H^2}}\partial\lambda=1$$

weil für dieſe Grenze
Gewißheit, d. i. = 1
r kleiner Bruch zu ſeyn
nbar $e^{-\frac{n\lambda^2}{H^2}}$, alſo auc
ten Integrals unmerkli

$$K\int_{-\lambda'}^{+\lambda'} e^{-\frac{n\lambda^2}{H^2}} \partial\lambda \text{ und}$$

merklich von einander
ch verſtattet iſt, K ſo

$$K\int_{-\infty}^{+\infty} e$$

Es iſt aber, für

$$\frac{n\lambda^2}{H^2} = t^2, \quad \frac{\lambda\sqrt{n}}{H}$$

ffenbar für $\lambda = \pm\infty$

$$\int_{+\infty}^{-\frac{n\lambda^2}{H^2}} = KH$$

t. Diese Wahrscheinlichkeit ist also $= \frac{1}{2}$, wenn

$$\frac{\lambda\gamma_n}{H} = \varrho, \quad \lambda = H\frac{\varrho}{\gamma_n}$$

t, und folglich 1 gegen 1 zu wetten, daß der wahre Werth von h zwischen den Grenzen

$$H\left(1-\frac{\varrho}{\gamma_n}\right), \; H\left(1+\frac{\varrho}{\gamma_n}\right)$$

ege. Da ferner $\varrho = rh$, $\varrho = RH$ ist (89. 90.); so t $rh = RH$, $r = \frac{RH}{h}$; und folglich auch 1 gegen 1 zu etten, daß der wahre Werth von r zwischen den Grenzen

$$\frac{RH}{H\left(1-\frac{\varrho}{\gamma_n}\right)}, \; \frac{RH}{H\left(1+\frac{\varrho}{\gamma_n}\right)}; \text{ d. i. } \frac{R}{1-\frac{\varrho}{\gamma_n}}, \; \frac{R}{1+\frac{\varrho}{\gamma_n}}$$

der, wenn man diese Brüche in Reihen entwickelt, wegen er Kleinheit von $\frac{\varrho}{\gamma_n}$ zwischen den Grenzen

$$R\left(1-\frac{\varrho}{\gamma_n}\right), \; R\left(1+\frac{\varrho}{\gamma_n}\right)$$

ege.

Wir haben also folgende Formeln

$$S = \Delta^2 + \Delta'^2 + \Delta''^2 + \Delta'''^2 + \ldots$$

Wahrscheinlichster Fehler der Beobachtungen $=$

$$R = 0{,}6744897\sqrt{\frac{S}{n}} \quad (90.).$$

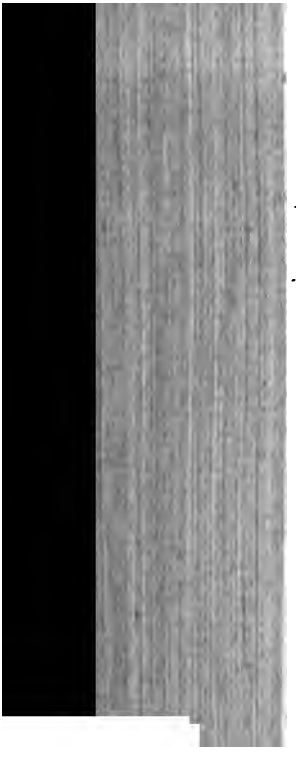
Wahrscheinlichster Fehler des aus den Beobachtungen nach m arithmetischen Mittel gezogenen Resultats $= \frac{R}{\gamma_n}$ (87.). Wahrscheinlichste Grenze des Beobachtungsfehlers

$$= R\left\{1 \pm \frac{0{,}4769363}{\gamma_n}\right\}.$$

Wahrscheinlichste Unsicherheit von R also

$$= \frac{0{,}4769363\,R}{\gamma_n}.$$

Littrow (Theoret. u. pract. Astron. I. Wien. 21. S. 266.) fand für die Breite der Ofener Sternwarte folgende 10 Resultate:



kann man gleich bei
Mittel annehmen.

$$R = 0{,}67449$$

92. Eine weiter
ſtandes verſtattet hi
durch Entwickelung
lage aller Anwendu
auf die Naturwiſſen
macht. Die eigent
ſtudiren muß, ſind
lestium. Hamburg
lungen von Gauß
und der Zeitſchrift
neueſten hierher geh
ria Combinationis
obnoxiae. Gott. 1
combinationis ob
noxiae. Gott. 182
werden, ſie verdien

Beobachtungen. Mitau. 1819. Zwei Abhandlungen von Plana in den Mém. de Turin. 1811. p. 355. und der Zeitschrift für Astron. Thl. VI. S. 250. Phil. Transact. 1819. p. 77. Annales d. Math: T. XII. p. 181. Eine Abhandlung von Svanberg in den Kongl. Vetensk. Academiens Handlingar. 1821. p. 388. Der Art. Milieu in der franz. Enc. Gehlers phys. Wörterb. Neue Aufl. Art. Beobachtung v. Muncke. Thl. I. S. 901. Eine Recension von v. Riese in den Jahrb. für wiss. Kritik. Febr. 1830. S. 269. Vorzüglich auch Laplace Théorie anal. d. prob. Suppl. Zu bemerken ist noch, daß noch ehe Gauß seine Methode (deren er sich schon seit 1795 bei der Berechnung der Planetenbahnen bedient hat) in der Theoria motus etc. l. c. bekannt machte, Legendre auf das Princip der kleinsten Quadratsummen aufmerksam gemacht hat (Nouv. methodes pour la determination des orbites des cometes etc. Paris. 1806.). Durch die weitere Entwickelung und die innige Verbindung mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist sie aber ganz das Eigenthum von Gauß geworden, der sie übrigens auch, wie oben erwähnt, schon seit 1795 angewandt hat.

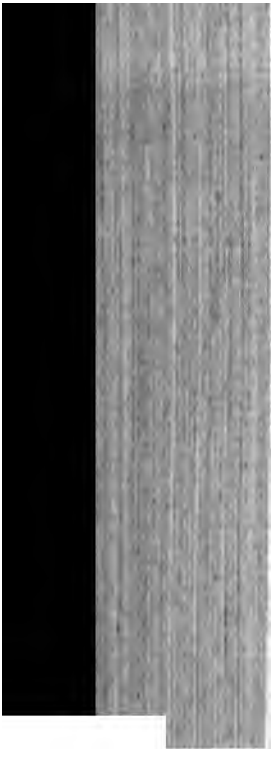
Literatur.

93. Aus dem folgenden Verzeichniß der wichtigsten über Wahrscheinlichkeitsrechnung erschienenen Schriften wird man zugleich die Männer erkennen, welche sich um dieselbe am meisten verdient gemacht haben.

Die ersten Aufgaben über die Glücksspiele haben Pascal und Fermat gegen die Mitte des 17ten Jahrhunderts aufgelöst, und dadurch den Grund zur Wahrscheinlichkeitsrechnung gelegt. Dabei machte sich auch der Ritter Méré bekannt, welcher Pascal einige Aufgaben dieser Art vorlegte. Besonders wichtig in dieser Zeit ist

Hugenii Tractatus de ratiociniis in ludo aleae, zuerst bekannt gemacht von Schooten im Jahre 1658 in seinen Exercitationes mathematicae.

Auch ist zu bemerken:



Dieſes Werk enthält a
gens mit Anmerkungen.
endung deſſelben durch
noch jetzt mit Recht ſehr

Die Theorie der Gl
ausführlich in einem ebe
ſchätzten Werke:

Essay d'Analyse
Paris. 1713. mit Brie
Bernoulli.

Auch iſt über dieſe
kening der Kanssen
metica en Algebra,
van Lotteryen en In
S. eine Recenſion hier
VII. p. 268.

Sehr wichtig iſt:
Moivre. London.
Schrift deſſelben Verf
Jahre 1711. Moivr
1724. 1756. betrifft di
keitsrechnung auf Leibre

von ihm an: Elemens du calcul des Probabilités, vorzüglich aber Essai sur l'application de l'Analyse à la probabilité des decisions. Auch von Prevoſt führt Lacroix Leçons sur le calcul des probabilités an.

Bei Weitem das wichtigſte und vollſtändigſte Werk über dieſen Gegenſtand iſt aber

Théorie analytique des probabilités par De Laplace. Trois éd. Paris. 1820.,

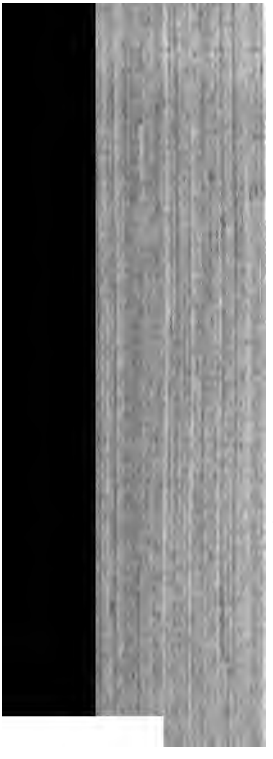
eins der tiefſinnigſten Werke in der Mathematik überhaupt, welches auch viele wichtige rein analytiſche Unterſuchungen, vorzüglich über Annäherungsmethoden, enthält. Wer es ſtudiren will, muß ſchon gute Vorkenntniſſe in der Analyſis mitbringen. Wir haben Einiges aus dieſem ſcharfſinnigen Werke in dieſem Artikel mitgetheilt. Die dritte Ausgabe enthält unter dem Titel Introduction den von Laplace beſonders herausgegebenen, und von Tönnies ins Deutſche überſetzten, Essai philosophique sur les probabilités, nach deſſen vierter Ausgabe, und drei Supplemente, vorzüglich über die Anwendung auf geodätiſche Meſſungen.

Für den erſten Unterricht ſind beſtimmt:

Bicquilley Rechnung des Wahrscheinlichen, übers. v. Rüdiger. Lpzg. 1788.

Lehrbuch der Wahrſcheinlichkeitsrechnung von Lacroix, überſ. von Unger. Erfurt. 1818.

Von den Verdienſten anderer Mathematiker: Euler, d'Alembert, Johann und Daniel Bernoulli, vorzüglich aber Gauß, iſt ſchon oben die Rede geweſen. Durch Auflöſung mehrerer Probleme haben ſich auch beſonders Lagrange, Trembley, L'Huilier verdient gemacht. Ihre und Anderer akademiſche Abhandlungen findet man vollſtändig verzeichnet in Reuss Repertorium commentationum a societatibus literariis editorum. Gott. 1808. T. VII. p. 22 — 29. Die Anwendungen auf Lebensdauer, Leibrenten, Anwartſchaften, Zeugniſſe u. dergl., politiſche Arithmetik überhaupt, gehören nicht hierher, da dieſer Artikel nur die Gründe der Anwendun-



Walze. Ger
Grundfläche.

Wälzung.
in der Geometrie ſolche
den und Epicykloiden be

Wechſelſch
Thl. I. S. 700.

Wechſelsw

Wegſchaffe

Weite des
men Linie, ſ. A

Wendungs
trarii, point d'inflex
den Seiten eines Pun
dieſem Punkte ein W
ſtatt findet, ſo daß n
in ſeiner Nähe die Cu
convex gegen die Abſciſ

den liegt, eine Bemerkung, welche für das Folgende von großer Wichtigkeit ist.

1. Die Abscisse des Punctes P sey $= x$, die Ordinate $PQ = y$, die Subtangente $TQ = \frac{y\partial x}{\partial y}$ (Berührende Linie. 12.). Aendere sich nun x um das sehr kleine $i = Qq$, und sey $pq = y'$, $p'q = z$; so ist nach dem Taylor'schen Satze:

$$y' = y + \frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{i}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\cdot\frac{i^2}{1.2} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\cdot\frac{i^3}{1.2.3} + \cdots.$$

Aber offenbar

$$\frac{y\partial x}{\partial y} : y = \frac{y\partial x}{\partial y} + i : z,$$

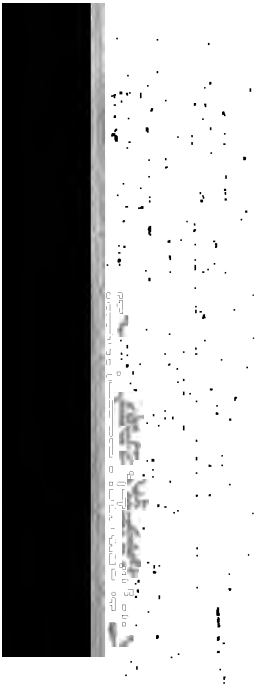
$$z = y + \frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{i}{1}.$$

Folglich

$$y' = z + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\cdot\frac{i^2}{1.2} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\cdot\frac{i^3}{1.2.3} + \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}\cdot\frac{i^4}{1..4} + \cdots.$$

Weil es hier offenbar überhaupt nur auf die in der Nähe von P liegenden Punkte der Curve ankommt, so ist es verstattet, i sich als sehr klein zu denken, und es haben folglich z und y' mit y immer einerlei Vorzeichen.

2. Ist nun zuerst $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ nicht $= 0$, und mit z, also auch mit y, von einerlei Vorzeichen, so ist, weil wegen der Kleinheit von i das Zeichen der zu z addirten Reihe bloß von ihrem ersten Gliede abhängt, der absolute Werth von y' für positive und negative i größer als der absolute Werth von z, folglich offenbar die Curve in dem Punkte P gegen die Abscissenaxe conver. Hat aber $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ mit z und y entgegengesetztes Vorzeichen, so ist der absolute Werth von y' für positive und negative i kleiner als der absolute Werth von z, und demnach die Curve in dem Punkte P gegen die Abscissenaxe concav. In keinem dieser beiden Fälle findet also ein Wendungspunkt statt, sondern es muß vielmehr, wenn P ein solcher Punkt ist, ein Uebergang der Werthe des Differentialquotienten $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ von dem Positiven zum Negativen, oder vom Negativen zum Positiven, statt finden.



kann. Ist aber

$$y = \frac{A + Bx^{\alpha} +}{A' + B'x^{\alpha'} +}$$

wo auch α', β', γ', δ
nen; so sind, indem y
oder umgekehrt, überge
der behält nämlich bei d
sein Zeichen und der Zäh
Zähler behält das Zeich
selbe. Im ersten Fall
der Zähler, also auch d
Positiven zum Negativ
zweiten Falle dagegen
durch o, die Function
ven zum Negativen, o

Hieraus erhellet nu
punkt ist, immer entwe
Man darf dies aber ni

$$\ldots x. \frac{\partial^2 y}{\ldots} = \ldots$$

ungspunkt; im letztern Falle dagegen eine Spitze, wie ;icht erhellet. Man kann, um diese Untersuchung zu er- ;ichtern, den Anfang der Coordinaten auch in den Punkt) verlegen, und die Ordinate nach steigenden Potenzen er neuen Abscisse entwickeln, wo denn die kleinen positi- en und negativen Abscissen selbst die Stelle der obigen ;ncremente vertreten. M. vergl. Rückkehrpunkt (12.).

3. Sey z. B.

$$y = \frac{ax^2}{a^2 + x^2}$$

e Gleichung der gegebenen Curve, so erhält man leicht:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{2a^3x}{(a^2 + x^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{2a^5 - 6a^3x^2}{(a^2 + x^2)^3}.$$

Setzte man den zweiten Differentialquotienten $= \frac{1}{0}$, wäre $x^2 + a^2 = 0$, $x = a\sqrt{-1}$, d. i. imaginär, oraus sich also kein Wendungspunkt ergiebt. Setzt man ber diesen Differentialquotienten $= 0$, so ist $2a^5 - a^3x^2 = 0$, $3x^2 = a^2$, $x = \pm\frac{a}{\sqrt{3}}$, welchen beiden bscissen also Wendungspunkte oder Spitzen entsprechen. Setzt man nun nach der in (2.) angegebenen Vorschrift $= x' \pm \frac{a}{\sqrt{3}}$, so ist klar, daß, indem man dem x' posi- ve und negative Werthe beilegt, y nie imaginär wird, nd folglich der bestimmte Punkt in der That ein Wen- ungspunkt ist.

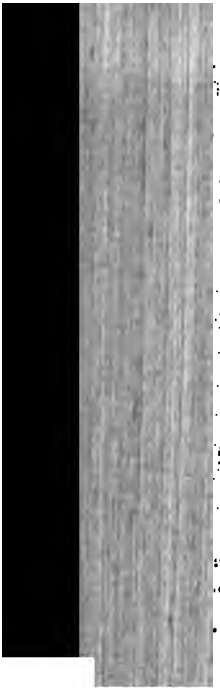
Ueber den Wendungspunkt der Conchoide s. m. diesen rt. Thl. I. S. 535. ff.

4. Bei polaren Coordinaten φ, z ist, wenn wir den nfangsradius als Axe, den Pol als Anfang der Abscis- n annehmen:

$$x = z\cos\varphi, \quad y = z\sin\varphi;$$
$$\partial x = \cos\varphi\partial z - z\sin\varphi\partial\varphi, \quad \partial y = \sin\varphi\partial z + z\cos\varphi\partial\varphi;$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\sin\varphi\partial z + z\cos\varphi\partial\varphi}{\cos\varphi\partial z - z\sin\varphi\partial\varphi} = \frac{\sin\varphi\frac{\partial z}{\partial\varphi} + z\cos\varphi}{\cos\varphi\frac{\partial z}{\partial\varphi} - z\sin\varphi}.$$

)ifferentlirt man nun nach φ, so erhält man nach einigen ichten Reductionen



ist:

$$\frac{\partial}{\partial}$$

Da nun für de
quotient $= 0$,

oder

$$\cos\varphi$$

setzen. Im letz
$\frac{\partial x}{\partial y} = 0$, also au
13.) die Subtra
auf dem Anfang
In diesem Falle
werden, ob die C
den Seiten oder

ſt. Er nimmt das Differential ∂x conſtant, welches nicht ngeht, da es von zwei veränderlichen Größen abhängt.

5. Jacob Bernoulli beſchäftigt ſich in den Act. rud. 1691. p. 13. Opp. T. I. p. 436. mit dem Wen- ungspunkte der paraboliſchen Spirale. Die Gleichung ieſer Curve iſt (Spirale. 78.)

$$ar\varphi = (r-z)^2 ,$$

enn nur hier z ſtatt des dortigen y geſetzt wird. Alſo

$$ar = -2(r-z)\frac{\partial z}{\partial \varphi} , \frac{\partial z}{\partial \varphi} = -\frac{ar}{2(r-z)} ;$$

$$o = -2(r-z)\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} + 2\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 ;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{r-z}\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 = \frac{a^2 r^2}{4(r-z)^3} .$$

olglich

$$z^2 - \frac{a^2 r^2 z}{4(r-z)^3} + \frac{a^2 r^2}{2(r-z)^2} = o ,$$

$$4(r-z)^3 z^2 - a^2 r^2 z + 2a^2 r^2 (r-z) = o ,$$

$$4(r-z)^3 z^2 - 3a^2 r^2 z + 2a^2 r^3 = o ,$$

$$4z^5 - 12rz^4 + 12r^2 z^3 - 4r^3 z^2 + 3a^2 r^2 z - 2a^2 r^3 = o ,$$

der, wenn man $r - z' = z$ ſetzt:

$$4z'^5 - 8rz'^4 + 4r^2 z'^3 + 3a^2 r^2 z' - a^2 r^3 = o .$$

Dieſelbe Gleichung findet Jacob Bernoulli a. . O. (Opp. T. I. p. 437.). Ihre möglichen Wurzeln eben die Ordinaten, bei welchen ein Wendungspunkt oder twa eine Spitze (ſ. 2.) ſtatt findet. Für die Punkte, o die Berührende auf dem Anfangsradius ſenkrecht iſt, rhält man aus der Gleichung $\text{tang}\,\varphi = \frac{\partial z}{z\partial \varphi}$ leicht

$$\text{tang}\,\varphi = -\frac{ar}{2z(r-z)} ,$$

oraus in Verbindung mit der Gleichung $ar\varphi = (r-z)^2$, urch Elimination die entſprechenden φ und z beſtimmt erden müſſen. Aus der Thl. IV. Tab. XXVII. Fig. 40. ezeichneten Geſtalt der Curve erhellet aber leicht, daß bei den auf dem Anfangsradius ſenkrechten Berührenden die Curve nicht auf beiden Seiten dieſer Berührenden liegt, und die entſprechenden Punkte folglich keine Inflexionspunkte ſind.

In dem Art. Spirale (83.) iſt wegen des Wendungs- punktes der Parabola helicoides auf dieſen Artikel ver- wieſen worden.

Wiederkehren

Wiederkehrpu

Willkührliche
Differentialgleichunge

Willkührliche

Wilsons Th

Winkel. W
(Fig. 158.) in einer
ſie offenbar rückſichtl
Größe dieſer Verſchie
von einander wird d
Winkel beſtimmt,
gewöhnlich einen eb
man aber die Abweich
in Bezug auf die gege
man dieſelbe entweder
Richtung $\alpha'\beta'$ betrach
Punkte zuſammenſtoß
zwei Winkel mit einar

haben, oder einen gewissen Winkel mit einander ein-
eßen werden. Solche Winkel nennt man gestreckte
gerade Winkel. Jeder Winkel, welcher klei-
als ein gestreckter ist, heißt ein concaver, jeder
ıkel dagegen, welcher größer als ein gestreckter ist,
convexer Winkel. Zwei in einem Punkte zusam-
stoßende gerade Linien schließen demnach immer ent-
er zwei gestreckte, oder einen concaven und einen con-
n Winkel mit einander ein. Alle gestreckte Winkel sind
nbar einander gleich, indem die Linie AC augenschein-
in jedem Falle, wo sie einen gestreckten Winkel be-
eben hat, einen gleichen Weg zu durchlaufen hat. Die
fte eines gestreckten Winkels heißt ein rechter Win-
so daß also offenbar auch alle rechte Winkel einander
) sind. Der rechte Winkel wird in der Geometrie
) R bezeichnet. Ein gestreckter Winkel ist also $= 2R$,
concave Winkel $< $, jeder convexe Winkel $> 2R$.
Summe der beiden von zwei in einem Punkte zusam-
toßenden geraden Linien eingeschlossenen Winkel ist
ıach immer $= 4R$.

Die beiden geraden Linien, welche einen ebenen Win-
inschließen, heißen seine Schenkel, der Punkt, in
)em sie zusammenstoßen, sein Scheitel oder seine
itze. Die Größe eines Winkels hängt offenbar nicht
der Länge seiner Schenkel ab, sondern bloß von deren
nung oder Abweichung von einander. Bezeichnet wird
Winkel durch die drei Buchstaben an der Spitze und
en Schenkeln, so daß ersterer in der Mitte steht; durch
ı kleinen in die Oeffnung des Winkels gesetzten Buch-
n; oder, wenn an derselben Spitze nicht mehrere
kel liegen, auch bloß durch den Buchstaben an der
ze. Zu wünschen wäre die Einführung einer Bezeich-
ı, durch welche unterschieden würde, ob man den von
Linien eingeschlossenen concaven oder convexen Winkel
ıt. Vielleicht könnte man im letztern Falle einen klei-
Bogen über das Zeichen des Winkels, und im Fall
s gestreckten Winkels einen geraden Strich darüber
ı.

ein haben, und deren beide andere
ße aus entgegengesetzt in gerader L
benwinkel. Jede zwei Nebenw
men offenbar immer einen gestreckte
= 2R. Winkel am Mittelp
winkel heißen in der Lehre vom
nkel, deren Spitzen im Centro des K
an der Peripherie oder Pe
solche, deren Spitzen in der Peri
n Schenkel Sehnen des Kreises sind
der übrigen ebenen Winkel s. m. an

Die Einheit des Winkelmaaßes ist
nderlichen Größe der rechte Winkel.
lichst zu vermeiden, theilt man den
gleiche Theile, welche man Grade
0 Minuten, die Minute in 60
er in 60 Tertien, u. s. f., un
aßtheile durch, °, ′, ″, ‴, won
. 45° 6′ 17″ 25‴ leicht werden gele
der neuen französischen Maaßeinric
rechten Winkel in 100 Grade, den G
die Minute in 100 Secunden, u.

=Minuten, =Secunden u. ſ. f. als der Winkel Winkel=Grade, =Minuten, =Secunden u. ſ. f. enthält. Hierauf beruht die Meſſung der Winkel durch Bogen. Die Bogen=Grade, =Minuten, =Secunden, u. ſ. f. dienen eigentlich bloß, die in dem entſprechenden Winkel enthaltenen Winkel=Grade, =Minuten, =Secunden u. ſ. f. zu zählen. Ein rechter Winkel iſt alſo $= 90^0$, ein geſtreckter $= 180^0$, jeder concave Winkel $< 180^0$, jeder geſtreckte $> 180^0$, jeder ſpitze Winkel $< 90^0$, jeder ſtumpfe $> 90^0$; zwei Nebenwinkel ſind $= 180^0$.

Stoßen zwei krumme Linien in einer Ebene oder im Raume in einem Punkte zuſammen, ſo iſt der von ihnen eingeſchloſſene Winkel kein anderer, als der von den durch den gemeinſchaftlichen Durchſchnittspunkt an die beiden Curven gezogenen Berührenden eingeſchloſſene ebene Winkel. Die Winkel eines ſphäriſchen Dreiecks z. B. ſind die drei ebenen Winkel, welche von den ſechs durch die Spitzen des Dreiecks an ſeine Seiten gezogenen Berührenden an den drei Spitzen eingeſchloſſen werden.

Die Größe der Abweichung zweier in einer geraden Linie zuſammenſtoßenden Ebenen von einander, rückſichtlich ihrer gegenſeitigen Lage, heißt bei franzöſiſchen Schriftſtellern angle dièdre, welches man etwa durch Flächenwinkel überſetzen mag. Der Neigungswinkel zweier Ebenen gegeneinander iſt nach Euclid der ebene Winkel, welchen zwei auf den gemeinſchaftlichen Durchſchnitt der beiden Ebenen durch einen willkührlichen Punkt deſſelben in den beiden Ebenen errichtete Perpendikel mit einander einſchließen. Den Neigungswinkel einer geraden Linie gegen eine Ebene findet man, wenn man von einem willkührlichen Punkte in jener auf die Ebene ein Perpendikel fällt, und deſſen Fußpunkt mit dem Durchſchnittspunkte der geraden Linie mit der Ebene durch eine gerade Linie verbindet; es iſt der Winkel, welchen dieſe gerade Linie mit der gegebenen einſchließt.

Stoßen mehrere Ebenen in einem Punkte zuſammen, ſo heißt der zwiſchen ihnen enthaltene, auf der einen Seite unbegrenzte, Raum ein körperlicher Winkel. Seine

man die Beſtimmun
ecke und Vielecke, d
Winkel am Mittel
Maaß das ſphäriſch
(86. ff.). Eucli
Summe der ebenen
kel einſchließen, imm

Zu vergleichen
und Triſection des

Winkelmaaß

Winkelmeſſu

kel am einfachſten un
ſeiner Spitze mit ein
ſchreibt, und deſſen
tauſendtheiligen M
Für den Radius kan
gen eine beliebige gar
annehmen. Iſt nu
gemeſſene Radius =

iris. 1820.) geliefert. Das umgekehrte Verfahren ent, Winkel, deren Größe in Graden, Minuten, Se- nden, u. s. f. gegeben ist, auf dem Papiere zu ver- ichnen.

Der Transporteur ist ein in seine 180 Grade, auch ohl halbe Grade, eingetheilter Halbkreis von Messing r, Messung und Zeichnung der Winkel auf dem Papier, e sehr unvollkommnes Instrument, wenn nicht vielleicht e Vernier damit verbunden ist (s. Theilung. 19.), wo- urch aber der Preis sehr erhöhet wird. Die Beschreibung iderer Instrumente zur Winkelmessung gehört nicht in ese Abtheilung unsers Wörterbuchs.

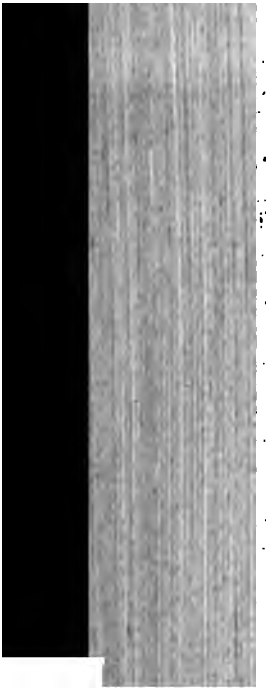
Winkeltheilung. Zur Theilung eines Winkels gleiche Theile durch Rechnung dienen die im Art. Go- lometrie (102.) entwickelten Formeln für $\sin\frac{m}{n}\varphi$ und $\cos\frac{m}{n}\varphi$ durch $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$. Ueber die geometrische latur solcher Theilungen s. m. den Art. Trisection des Winkels. Auch vergl. man Opp. Joh. Bern. T. I. p. 386. 511. Opp. Jac. Bern. T. II. p. 921. Ferner gehört rher ein Programm von Kästner: Unde plures in- nt radices aequationibus sectiones angulorum de- ientibus, auch abgedruckt in dessen Dissertt. math. phys. Altenb. 1771. p. 150. Geometrische Abhand- ngen. II. S. 241. ff.

Würfel, s. Vieleckige Körper, und Delische Auf- be.

Wurzel, heißt überhaupt jeder Werth der unbe- nnten Größe in einer Gleichung. Jeder Werth von x, lcher der Gleichung des nten Grades

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + .. + Mx + N = 0$$

enüge leistet, heißt eine Wurzel derselben. In dem Art. mögliche Größen (32. ff.) ist gezeigt worden, daß jede leichung des nten Grades n Wurzeln hat, und nicht ehr. Einige derselben können imaginär seyn; die imagi- ren Wurzeln sind aber immer paarweise vorhanden (a.



Lehrſatz. Die Wur
Gleichung $x^n = N$,
die nte Potenz erhob
führt auf den einfac
zen. Es iſt nämlich
Grades aus N ein

erhoben, N giebt, u
zeln des 2ten, 3ten,
Cubik- und Biquadr
$\sqrt[3]{N}$, $\sqrt[4]{N}$ bezeichn
zu finden, ſ. m. in

2. Jede möglich
werden, wie leicht e
burgiſche Bezeichnun
Art. 1.) beibehalten

$$^nS = 1 + {}^nA$$
$$^mS = 1 + {}^mA$$

ſo erhält man, wen

$$^nS \cdot {}^mS = 1 + {}^n$$

Nach dem binomischen Lehrsatze für positive ganze Exponenten, welcher bekanntlich sehr leicht durch bloße Multiplication bewiesen werden kann, ist, wenn n eine positive ganze Zahl ist:

$$^{n}S = (1+x)^{n}.$$

Setzen wir nun, unter derselben Voraussetzung, $m = -n$, so ist

$$^{n}S.\,^{-n}S = {}^{n-n}S = {}^{0}S = 1,\quad {}^{-n}S = \frac{1}{^{n}S} = \frac{1}{(1+x)^{n}}.$$

^{-n}S wird aus ^{n}S erhalten, wenn man $-n$ für n setzt; also muß auch, nämlich in Bezug auf diese Reihen, $\frac{1}{(1+x)^{n}}$ aus $(1+x)^{n}$ erhalten werden, wenn man $-n$ für n setzt. Dies hat auf die sogenannten Potenzen mit negativen Exponenten geleitet. $(1+x)^{-n}$ ist nichts anders, als eine neue Bezeichnung für den Bruch $\frac{1}{(1+x)^{n}}$.

Nach der obigen allgemeinen Relation erhält man leicht:

$$^{n}S.\,^{n}S = (^{n}S)^{2} = {}^{n+n}S = {}^{2n}S,$$
$$^{2n}S.\,^{n}S = (^{n}S)^{3} = {}^{2n+n}S = {}^{3n}S,$$
$$^{3n}S.\,^{n}S = (^{n}S)^{4} = {}^{3n+n}S = {}^{4n}S,$$

u. s. f. u. s. f.

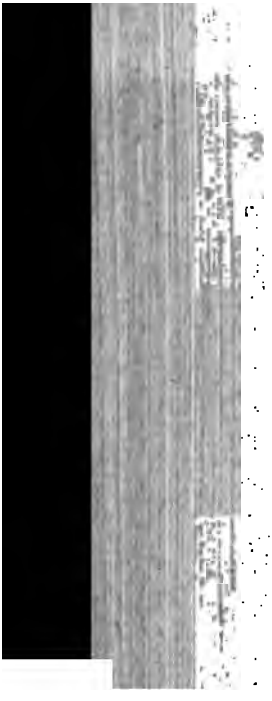
Also für jedes n und jedes ganze positive m:

$$(^{n}S)^{m} = {}^{mn}S.$$

Sey nun $n = \frac{\alpha}{\gamma}$, wo α eine willkührliche positive oder negative ganze Zahl, γ aber eine positive ganze Zahl seyn soll; so ist

$$(^{n}S)^{\gamma} = (^{\frac{\alpha}{\gamma}}S)^{\gamma} = {}^{\frac{\alpha\gamma}{\gamma}}S = {}^{\alpha}S,$$

und folglich offenbar $^{\frac{\alpha}{\gamma}}S$ ein Werth von $\sqrt[\gamma]{^{\alpha}S}$. Aber nach dem Obigen $^{\alpha}S = (1+x)^{\alpha}$. Also $^{\frac{\alpha}{\gamma}}S$ ein Werth von $\sqrt[\gamma]{(1+x)^{\alpha}}$. Es wird aber $^{\frac{\alpha}{\gamma}}S$ aus ^{n}S erhalten, wenn man $\frac{\alpha}{\gamma}$ für n setzt; also muß auch, immer nämlich in Bezug auf diese Reihen, $\sqrt[\gamma]{(1+x)^{\alpha}}$ aus $(1+x)^{n}$ er-



gegeben wird. Daß di
gilt, wenn n irrational
jede irrationale Größe ei
alſo für alle n und m:

$$(1+x)^n = ^n$$

$$(1+x)^n.(1+$$

aber auch

$$(1+$$

alſo

$$(1+x)^n.($$

oder für $1 + x = a$,

$$a$$

für jedes n und m. A
lich die ganze ſogenannt
Man ſieht, daß nach d
in dem Falle, wo nid
ſind, natürlich nur für d
die durch S bezeichneten
welche durch den binomi
folgenden Betrachtunge
obige Relation eine mei

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi .$$

Eben ſo iſt

$$(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)(\cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi)) = \cos(n-n)\varphi + i\sin(n-n)\varphi = 1 ,$$

$$\cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi) = \frac{1}{\cos n\varphi + i\sin n\varphi} = \frac{1}{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n} ,$$

d. i. nach der Bezeichnung, welche wir in (2.) kennen gelernt haben,

$$\cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi) = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-n} ,$$

daß alſo für jedes ganze poſitive oder negative n:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$$

t.

4. Wir betrachten nun im Allgemeinen die Größe $\alpha + \beta i$, unter welcher auch für $\beta = 0$ jede reelle Größe nthalten iſt. Daß auf dieſe Form auch jede imaginäre Größe gebracht werden kann, iſt in dem Art. Unmögliche Größen ausführlich gezeigt worden, worauf wir uns hier er Kürze wegen beziehen müſſen. Iſt $\alpha + \beta i = \alpha' + \beta' i$, ſo iſt $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, weil aus dieſer Gleichung

$$\alpha - \alpha' = (\beta - \beta')i, \quad \frac{\alpha - \alpha'}{\beta - \beta'} = i$$

olgt, ſo daß alſo, wenn nicht zugleich $\alpha - \alpha' = 0$, $\beta - \beta' = 0$ wäre, eine reelle Größe einer imaginären Größe gleich wäre, welches ungereimt iſt. Die Größe $\alpha + \beta i$ läßt ſich immer auf die Form

$$\varrho + \beta i = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

ringen. Aus dieſer Gleichung folgt nämlich, wie wir ſo ben geſehen haben,

$$\alpha = \varrho\cos\varphi, \quad \beta = \varrho\sin\varphi ;$$

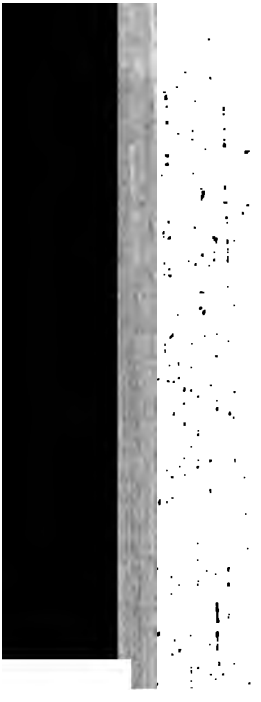
und, wenn man quadrirt:

$$\alpha^2 + \beta^2 = \varrho^2(\cos\varphi^2 + \sin\varphi^2) = \varrho^2 ;$$

alſo $\varrho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, wo für alle Wurzelgrößen immer ie durch den binomiſchen Lehrſatz gegebenen Werthe ſollen eſetzt gedacht werden. Alſo

$$\cos\varphi = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

odurch φ gegeben iſt.



und irgend ein Werth

$$x = 1$$

so ist also

$$\sqrt[n]{(\varrho(\cos\varphi + i\sin$$

woraus, wenn man a
erhebt, augenblicklich:

$$\varrho^m(\cos\varphi + i\sin$$

d. i., weil m, n ganz

$$\varrho^m(\cos m\varphi + i\sin$$

Also (4.)

$$\varrho^m \cos m\varphi = r^m$$

Folglich, wenn man
addirt:

$$\varrho^{2n}$$

Diese Bedingung wir

setzt, wo wir wieder
gebenen Werth dieser

nd folglich für jedes ganze positive oder negative k:

$$((\alpha+\beta i))^{\frac{m}{n}} =$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}}\left(\cos\frac{m\varphi}{n}+i\sin\frac{m\varphi}{n}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right) \quad (3.).$$

Ganz eben so ist

$$((\alpha+\beta i))^{\frac{\mu}{\nu}}$$

$$\varrho^{\frac{\mu}{\nu}}\left(\cos\frac{\mu\varphi}{\nu}+i\sin\frac{\mu\varphi}{\nu}\right)\left(\cos\frac{2\varkappa\pi}{\nu}+i\sin\frac{2\varkappa\pi}{n}\right).$$

Folglich, wenn man multiplicirt:

$$((\alpha+\beta i))^{\frac{m}{n}}\cdot((\alpha+\beta i))^{\frac{\mu}{\nu}} =$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}}\cdot\varrho^{\frac{\mu}{\nu}}\left(\cos\frac{m\varphi}{n}+i\sin\frac{m\varphi}{n}\right)\left(\cos\frac{\mu\varphi}{\nu}+i\sin\frac{\mu\varphi}{\nu}\right)$$
$$\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)\left(\cos\frac{2\varkappa\pi}{\nu}+i\sin\frac{2\varkappa\pi}{\nu}\right).$$

er, weil $\varrho^{\frac{m}{n}}$, $\varrho^{\frac{\mu}{\nu}}$ die durch den binomischen Lehrsatz ge-
enen Werthe dieser Wurzelgrößen sind, nach (2.)

$$\varrho^{\frac{m}{n}}\cdot\varrho^{\frac{\mu}{\nu}} = \varrho^{\frac{m}{n}+\frac{\mu}{\nu}}.$$

o nach (3.), wenn wir der Kürze wegen $k\nu+\varkappa n = k'$
en:

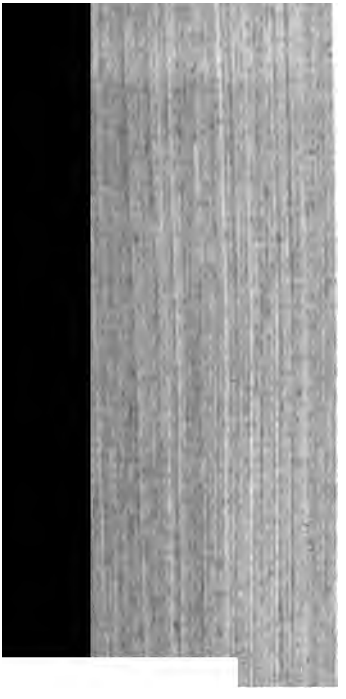
$$((\alpha+\beta i))^{\frac{m}{n}}((\alpha+\beta i))^{\frac{\mu}{\nu}} =$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}+\frac{\mu}{\nu}}\cdot\left\{\cos\left(\frac{m}{n}+\frac{\mu}{\nu}\right)\varphi+i\sin\left(\frac{m}{n}+\frac{\mu}{\nu}\right)\varphi\right\}$$
$$\times\left(\cos\frac{2k'\pi}{n\nu}+i\sin\frac{2k'\pi}{n\nu}\right).$$

er nach dem Obigen

$$((\alpha+\beta i))^{\frac{m}{n}+\frac{\mu}{\nu}} =$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}+\frac{\mu}{\nu}}\cdot\left\{\cos\left(\frac{m}{n}+\frac{\mu}{\nu}\right)\varphi+i\sin\left(\frac{m}{n}+\frac{\mu}{\nu}\right)\varphi\right\}$$
$$\times\left(\cos\frac{2k''\pi}{n\nu}+i\sin\frac{2k''\pi}{n\nu}\right),$$



und $((\alpha + \beta i))$

Werth von $((\alpha +$
ziehung ist also di

allgemein, und g

6. Aus diese
meln, auf denen
beruhet, leicht.
ähnlichen Sinne
geben nur die Be
$-n$ für n, so n

a^m.

eine ebenfalls seh

Ist nun m ei
so ist

$(a^m)^n = a^m$

Folglich auch

ſt m eine beliebige, n eine poſitive ganze Zahl, und m = nα, ſo iſt immer $\sqrt[n]{a^m} = a^\alpha$, weil $(a^\alpha)^n$ nach dem eben Bewieſenen $= a^{n\alpha} = a^m$ iſt.

Dieſe Bemerkungen über die allgemeinen Formeln der otenzen- und Wurzelrechnung mögen hinreichen, und wir ben nur noch einige Formeln zur annähernden Berech- ung irrationaler Wurzeln. In den hier bewieſenen Sätzen ıb auch die allgemeinen Regeln der in den Elementen ſo- nannten Rechnung mit Wurzelgrößen vollſtändig ıthalten.

7. Zur annähernden Berechnung irrationaler Wurzeln enen u. A. die in den Artt. Binomiſcher Lehrſatz (13—9.) und Kettenbruch (53—59.) mitgetheilten Formeln, ıer auch die im Art. Umformung der Reihen (27.) be- ieſene Gleichung:

$$\sqrt[m]{x} = \left\{1 - \frac{1}{mn}\left(\frac{1}{1+x^n}\right) - \frac{mn-1}{mn\,.\,2mn}\left(\frac{1}{1+x^n}\right)^2 - \cdots\right\}$$
$$\left\{1 + \frac{1}{mn}\left(\frac{x^n}{1+x^n}\right) + \frac{mn+1}{mn\,.\,2mn}\left(\frac{x^n}{1+x^n}\right)^2 + \cdots\right\}$$

o n eine ganz willkührliche Zahl iſt, die beliebig angenom- en werden kann.

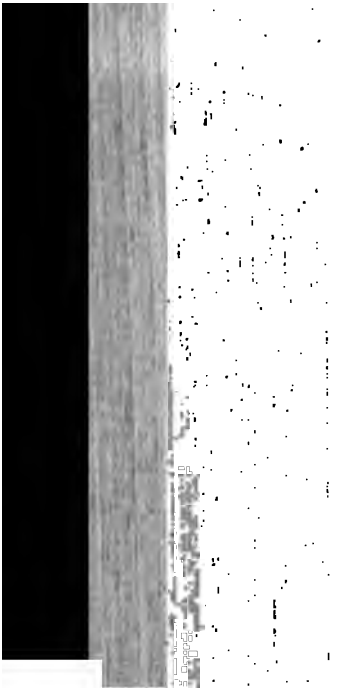
Man kann, um $\sqrt[n]{a}$ zu finden, auch auf folgende Weiſe verfahren. Man wähle eine Zahl k ſo, daß $k^n a$ r nten Potenz einer andern Größe α möglichſt nahe komme, ıd ſetze

$$k^n a = \alpha^n - x,\quad \sqrt[n]{a} = \frac{1}{k}\sqrt[n]{\alpha^n - x}.$$

Soll dieſes Verfahren mit Leichtigkeit angewandt wer- n, ſo muß man im Beſitz ziemlich ausgedehnter Tabellen r Potenzen der Zahlen ſeyn. Nach dem binomiſchen hrſatze erhält man nun leicht

$$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{k}\sqrt[n]{\alpha^n\left(1 - \frac{x}{\alpha^n}\right)} = \frac{\alpha}{k}\left(1 - \frac{x}{\alpha^n}\right)^{\frac{1}{n}}$$
$$= \frac{\alpha}{k}\left\{1 - \frac{1}{n}\cdot\frac{x}{\alpha^n} - \frac{n-1}{n\,.\,2n}\cdot\frac{x^2}{\alpha^{2n}} - \frac{(n-1)(2n-1)}{n\,.\,2n\,.\,3n}\cdot\frac{x^n}{\alpha^{3n}}\right.$$
$$\left. - \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{n\,.\,2n\,.\,3n\,.\,4n}\cdot\frac{x^4}{\alpha^{4n}} - \cdots\right\}.$$

Dieſe Reihe wird, weil x nach der Annahme gegen α^n



$$x\left(1+\frac{by}{a}\right)=a^n+na^{}$$

$$+ya^{}$$

Nun wird y ſo beſt
verſchwinden, ode

$$\frac{n(n-1}{2}$$

wird. Dieß giebt
ſtitution:

$$x\left(1-\frac{n-1}{2}\cdot\frac{b}{a}\right)=a$$

$$x=\left\{\frac{2a+(n+1)}{2a-(n-1)}\right.$$

Das erſte Glied d
zweite zur Prüfu
$n=\frac{1}{3}$ wird,

$$\sqrt[3]{a+b}=$$

Lambert ber

so erhält man nach dem binomischen Lehrsatze mit Anwendung der Hindenburgischen Bezeichnung der Binomial-Coefficienten:

$$A + \sqrt[n]{B} = x^n + {}^nB x^{n-2} y + {}^nD x^{n-4} y^2 + \ldots + \left| {}^nA x^{n-1} + {}^nC x^{n-3} y + {}^nE x^{n-5} y^2 + \ldots \right| \sqrt[n]{y}.$$

Also, wenn man das Rationale dem Rationalen, das Irrationale dem Irrationalen gleich setzt:

$$A = x^n + {}^nB x^{n-2} y + {}^nD x^{n-4} y^2 + \ldots$$
$$\sqrt[n]{B} = \left| {}^nA x^{n-1} + {}^nC x^{n-3} y + {}^nE x^{n-5} y^2 + \ldots \right| \sqrt[n]{y}$$

welches zwei Gleichungen mit den zwei unbekannten Größen x und y sind, durch deren Auflösung diese Größen erhalten werden. Die Elimination führt man am leichtesten auf folgende Art aus. Durch Subtraction erhält man:

$$A - \sqrt[n]{B} = x^n - {}^nA x^{n-1} \sqrt[n]{y} + {}^nB x^{n-2} y - {}^nC x^{n-3} y \sqrt[n]{y} + {}^nD x^{n-4} y^2 - \ldots = (x - \sqrt[n]{y})^n;$$

woraus auch zugleich erhellet, daß immer zu gleicher Zeit

$$\sqrt[n]{(A \pm \sqrt[n]{B})} = x \pm \sqrt[n]{y}$$

ist. Also

$$(A + \sqrt[n]{B})(A - \sqrt[n]{B}) = (x + \sqrt[n]{y})^n (x - \sqrt[n]{y})^n;$$
$$A^2 - B = (x^2 - y)^n, \quad \sqrt[n]{(A^2 - B)} = x^2 - y;$$
$$y = x^2 - \sqrt[n]{(A^2 - B)}.$$

Diesen Werth von y setze man in die rationale Gleichung

$$A = x^n + {}^nB x^{n-2} y + {}^nD x^{n-4} y^2 + \ldots,$$

wodurch man eine rationale Gleichung des nten Grades erhält, durch deren Auflösung x, und folglich mittelst

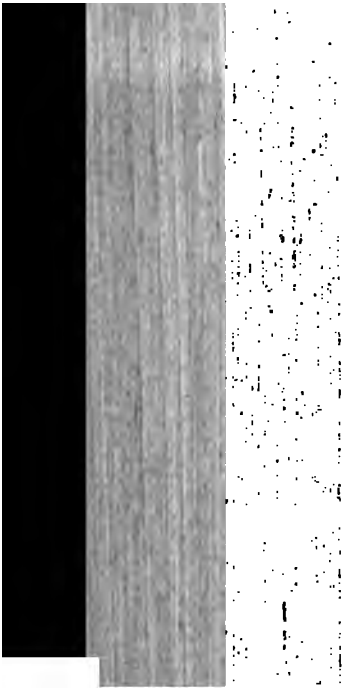
$$y = x^2 - \sqrt[n]{(A^2 - B)}$$

auch y bestimmt wird.

9. Ist das gegebene Binomium von der Form

$$\sqrt[n]{A'} \pm \sqrt[n]{B'},$$

so wähle man Θ so, daß $\sqrt[n]{A'} \cdot \sqrt[n]{\Theta} = \sqrt[n]{A'\Theta}$ rational, und $\sqrt[n]{B'} \cdot \sqrt[n]{\Theta} = \sqrt[n]{B'\Theta} = \sqrt[n]{B}$ ist; so ist



$\sqrt{(A \pm \sqrt{B})} =$

So ist z. B., fü

$A +$
$A = 7$
$\sqrt{(7 +}$

Für

ist $A' = 32$, E
$\Theta = 2$, $A = 8$
16, $x = \sqrt{6}$
$\sqrt[4]{\frac{36}{2}} - \sqrt[4]{\frac{4}{2}} =$

11. Soll m
nach (8.) die Gle

$A =$

wenn wir der K
Also

$A = 8x^4 - 8x^2$

$: 49$, $\sqrt[4]{2401} = 7 = \mathfrak{A}$, $A^2 + \mathfrak{A}^2 = 162$, $\frac{-\mathfrak{A}^2}{5} = \frac{81}{4}$, $\sqrt{\frac{A+\mathfrak{A}^2}{8}} = \frac{9}{2}$. Also

$$(113+72\sqrt{2}) = \sqrt{(\tfrac{9}{2}+\tfrac{7}{2})} + \sqrt{(\tfrac{9}{2}-\tfrac{7}{2})} = 1+\sqrt{8} = 1+2\sqrt{2}.$$

12. Für $\sqrt[3]{(A \pm \sqrt{B})}$ müßte man nach (8.) die Gleichungen

$$A = x^3 + 3xy,\quad y = x^2 - \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{(A^2 - B)},$$

. nach der Elimination von y die Gleichung des dritten ades

$$4x^3 - 3x\sqrt[3]{(A^2 - B)} - A = 0$$

lösen, und y aus obiger Formel bestimmen. Die Wur- r höherer Grade führen eben so auf die Auflösung hö- er Gleichungen, in welchem Verhältnisse natürlich auch Schwierigkeit wächst.

M. s. über diesen Gegenstand Neutoni Arithmetica versalis. §. 84. und Castillons Commentar p. 78. lers Algebra. Thl. I. Cap. 8.; besonders einen Fsatz von Hennert in Hindenburgs Archiv der rei- und angew. Math. Neuntes Heft. S. 50.

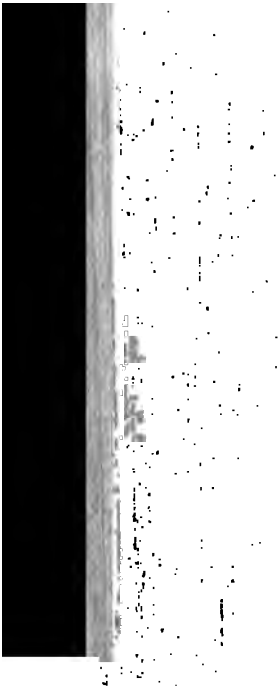
Wurzelgrößen, s. Wurzel (6.).

Wurzelzeichen, s. Wurzel und Zeichen, mathema- e.

Z.

Zähler eines Bruchs, s. Bruch.

Zahl (Numerus). Der Begriff der Zahl entsteht haupt durch die Vorstellung des Neben- oder Beiein- erseyns mehrerer Dinge, welche entweder wirklich völlig ch und gleichartig sind, oder auf deren Verschiedenheit, fern sie zu einer Zahl vereinigt werden sollen, wenigstens e Rücksicht genommen wird; also auch, was dasselbe durch die Vorstellung der Wiederholung oder Vervielung eines und desselben Dinges, welches im Allge-



durch das bloße Neb
bekanntlich die nmali
der Größe A angede
benannte Zahl als ei
ſie auf eine beſtimmte

1. Daß jede be
iſt, und ihr auch ein
kommt, unterliegt
daß auch jede unben
minder oftmalige
gedachten Einheit,
nannte Zahlen rück
einander verbunden
Größe einer benann
der Größe der Einh
auch von der Größ
Zahl n ab. Ueberh
dann mit einander v
auf welche ſie ſich be
gleichartig ſind. Zu

$J = nmM$, $N' = n'm'M$, und die Größe der Zahlen J und N' hängt nun bloß von den unbenannten Zahlen m und n'm' ab. Man kann also diese statt jener setzen, nd mit ihnen alle Rechnungen ausführen, welche mit den enannten Zahlen vorgenommen werden sollten, wenn nur em ebenfalls als unbenannte Zahl erscheinenden Resultate ieder M als Einheit untergelegt wird. Dieß ist auch der Grund, daß die Arithmetik bei allen ihren Operationen bloß nbenannte Zahlen zum Grunde legt, weil, um mit benannten Zahlen rechnen zu können, bloß noch specielle Regeln zur Reduction der verschiedenen Einheiten auf einander, oder zur Auffindung ihres gemeinschaftlichen Maaßes erforderlich sind, welche aber immer von der besondern Beschaffenheit der in Rechnung genommenen Größen abhängen, und eben deshalb der reinen Arithmetik fremd nd, sich aber immer aus der Natur dieser Größen leicht rgeben, wie schon aus den ersten Elementen des Rechens bekannt ist.

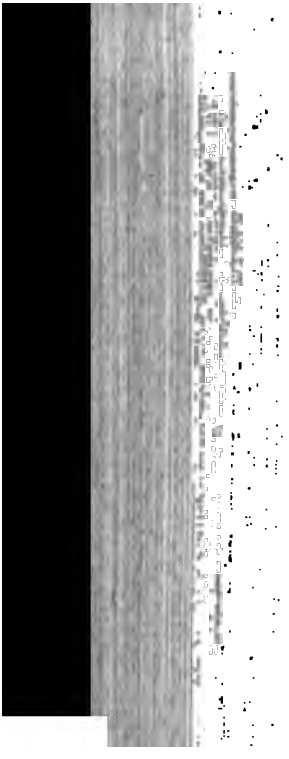
2. Man pflegt zwischen ganzen und gebrochenen Zahlen oder Brüchen zu unterscheiden. Jene entstehen urch unmittelbare Vervielfachung der Einheit, und sind öllig einerlei mit dem, was wir so eben eine Zahl schlechtin genannt haben. Brüche entstehen durch Theilung der Einheit in gleiche Theile, und Vervielfachung eines der erhaltenen Theile. Liegt hierbei eine bestimmte Einheit zum Grunde, so ist der Bruch benannt, sonst unbenannt. Der Unterschied zwischen ganzen Zahlen und Brüchen ist aber urchaus nicht wesentlich, da jeder Bruch, wenn er nur uf eine andere Einheit bezogen wird, auch als ganze Zahl beachtet werden kann, und umgekehrt. Der Bruch $\frac{n}{m}$ A ist die anze Zahl n, auf $\frac{1}{m}$ A = A' als Einheit bezogen; die anze Zahl nA ist der Bruch $\frac{1}{n}$, für nnA = A'' als Einheit. In diesem Artikel werden wir von nun an unter dem Worte Zahl immer die ganze Zahl verstehen.

Vorzüglich bei den ältern Mathematikern findet man ehr viele verschiedene Formen der Zahlen, von denen in einzelnen Artikeln dieses Wörterbuchs besonders gehandelt

gern ſich hinneigende
übermenſchliche Kräft
ägyptiſchen Prieſtern
Zahlenſymbolik. Di
der Nil mit ſieben A
thagoras mag ſie au
lernt haben, und die
ſches Merkmal ſeiner
heißt ſchwören ſiebe
theuern. Zahlen, di
oft vorkommen, ſini
rechnung immer für
die Zahl ſechs, weil
ſo vielen Tagen die Er
bronner hat manch
dern Kapitel: De a
a quibusdam ingen
inventis, ſeiner His
geſammelt. Er führ
der Name des höchſt
ſchrieben wird. Vo
des Virgilius (Sal
linus, Lindenbe

ung. Lpzg. 1827. Nr. 148. 149. Geschichte des Glau-
ens an die Heiligkeit der Zahl Sieben in F. Gedikes
ermischten Schriften. Berlin. 1801. S. 32 — 60.
Durch die Ueberschrift des hierher gehörenden Kapitels in
Kästners Geschichte der Mathematik: „Gelehrter
Land von Zahlen" mag Zweck und Werth vorstehen-
er Bemerkungen angedeutet seyn.

4. Die ganze Zahlenwissenschaft nennt man gewöhnlich
ie Arithmetik. In neuerer Zeit sind jedoch zwei wesent-
ch von einander verschiedene Theile derselben von einander
eschieden worden. Den einen größern, am meisten bear-
eiteten, könnte man den rechnenden oder calculatorischen
ennen, weil der eigentliche Calcul nach allen möglichen
ichtungen Hauptzweck desselben ist, seinen Hauptinhalt
usmacht. Unter der Arithmetik im engern Sinne wird
amentlich dieser Theil verstanden. Er zerfällt wieder in
ehrere einzelne große Wissenschaften, über welche beson-
re Artikel dieses Wörterbuchs hinreichende Belehrung er-
eilen. Der andere Theil der Zahlenwissenschaft dagegen
schäftigt sich, so wie die Geometrie die Eigenschaften der
rschiedenen Formen der ausgedehnten Größe untersucht,
it der Aufsuchung der Eigenschaften der Zahlen, d. i.
mer der ganzen Zahlen, deren es viele höchst merkwür-
ge, zum Theil sehr versteckte, giebt. Man nennt diesen
weig der Arithmetik die Zahlenlehre im engern
Sinne, oder auch sehr passend, nach Legendre's Vor-
nge, die Theorie der Zahlen. Von dieser wichti-
n und hohes Interesse habenden Disciplin einen Abriß
geben, ist der Zweck dieses Artikels. Vollständigkeit
auf so geringem Raume unerreichbar. Die Sätze ohne
eweise zu geben, möchte wenigen Nutzen haben, und
ar höchst unvollständige Belehrung gewähren. Wir ge-
n daher einige der wichtigsten, einflußreichsten und inter-
santesten Theoreme vollständig mit ihren Beweisen, wo-
rch der Leser in den Geist der Wissenschaft eingeführt,
nd zum Studium größerer Werke vorbereitet werden
rd.



r
r

wobei zu bemerken,
$> P$ iſt, poſitiv und
erhält man leicht nac

$$p = Pq + r$$
$$= rqq' + r'q$$
$$= r'qq'q'' +$$
$$= r''qq'q''q'''$$
$$\text{ꝛc}$$

Würde nie ein
$= 0$, ſo würden dieſe
und folglich p durch e
Zahlen ausgedrückt w
muß man irgend ein
Dieſer Reſt ſey $=$
Gleichungen begrenzt

Folglich vorſtehende Gleichungen, wenn man ſie zugleich alle mit Q vervielfältigt:

$$\begin{aligned} pQ &= PQq + rQ \\ PQ &= rQq' + r'Q \\ rQ &= r'Qq'' + r''Q \\ &\cdots\cdots\cdots \\ r^{(n-2)}Q &= r^{(n-1)}Qq^{(n)} + Q . \end{aligned}$$

Ginge nun p in PQ auf, ſo müßte es, wegen der erſten Gleichung, da es in pQ aufgeht, offenbar auch in rQ, folglich eben ſo, wegen der zweiten, in r'Q, und, wegen der dritten, in r''Q aufgehen, u. ſ. f. Setzt man dieſen Schluß fort, ſo erhellet, daß p in Q aufgehen müßte, welches ungereimt iſt, da nach der Vorausſetzung $p > Q$. Alſo kann p nicht in PQ aufgehen.

2. Geht die Primzahl p weder in P, noch in Q auf; ſo geht ſie auch in PQ nicht auf.

Sey

$$P = pp' + r, \quad Q = pq' + r' ;$$

wo r p, r' < p iſt; ſo iſt

$$PQ = p^2p'q' + pq'r + pp'r' + rr' .$$

Ginge nun p in PQ auf; ſo müßte es offenbar auch in rr' aufgehen, welches gegen (1.) iſt.

3. Geht alſo die Primzahl p in PQ auf; ſo muß ſie entweder in P oder in Q aufgehen.

Dieſen Satz, welcher in der Zahlenlehre ſehr geſchätzt wird, hat ſchon Euclides (VII. 32.). Andere Beweiſe geben Legendre (Théorie des nombres. Séc. Edit. p. 3.), und Gauß (Disquisitiones arithmeticae. p. 8. 9.).

4. Geht die Primzahl p in keiner der Zahlen P, Q, R, S, ... auf; ſo kann ſie auch in PQRS .... nicht aufgehen.

p geht in PQ nicht auf (2.); alſo auch in PQR nicht (2.); alſo auch in PQRS nicht (2.); u. ſ. f.

5. Geht alſo die Primzahl p in dem Producte PQRS .... auf; ſo muß ſie in einem ſeiner Factoren aufgehen. Geht

ſo in Q, R, S, ... nic
1.

5. Iſt p mit P, Q, R
ht p in PQRS .... nic
Iſt p abſolute Primzahl
dies aber nicht der Fall;
nzahl iſt. Ginge nun p

$$\frac{PQRS....}{p} =$$

$PQRS... = p'qN$, und
n PQRS ... aufgehen,
R, S, ... relative Pri
aufzugehen; gegen (4.)
7. Geht p, welches n
nzahl iſt, in dem Prod
; p in N aufgehen.
Sey wieder $p = p'q$ u

$$\frac{PQRS...\times N}{p} =$$

$$\frac{PQRS..}{p'}$$

8. Sind p, p' relative Primzahlen, deren jede in P aufgeht; so geht auch pp' in P auf.

Sey $P = pq$, so geht p' in pq, und folglich (7.), weil es mit p relative Primzahl ist, in q auf. Ist also $q = p'q'$; so ist $P = pp'q'$, so daß also pp' in P aufgeht.

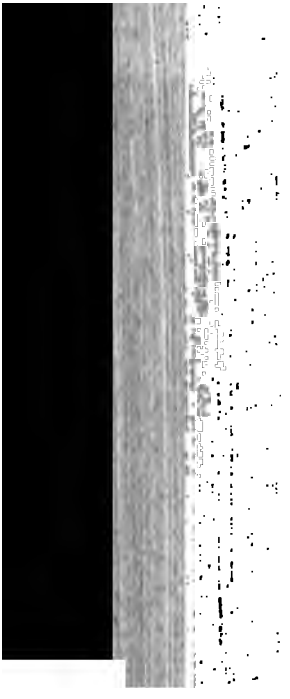
9. Sind p, p', p'', p''', ... relative Primzahlen, deren jede in P aufgeht; so geht pp'p''p''' ... in P auf.

Nach (8.) geht pp' in P auf; pp' und p'' sind relative Primzahlen, weil, wenn dies nicht der Fall wäre, pp' und p'' einen gemeinschaftlichen Primfactor haben müßten, welcher, weil er in pp' aufginge, in p oder p' aufgehen müßte (3.), so daß also p'' und p oder p' nicht relative Primzahlen wären, gegen die Voraussetzung; also geht p'p'' in P auf (8.). Wie man weiter gehen kann, fällt in die Augen.

10. Ist der Bruch $\frac{x}{y}$ auf seine kleinste Benennung gebracht, so sind x, y relative Primzahlen; also ist $\frac{x \cdot x \cdots x}{y} = \frac{x^n}{y}$ keine ganze Zahl (6). Folglich ist auch $z = \left(\frac{x}{y}\right)^n$ keine ganze Zahl, weil, wenn dies der Fall, und $\frac{x^n}{y^n} = z$ wäre, $\frac{x^n}{y} = zy^{n-1}$, d. i. eine ganze Zahl, $= y^n$ würde, gegen das so eben Bewiesene.

11. Die Potenz a^n hat keinen andern Primfactor als a, weil jede Primzahl, die in a nicht aufgeht, auch in a^n nicht aufgeht (4.). Geht daher die Primzahl x in a^n auf; so muß x auch in a aufgehen.

12. Giebt es keine Zahl x, welche $= \sqrt[n]{a}$ ist; so giebt es auch keinen dieser Wurzel gleichen rationalen Bruch. Wäre nämlich $\sqrt[n]{a} = \frac{y}{z}$, und dieser Bruch, die immer angenommen werden kann, auf seine kleinste Benennung gebracht, aber auch nach der Voraussetzung einer ganzen Zahl gleich; so wäre $\left(\frac{y}{z}\right)^n = a$ doch eine ganze Zahl, gegen (10.). Dieser Satz ist für die strenge Theorie der Irrationalzahlen sehr wichtig.



negativen Reſt — ϱ i
und folglich auf ähnlic

$$\frac{a+1}{m}$$
$$\frac{a+2}{m}$$
.
$$\frac{a+(\varrho}{m}$$
$$\frac{a+(\varrho}{m}$$
$$\frac{a+(\varrho}{m}$$
.
$$\frac{a+(n}{m}$$

eine ganze Zahl.

Die beiden Reſte
die kleinſten Reſte de
jedem Falle leicht ge
dem Obigen. Von
beiden kleinſten Reſ

$a - c \equiv mk$, $b - c \equiv mk'$, $(a - c) - (b - c) \equiv a - b \equiv m(k - k')$; also $a \equiv b$.

4. Wenn $a \equiv b$, $a' \equiv b'$, $a'' \equiv b''$, $a''' \equiv b'''$, ... ist; so ist auch

$$a + a' + a'' + a''' + \ldots \equiv b + b' + b'' + b''' + \ldots .$$

Denn es ist nach der Voraussetzung

$$a - b = mk,\ a' - b' = mk',\ a'' - b'' = mk'',\ a''' - b''' = mk''', \ldots;$$

also

$$(a - b) + (a' - b') + (a'' - b'') + (a''' - b''') + \ldots . = m(k + k' + k'' + k''' + \ldots),$$

$$(a + a' + a'' + a''' + \ldots) - (b + b' + b'' + b''' + \ldots) = m(k + k' + k'' + k''' + \ldots),$$

$$a + a' + a'' + a''' + \ldots . \equiv b + b' + b'' + b''' + \ldots$$

5. Ist $a \equiv b$, $a' \equiv b'$; so ist auch $a - a' \equiv b - b'$.

Denn $a - b \equiv mk$, $a' - b' \equiv mk'$; also $(a - b) - (a' - b') \equiv (a - a') - (b - b') \equiv m(k - k')$, d. i. $a - a' \equiv b - b'$.

6. Ist $a \equiv b$, $a' \equiv b'$, $a'' \equiv b''$, $a''' \equiv b'''$, ...; so ist auch

$$aa'a''a''' \ldots . \equiv bb'b''b''' \ldots .$$

Betrachten wir nur den Fall, wenn fünf Congruenzen gegeben sind, weil daran der Beweis schon in seiner Allgemeinheit völlig deutlich werden wird; so erhellet leicht, daß

$$(a - b)a'a''a'''a'''' = aa'a''a'''a'''' - ba'a''a'''a'''',$$
$$b(a' - b')a''a'''a'''' = ba'a''a'''a'''' - bb'a''a'''a'''',$$
$$bb'(a'' - b'')a'''a'''' = bb'a''a'''a'''' - bb'b''a'''a'''',$$
$$bb'b''(a''' - b''')a'''' = bb'b''a'''a'''' - bb'b''b'''a'''',$$
$$bb'b''b'''(a'''' - b'''') = bb'b''b'''a'''' - bb'b''b'''b'''' .$$

Wird nun, indem man wieder $a - b \equiv mk$, $a' - b' \equiv mk'$, $a'' - b'' \equiv mk''$, ... setzt, auf beiden Seiten addirt; so erhält man leicht

$$aa'a''a'''a'''' - bb'b''b'''b''''$$
$$= m\{ka'a''a'''a'''' + bk'a''a'''a'''' + bb'k'a'''a'''' + bb'b''k'''a'''' + bb'b''b'''k''''\},$$

woraus die behauptete Congruenz unmittelbar folgt.

7. Da für jedes α immer $\alpha \equiv \alpha$ ist (1.); so ist, wenn $a \equiv b$ ist, nach dem vorigen Satze immer auch $\alpha a \equiv \alpha b$.

auf die unbeſtimmte

$$\frac{ax + }{}$$

führen, u. ſ. f. U
ten Größen den erſ
Art, wie bei den G
Grade unterſcheiden.
eine Aufgabe der u
woraus zugleich die i
Algebra mit der The

17. Soll die C

A

im Allgemeinen aufl
meinſchaftliches Ma
ſo folgt aus der obig

$$Ax + B$$

d. h. $Ax + B - C$

A

Hätten nun A und
daß $A = eA'$, $p =$

lösbar seyn, so dürfen A und p kein gemeinschaftliches aaß haben.

18. Ist nun p eine nicht in A aufgehende Primzahl, läßt sich zeigen, daß alle die Congruenz

$$Ax + B \equiv C \text{ (Mod. p)}$$

lösenden Zahlen, nach demselben Modulus unter einan- congruent sind.

Seyen α, β irgend zwei Auflösungen unserer Con- enz, also

$$A\alpha + B \equiv C \text{ (Mod. p)}, \quad A\beta + B \equiv C \text{ (Mod. p)};$$

folgt durch Subtraction leicht

$$A(\alpha - \beta) \equiv o \text{ (Mod. p)} \quad (5.).$$

Also geht die Primzahl p in $A(\alpha - \beta)$, und folglich, il sie in A nicht aufgeht, in $\alpha - \beta$ auf (I. β.), so daß o

$$\alpha \equiv \beta \text{ (Mod. p)}.$$

Für jede Congruenz des ersten Grades giebt es also, nn p eine in A nicht aufgehende Primzahl ist, insofern mer nur eine Auflösung, als alle übrigen dieser con- uent sind. Es ist merkwürdig, daß dieser Satz sich auf e Congruenzen aller Grade ausdehnen läßt, wie wir jetzt weisen wollen.

19. Es ist bekanntlich

$$\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}\beta + \ldots + \alpha\beta^{n-2} + \beta_{n-1},$$

ıd folglich immer $\alpha^n - \beta^n$ durch $\alpha - \beta$ theilbar. Be- lchnen wir nun die Function $\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ überhaupt durch $(n - 1)$; so läßt sich leicht zeigen, daß aus der Con- uenz

$$A(\alpha^n - \beta^n) + B(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}) + \ldots + M(\alpha^2 - \beta^2) + N(\alpha - \beta) \equiv o$$

ır die Primzahl p als Modulus, wenn α und β nicht ngruent sind, immer die Congruenz

$$A\varphi(n-1) + B\varphi(n-2) + \ldots + M\varphi(1) + N \equiv o$$

lgt. Die gegebene Congruenz läßt sich nämlich offenbar darstellen:

$$[A\varphi(n-1) + B\varphi(n-2) + \ldots + M\varphi(1) + N](\alpha - \beta) \equiv o,$$

alſo p in dem Produc
$A\varphi(n-1) + B\varphi(n-2)$
)en muß. Da nun α
$\alpha - \beta$ durch p nich
zahl iſt, nach (I. 3.) d
d. i. in Bezug auf p a
$\varphi(n-1) + B\varphi(n-2)$
). Sey nun, wenn p
t, in Bezug auf p als
$Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2}$
it ſich zeigen, daß es
Congruenz geben kann
ılus, nicht unter einan
s gebe $n+1$ nicht un
1
$x = \alpha, \beta,$
gebenen Congruenz, ſ
$A\alpha^n + B\alpha^{n-1} + C\alpha^{n-2}$
$A\beta^n + B\beta^{n-1} + C\beta^{n-2}$
$A\gamma^n + B\gamma^{n-1} + C\gamma^{n-2}$

Setzen wir nun

$$B' = A\alpha + B,$$
$$C' = A\alpha^2 + B\alpha + C,$$
$$D' = A\alpha^3 + B\alpha^2 + C\alpha + D,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$L' = A\alpha^{n-2} + B\alpha^{n-3} + C\alpha^{n-4} + \ldots + L,$$
$$M' = A\alpha^{n-1} + B\alpha^{n-2} + C\alpha^{n-3} + \ldots + L\alpha + M;$$

verwandeln sich durch Entwickelung der Brüche obige ongruenzen in folgende:

$$A\beta^{n-1} + B'\beta^{n-2} + C'\beta^{n-3} + \ldots + L'\beta + M' \equiv o,$$
$$A\gamma^{n-1} + B'\gamma^{n-2} + C'\gamma^{n-3} + \ldots + L'\gamma + M' \equiv o,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$A\mu^{n-1} + B'\mu^{n-2} + C'\mu^{n-3} + \ldots + L'\mu + M' \equiv o,$$
$$A\nu^{n-1} + B'\nu^{n-2} + C'\nu^{n-3} + \ldots + L'\nu + M' \equiv o,$$

ıb es würde also auch für die Congruenz

$$Ax^{n-1} + B'x^{n-2} + C'^{n-3} + \ldots + L'x + M' \equiv o,$$

o p eine nicht in A aufgehende Primzahl ist, n nicht un- r einander congruente Auflösungen $\beta, \gamma, \delta, \ldots \mu, \nu$ ge- :n. Gebe es also unter den Voraussetzungen des Satzes ir eine Congruenz des nten Grades $n+1$ nicht unter nander congruente Auflösungen, so würde es auch für ne Congruenz des $(n-1)$ten Grades n, also für eine ongruenz des $(n-2)$ten Grades $n-1$, u. s. f., für ne Congruenz des ersten Grades zwei untereinander nicht ngruente Auflösungen geben, welches mit (8.) streitet. nser Satz ist also bewiesen.

Ginge p in dem Coeficienten des ersten Gliedes, viel- icht auch noch in denen einiger folgenden Glieder, auf; könnte man offenbar alle diese Glieder weglassen, wo- rch die Congruenz auf einen niedrigern Grad reducirt ürde, wo nun p nicht mehr in dem Coeficienten des er- en Gliedes aufgeht. Ginge p in den Coeficienten aller lieder auf, so wäre die Congruenz identisch.

Einen andern Beweis dieses merkwürdigen und wich- gen Satzes giebt Gauß a. a. O. p. 38., Lagrange in den ém. de Berlin. 1768. p. 192., Euler in den Nov. omm. Petrop. XVIII. p. 93. für den besondern Fall $^n - 1 \equiv o$, Legendre in den Mém. de l'Acad. de aris. 1785. p. 466.

Sind q und q′ zwei zu
ſlöſungen unſerer Cong
d q′ mögen poſitiv od
erthe nach, $q - q' <$
fgeht, d. h. nie $q \equiv q'$
ſerer Congruenz, welche
i liegen, unter einander
glich nie $> n$. Lege
169.) nennt daher vor
$\frac{1}{2}p$ liegenden Auflöſung
ſelben, oder, wenn da
chnet wird, und e über
ſlöſungen oder Wurze
$= e$. Hat man eine d
gt offenbar auch jede Z
ſer unbeſtimmten Gleic
iger Congruenz, wovon
nn man ſich nur dieſen
Potenzen nach dem bino
em dadurch augenſchein

$(k) - (k')|a$ durch p theilbar. Es ist aber a mit relative Primzahl. Folglich muß $(k) - (k')$ durch theilbar seyn (I. 7.). Dies ist aber unmöglich, da, wegen der Voraussetzung, offenbar $(k) - (k') < p$ ist.

Jeder bei der Division der Glieder obiger Reihe durch bleibende Rest ist mit p relative Primzahl.

Sey z. B. $(k)a = pp' + r$, so ist r mit p relative Primzahl, weil, wenn p und r durch die Primzahl $\Theta > 1$ theilbar wären, diese Primzahl auch in $(k)a$, folglich weder in (k) oder in a aufgehen müßte (I. 3.), also weder (k) oder a, gegen die Voraussetzung, mit p nicht relative Primzahl wäre.

Da nun nicht zwei Glieder obiger Reihe in Bezug auf einander congruent, also alle bei der Division derselben durch p bleibenden Reste ungleich, alle diese Reste aber kleiner p und mit p relative Primzahlen sind, ihre Anzahl $= q$ ist; so können diese Reste keine andern, als die Zahlen

$$(1), (2), (3), (4), \ldots (q)$$

, ohne Rücksicht auf deren Ordnung in Bezug auf die obige Reihe.

Also sind immer zwei und zwei Glieder der Reihen

$$(1)a, (2)a, (3)a, (4)a, \ldots (q)a;$$
$$(1), (2), (3), (4), \ldots (q);$$

einander congruent, ohne Rücksicht auf die Ordnung, aber es immer nur je zwei, da nach dem Obigen nie zwei Glieder der ersten Reihe einander congruent sind.

Folglich (II. 6.) ist auch

$$(1)(2)(3)\ldots(q).a^q \equiv (1)(2)(3)\ldots(q) \text{ (Mod. p)},$$
$$(1)(2)(3)\ldots(q).a^q - (1)(2)(3)\ldots(q) \equiv o \text{ (Mod. p)},$$
$$(1)(2)(3)\ldots(q)|a^q - 1| \equiv o \text{ (Mod. p)}.$$

ist aber p mit jedem Gliede der Reihe

$$(1), (2), (3), (4), \ldots (q)$$

tive Primzahl, und muß folglich, da es in

$$(1)(2)(3)\ldots(q)|a^q - 1|$$

geht, in $a^q - 1$ aufgehen (I. 7.). In Worten läßt dieser Satz so aussprechen:

Wenn a und p relativ
ahl der Zahlen bezeichne
Primzahlen ſind; ſo iſ
, oder $a^q \equiv 1$ (Mod.

Zerlegt man p in ſein
$\beta^n \gamma^h \ldots$ iſt; ſo iſt die
und mit p relative Pri

$$= p\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\left(1$$

$$= \alpha^{m-1}(\alpha - 1)\,\beta^{n-1}(\beta$$

heiler einer Zahl. 14.);

$$a^{\alpha^{m-1}(\alpha-1)\,\beta^{n-1}(\beta}$$

ch p theilbar.

Iſt p ſelbſt eine in a
offenbar

1, 2, 3, 4

imzahlen zu p, und al
$= p - 1$, und folgli
r $a^{p-1} \equiv 1$ (Mod. p)

§. 390. Mit dem zweiten, von Lejeune Dirichlet geführten, Beweise stimmt der hier gegebene dem Wesentlichen nach überein; es ist aber hier das Theorem zugleich zu größerer Allgemeinheit erhoben worden (Gauß a. a. O. p. 80.), wodurch seine Anwendung sehr erweitert wird. Auch Leibnitz soll einen Beweis gegeben haben, hat denselben aber nirgends bekannt gemacht; s. Gauß a. a. O. p. 46. in der Note. Mit dem Wilson'schen Theorem zugleich hat endlich auch Lagrange (Mém. de Berlin. 1771. p. 125—137.) den Satz bewiesen, wovon nachher weiter die Rede seyn wird.

Um eine Anwendung des erweiterten Fermat'schen Satzes zu geben, wählen wir eine Aufgabe aus den Annales de Math. T. XIX. p. 256.

Eine aus lauter Neunen und angehängten Nullen bestehende decadische Zahl zu finden, welche durch irgend eine gegebene Zahl theilbar ist.

Die gesuchte Zahl sey

$$Z = \overset{(x)}{9}\ \overset{(x-1)}{9}\ \overset{(x-2)}{9} \ldots \overset{(1)}{9}\ \overset{(0)}{9}\ \overset{(1)}{0}\ \overset{(2)}{0} \ldots \overset{(\gamma)}{0}$$
$$= 9|1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^x|.10^\gamma$$
$$= 9.\frac{10^{x+1}-1}{10-1}.10^\gamma = (10^{x+1}-1).10^\gamma.$$

Sey $p = 2^\mu.5^\nu.\alpha^m\beta^n\gamma^h \ldots$, wo $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ ungleiche Primzahlen sind, welche weder $= 2$, noch $= 5$.

Setzen wir nun

$$x+1 = \alpha^{m-1}(\alpha-1)\,\beta^{n-1}(\beta-1)\,\gamma^{h-1}(\gamma-1)\ldots$$

so ist nach dem erweiterten Satze von Fermat, da 10 mit $\beta^n\gamma^h\ldots$ relative Primzahl ist, $10^{x+1} - 1$ durch $\beta^n\gamma^h\ldots$ theilbar. Ferner setze man,

1) wenn $\nu > \mu$, $\nu = \mu + \lambda$, also $2^\mu.5^\nu = 10^\mu.5^\lambda$ $10^\gamma = 10^\mu.5^\lambda.2^\lambda = 10^\mu.10^\lambda = 10^{\mu+\lambda} = 10^\nu$, $\gamma = \nu$; so ist auch 10^γ durch $10^\mu.5^\lambda = 2^\mu.5^\nu$ theilbar. Ist aber

2) $\mu > \nu$, $\mu = \nu + \lambda'$, $2^\mu.5^\nu = 2^{\nu+\lambda'}.5^\nu = 10^\nu.2^{\lambda'}$; so setze man $10^\gamma = 10^\nu.2^{\lambda'}.5^{\lambda'} = 10^\nu.10^{\lambda'} = 10^{\nu+\lambda'} = 10^\mu$; so ist wieder 10^γ durch $10^\nu.2^{\lambda'} = 2^\mu.5^\nu$ theilbar.

zeichnen wir alſo überhaupt die größere
hlen μ, ν durch $M(\mu, \nu)$, ſo muß n
, ν) ſetzen, damit 10^ν durch $2^\mu . 5^\nu$ theilba

s iſt alſo für

$x = a^{m-1}(a-1)\,\beta^{n-1}(\beta-1)\,\gamma^{h-1}(\gamma-1)\ldots$
$y = M(\mu, \nu)$,

Z durch $p = 2^\mu . 5^\nu . \alpha^m \beta^n \gamma^h \ldots$ theilb
t ſich alſo immer eine aus lauter Neunen u
n Nullen beſtehende decadiſche Zahl finden,
die willkührliche Zahl p theilbar iſt.

ür $p = 2^2 . 5 . 7^3 . 11$ iſt $x = 7^2 . 6 . 11^0 .$
$.60 - 1 = 2940 - 1 = 2939$, $y = N$
, alſo Z beſtimmt. Freilich iſt in dieſem
l der Neunen ſehr groß; aber auch p iſt ſ
htlicher Größe.

. Wenn p eine Primzahl iſt; ſo iſt immer

$$1.2.3.4 \ldots (p-1) \equiv -1 \pmod{p},$$

$$1.2.3.4 \ldots (p-1) + 1$$

1) p ist nach der Voraussetzung eine Primzahl, und
gt bei allen folgenden Congruenzen als Modulus zum
runde.

2) Ist $q^2 \equiv 1$, so ist $q \equiv \pm 1$. Denn $q^2 - 1$
$\equiv 0$, $(q-1)(q+1) \equiv 0$ (II. 5.); also geht p in
$-1)(q+1)$, und folglich, da es eine Primzahl ist,
weder in $q-1$, oder in $q+1$ (I. 3.) auf, so daß also
$\mp 1 \equiv 0$, $q \equiv \pm 1$ ist, immer für p als Modulus.

3) Ist also nicht $q \equiv \pm 1$, so kann auch nicht $q^2 \equiv 1$
n.

4) Wenn p' nicht $= 0$ ist; so können nie zwei Glie-
r der Reihe

$$p-p',\ 2(p-p'),\ 3(p-p'),\ \ldots\ (p-1)(p-p')$$

r p als Modulus einander congruent seyn.

Wäre $k(p-p') \equiv k'(p-p')$, wo $k < p$, $k' < p$
; so wäre auch $(k-k')(p-p') \equiv 0$, und folglich
$-k')(p-p')$, also $k-k'$ oder $p-p'$, durch
Primzahl p theilbar (I. 3.), welches ungereimt ist, da
$-k' < p$, $p-p' < p$ ist.

5) Dividirt man folglich alle Glieder obiger Reihe
rch p; so müssen die bleibenden Reste alle verschieden,
d können also, da offenbar keiner $= 0$, ihre Anzahl
$= p-1$ ist, alle aber $< p$ sind, keine andern als

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots.\ p-1$$

n, wenn nur von der Ordnung der Glieder dieser Reihe,
Bezug auf die vorhergehende, abstrahirt wird.

6) Also muß es in der Reihe

$$p-p',\ 2(p-p'),\ 3(p-p'),\ \ldots\ (p-1)(p-p')$$

mer ein Glied geben, welches $\equiv 1$ ist, aber auch nur
s, da nie zwei Glieder dieser Reihe einander congruent
d (4.).

7) Dieses Glied kann nicht $(p-p')(p-p') \equiv$
$-p')^2$ seyn, wenn nicht $p-p' \equiv \pm 1$ (2,), d. i.,
p' immer $< p$, p' entweder $= p-1$, oder $= 1$ ist.

8) Auch kann dieses Glied, wenn p' weder $= p-1$,
h $= 1$ ist, weder $p-p'$, noch $(p-1)(p-p')$

, weil im erſten Falle
+ 1 durch p theilbar
$\equiv -1$, $p' = p -$
$-p') \equiv 1$, $p(p - p'$
$p - p' + 1$, d. i.
$p - p' + 1 \equiv 0$,
$\equiv 1$, alſo $p' = 1$ ſe
weiſe nie zu vergeſſen,
9) Iſt folglich p' i
1, oder $= p - 1$;
$2(p-p')$, $3(p-$
ner ein Glied, wel
, 4,).
10) Auch kann, wo
$> p'$ iſt, nie $k(p -$
iſt $k(p - p' - p +$
glich $k(p'' - p)$, al
Primzahl p theilbar
eimt iſt, da $k < p$,
11) Aus allem Vor

da aber offenbar p in p aufgeht; so ist

$$1.(p-1)+1 \equiv 0,\ 1.(p-1) \equiv -1 \text{ (II. 5.)};$$

so, wenn man multiplicirt,

$$2.3.4.5 \ldots (p-2).1.(p-1) \equiv 1.(-1) \text{ (II. 6.)};$$

$$\text{d. i. } 1.2.3.4.5 \ldots (p-1) \equiv -1,$$

er $1.2.3.4.5 \ldots (p-1)+1$ durch p theilbar, z. b. w.

3. Unter Voraussetzung des Fermat'schen Satzes und r Differenzenrechnung, oder der Lehre von den arithmetischen Reihen höherer Ordnungen, die aber der Zahlenlehre gewiß eben so fremd sind, wie das Binomialtheorem, ßt sich unser Satz auch auf folgende Art beweisen. Für $-1 = q$ ist

$$1.2.3.4 \ldots q =$$

$$-\frac{q}{1}(q-1)^q+\frac{q(q-1)}{1.2}(q-2)^q-\frac{q(q-1)(q-2)}{1.2.3}(q-3)^q+\ldots$$

rithmetische Reihen höherer Ordnungen. 18. 23.). Diese eihe bricht mit dem qten Gliede ab, da das $(q+1)$te

$$\frac{q(q-1)(q-2)\ldots 3.2.1}{1.2.3.4\ldots q}(q-q)^q.(-1)^q$$

on $= 0$ ist. Nach dem binomischen Lehrsatze ist

$$1-1)^q = 1-\frac{q}{1}+\frac{q(q-1)}{1.2}-\frac{q(q-1)(q-2)}{1.2.3}+\ldots,$$

e Reihe mit $q+1$ Gliedern, deren letztes, da p eine rimzahl, also $q+1=p$, ungerade ist, vorausgesetzt, daß $p > 2$ ist, $= +1$ ist. Zieht man nun die ihe $(1-1)^q-1 = -1$ von der ersten Reihe ab; so. ält man

$$\mp q^q - 1 - \frac{q}{1}\left\{(q-1)^q - 1\right\} + \frac{q(q-1)}{1.2}\left\{(q-2)^q - 1\right\} - \frac{q(q-1)(q-2)}{1.2.3}\left\{(q-3)^q - 1\right\} + \ldots\ldots$$

e Binomialcoefficienten sind, da q eine positive ganze hl ist, positive ganze Zahlen, wie aus der Entstehung er Potenz eines Binomiums mit positivem ganzen Expo-

ugenblicklich erhellet
: $q+1$ ein Theiler
, $(q-1)^n - 1$, $(q-$
1 eine Primzahl, u
$q-3$, ... durch
bar auch
$1.2.3 \ldots q+1 =$
$+1 = p$ theilbar
erhellet die Richtig
1 und $1.0+1$ durc
ſer in der Zahlenle
n Waring Medi
ne Beweis, vor, u
ı John Wilſon
grange in den M
'. Der zweite, au
Théorie des nomb
nit dem oben zuletz
iſ (Traité du calc
rfindung auch Lap

$$(x+p)\{x^{p-1} + A'x^{p-2} + A''x^{p-3} + \ldots + A^{(p-1)}\}$$
$$= (x+1)\{(x+1)^{p-1} + A'(x+1)^{p-2} + A''(x+1)^{p-3} + \ldots + A^{(p-1)}\},$$

da offenbar jedes dieser beiden Producte

$$= (x+1)(x+2)(x+3)\ldots(x+p)$$

ist.

Entwickelt man nun diese beiden Producte nach Potenzen von x, und setzt die Coefficienten gleicher Potenzen von x einander gleich; so erhält man nach einigen leichten Reductionen, mit Anwendung der im Art. Wahrscheinlichkeitsrechnung (29.) gebrauchten Bezeichnung der Binomialcoefficienten, folgende Gleichungen:

$$A' = \left[\frac{p}{2}\right],$$

$$2A'' = \left[\frac{p}{3}\right] + \left[\frac{p-1}{2}\right]A',$$

$$3A''' = \left[\frac{p}{4}\right] + \left[\frac{p-1}{3}\right]A' + \left[\frac{p-2}{2}\right]A'',$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(p-1)A^{(p-1)} = \left[\frac{p}{p}\right] + \left[\frac{p-1}{p-1}\right]A' + \left[\frac{p-2}{p-2}\right]A'' + \ldots + \left[\frac{2}{2}\right]A^{(p-2)}.$$

Alle Binomialcoefficienten sind ganze Zahlen, und, weil p eine Primzahl ist, alle Binomial-Coefficienten der pten Potenz durch p theilbar. Denn es ist, vorausgesetzt, daß q nicht $= o$ ist,

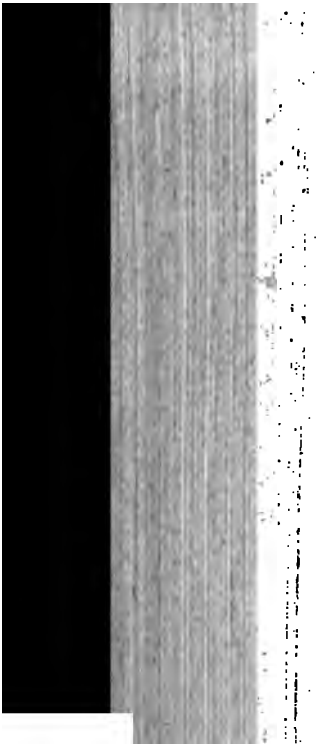
$$\left[\frac{p}{p-q}\right] = \frac{p(p-1)(p-2)\ldots(q+1)}{1.2.3\ldots(p-q)} = e$$

eine ganze Zahl; also

$$(p-1)(p-2)\ldots(q+1) = \frac{1.2.3\ldots(p-q).e}{p}$$

eine ganze Zahl, so daß folglich die Primzahl p in $1.2.3\ldots(p-q).e$, und folglich, weil p offenbar in keinem Factor von $1.2.3\ldots(p-q)$ aufgeht, in e aufgehen muß, so daß also $\left[\frac{p}{p-q}\right]$ durch p theilbar, wenn q nicht $= o$ ist (I. 5.).

Also geht p in A', folglich auch in 2A'', und demnach, weil $2 < p$ ist, auch in A'' auf (I. 5.); also, wegen der obigen Gleichungen, auch in 3A''', und folglich, weil $3 < p$, in A''', u. s. f., so daß also p in



also geht p in x.x.
Wilsonsche Satz ist.

$$(x+1)(x$$
$$x^{p-1} + A'x^{p-2} +$$

$$(x+1)(x+2)($$
$$A'x^{p-2} + A''x$$

ist; so erhellet aus d

$$(x+1)(x+2)($$

aufgeht, oder

$$(x+1)(x+2)(x-$$

ist, welches der v
Satz ist.

Dies gilt für je
durch p theilbar; so
ducts

$$(x+1)(x$$

gewiß immer ein d
$py + \varrho$, wo ϱ, da
$< p$ ist; ist nun ϱ
so ist $x = py +$
folglich $x + p'$ ein
ducts. Ist also x

Wilson'sche und Fermat'sche Satz, sondern auch noch ein allgemeinerer Satz, zugleich gerechtfertigt sind.

4. Ist p keine Primzahl, so ist

$$1.2.3.4 \ldots (p-1) + 1$$

nicht durch p theilbar. Sey $p = qq'$, wo weder q noch $q' = 1$, aber jeder dieser Factoren $< p$ ist, und sey obige Summe durch p theilbar, oder

$$\frac{1.2.3.4 \ldots (p-1) + 1}{qq'} = e,$$

eine ganze Zahl; so wäre auch

$$\frac{1.2.3.4 \ldots (p-1) + 1}{q} = eq'$$

eine ganze Zahl. Da aber $q < p$ ist, so kommt q unter den Factoren des Products

$$1.2.3.4 \ldots (p-1)$$

nothwendig vor, so daß also auch

$$\frac{1.2.3.4 \ldots (p-1)}{p} = e'$$

eine ganze Zahl, und folglich auch

$$\frac{1}{q} = eq' - e'$$

eine ganze Zahl, also $q = 1$ seyn müßte, welches gegen die Annahme.

5. Hieraus ergiebt sich eine allgemeine Methode, zu prüfen, ob irgend eine Zahl p eine Primzahl ist, oder nicht. Man bilde nämlich die Größe

$$1.2.3.4 \ldots (p-1) + 1;$$

so ist p eine Primzahl oder keine, jenachdem diese Größe durch p theilbar ist, oder nicht. In der Ausübung wird aber diese Methode, wenn p auch nur einigermaßen groß ist, sehr weitläufig. Durch eine weit fortgesetzte Tafel der Permutationszahlen (s. Versetzungen. 2.) würde sich aber, wie hieraus erhellet, leicht eine Tafel der Primzahlen bilden lassen.

6. Durch einfache Rechnung überzeugt man sich von der Richtigkeit folgender Gleichungen:

nn a und p relative
der Zahlen bezeichnet,
imzahlen ſind; ſo iſt
er $a^q \equiv 1 \pmod{p}$
legt man p in ſeine
^{h} .... iſt; ſo iſt die A
mit p relative Prim
$= p\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\left(1-\right.$
$: \alpha^{m-1}(\alpha-1)\,\beta^{n-1}(\beta-$
r einer Zahl. 14.);
$\alpha^{\alpha^{m-1}(\alpha-1)\,\beta^{n-1}(\beta-}$
theilbar.
p ſelbſt eine in a n
enbar
1, 2, 3, 4,
ahlen zu p, und alle
$p-1$, und folglich

. 390. Mit dem zweiten, von Lejeune Dirichlet eführten, Beweise stimmt der hier gegebene dem Wesentchen nach überein; es ist aber hier das Theorem zugleich u größerer Allgemeinheit erhoben worden (Gauß a. a.). p. 80.), wodurch seine Anwendung sehr erweitert wird. luch Leibnitz soll einen Beweis gegeben haben, hat denlben aber nirgends bekannt gemacht; s. Gauß a. a. O. . 46. in der Note. Mit dem Wilson'schen Theorem gleich hat endlich auch Lagrange (Mém. de Berlin. 771. p. 125—137.) den Satz bewiesen, wovon nachr weiter die Rede seyn wird.

Um eine Anwendung des erweiterten Fermat'schen Satzes zu geben, wählen wir eine Aufgabe aus den Anales de Math. T. XIX. p. 256.

Eine aus lauter Neunen und angehängten Nullen beehende decadische Zahl zu finden, welche durch irgend eine gebene Zahl theilbar ist.

Die gesuchte Zahl sey

$$Z = \overset{(x)}{9}\,\overset{(x-1)}{9}\,\overset{(x-2)}{9}\ldots\overset{(1)}{9}\,\overset{(0)}{9}\,\overset{(1)}{0}\,\overset{(2)}{0}\ldots\overset{(y)}{0}$$
$$= 9|1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^x|.10^y$$
$$= 9.\frac{10^{x+1}-1}{10-1}.10^y = (10^{x+1}-1).10^y.$$

Sey $p = 2^\mu.5^\nu.\alpha^m\beta^n\gamma^h\ldots.$, wo $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ ngleiche Primzahlen sind, welche weder $= 2$, noch $= 5$.

Setzen wir nun

$$x+1 = \alpha^{m-1}(\alpha-1)\,\beta^{n-1}(\beta-1)\,\gamma^{h-1}(\gamma-1)\ldots.$$

ist nach dem erweiterten Satze von Fermat, da 10 mit $\alpha^m\beta^n\gamma^h\ldots$ relative Primzahl ist, $10^{x+1} - 1$ durch $\alpha^m\beta^n\gamma^h\ldots$ theilbar. Ferner setze man,

1) wenn $\nu > \mu$, $\nu = \mu + \lambda$, also $2^\mu.5^\nu = 10^\mu.5^\lambda$, $10^y = 10^\mu.5^\lambda.2^\lambda = 10^\mu.10^\lambda = 10^{\mu+\lambda} = 10^\nu$, so $y = \nu$; so ist auch 10^y durch $10^\mu.5^\lambda = 2^\mu.5^\nu$ theilar. Ist aber

2) $\mu > \nu$, $\mu = \nu + \lambda'$, $2^\mu.5^\nu = 2^{\nu+\lambda'}.5^\nu =$ $0^\nu.2^{\lambda'}$; so setze man $10^y = 10^\nu.2^{\lambda'}.5^{\lambda'} = 10^\nu.10^{\lambda'} =$ $0^{\nu+\lambda'} = 10^\mu$; so ist wieder 10^y durch $10^\nu.2^{\lambda'} = 2^\mu.5^\nu$ eilbar.

eichnen wir alſo üb
)len μ, ν durch M
ν) ſetzen, damit 10
iſt alſo für
$= a^{m-1}(a-1)\,\beta^{n-1}($
$= M(\mu, \nu)$,
Z durch $p = 2^{\mu}$.
ſich alſo immer eine
: Nullen beſtehende
ie willkührliche Zahl
$: p = 2^2 . 5 . 7^3 . 11$
$60 - 1 = 2940 -$
alſo Z beſtimmt.
der Neunen ſehr gr
tlicher Größe.

Wenn p eine Prim
$1.2.3.4 \ldots (p-$

$1.2.3.4 \ldots$

1) p ist nach der Voraussetzung eine Primzahl, und egt bei allen folgenden Congruenzen als Modulus zum runde.

2) Ist $q^2 \equiv 1$, so ist $q \equiv \pm 1$. Denn $q^2 - 1 \equiv 0$, $(q-1)(q+1) \equiv 0$ (II. 5.); also geht p in $q-1)(q+1)$, und folglich, da es eine Primzahl ist, eweder in $q-1$, oder in $q+1$ (I. 3.) auf, so daß also $\mp 1 \equiv 0$, $q \equiv \pm 1$ ist, immer für p als Modulus.

3) Ist also nicht $q \equiv \pm 1$, so kann auch nicht $q^2 \equiv 1$ yn.

4) Wenn p' nicht $= 0$ ist; so können nie zwei Glie- r der Reihe

$$p-p',\ 2(p-p'),\ 3(p-p'),\ \ldots\ (p-1)(p-p')$$

r p als Modulus einander congruent seyn.

Wäre $k(p-p') \equiv k'(p-p')$, wo $k < p$, $k' < p$ s so wäre auch $(k-k')(p-p') \equiv 0$, und folglich $-k')(p-p')$, also $k-k'$ oder $p-p'$, durch Primzahl p theilbar (I. 3.), welches ungereimt ist, da $-k' < p$, $p-p' < p$ ist.

5) Dividirt man folglich alle Glieder obiger Reihe ch p; so müssen die bleibenden Reste alle verschieden, d können also, da offenbar keiner $= 0$, ihre Anzahl $= p-1$ ist, alle aber $< p$ sind, keine andern als

$$1, 2, 3, 4, \ldots\ p-1$$

n, wenn nur von der Ordnung der Glieder dieser Reihe, Bezug auf die vorhergehende, abstrahirt wird.

6) Also muß es in der Reihe

$$p-p',\ 2(p-p'),\ 3(p-p'),\ \ldots\ (p-1)(p-p')$$

ner ein Glied geben, welches $\equiv 1$ ist, aber auch nur s, da nie zwei Glieder dieser Reihe einander congruent d (4.).

7) Dieses Glied kann nicht $(p-p')(p-p') = -p')^2$ seyn, wenn nicht $p-p' \equiv \pm 1$ (2,), d. i., p' immer $< p$, p' entweder $= p-1$, oder $= 1$ ist.

8) Auch kann dieses Glied, wenn p' weder $= p-1$, ch $= 1$ ist, weder $p-p'$, noch $(p-1)(p-p')$

— 1, oder — p
2(p — p'),
immer ein Glied,
(6, 4,).

10) Auch kann
$p'' > p'$ ist, nie
sonst $k(p - p' -$
folglich $k(p'' - p$
die Primzahl p the
gereimt ist, da $k <$

11) Aus allem
daß, wenn man
2 bis p — 2 giebt

betrachtet, es in di
d. i. eine gerade Za
de Glieder geben
wenn man mit E
Zahlen, deren Pr
oder Gefährten
immer einen Soci
aus den vorher ben
nur einen. De

Da aber offenbar p in p aufgeht; so ist

$$1.(p-1)+1 \equiv 0,\ 1.(p-1) \equiv -1 \text{ (II. 5.)};$$

also, wenn man multiplicirt,

$$2.3.4.5 \ldots (p-2).1.(p-1) \equiv 1.(-1) \text{ (II. 6)};$$

$$\text{d. i. } 1.2.3.4.5 \ldots (p-1) \equiv -1,$$

oder $1.2.3.4.5 \ldots (p-1)+1$ durch p theilbar, w. z. b. w.

3. Unter Voraussetzung des Fermat'schen Satzes und der Differenzenrechnung, oder der Lehre von den arithmetischen Reihen höherer Ordnungen, die aber der Zahlenlehre gewiß eben so fremd sind, wie das Binomialtheorem, läßt sich unser Satz auch auf folgende Art beweisen. Für $p-1=q$ ist

$$1.2.3.4 \ldots q =$$

$$q - \frac{q}{1}(q-1)^q + \frac{q(q-1)}{1.2}(q-2)^q - \frac{q(q-1)(q-2)}{1.2.3}(q-3)^q + \ldots$$

(Arithmetische Reihen höherer Ordnungen. 18. 23.). Diese Reihe bricht mit dem qten Gliede ab, da das $(q+1)$te

$$\frac{q(q-1)(q-2)\ldots 3.2.1}{1.2.3.4\ldots q}(q-q)^q.(-1)^q$$

$= 0$ ist. Nach dem binomischen Lehrsatze ist

$$(1-1)^q = 1 - \frac{q}{1} + \frac{q(q-1)}{1.2} - \frac{q(q-1)(q-2)}{1.2.3} + \ldots,$$

eine Reihe mit $q+1$ Gliedern, deren letztes, da p eine Primzahl, also $q+1=p$, ungerade ist, vorausgesetzt, daß $p > 2$ ist, $= +1$ ist. Zieht man nun die Reihe $(1-1)^q - 1 = -1$ von der ersten Reihe ab; so hält man

$$1.2.3.4 \ldots q+1$$

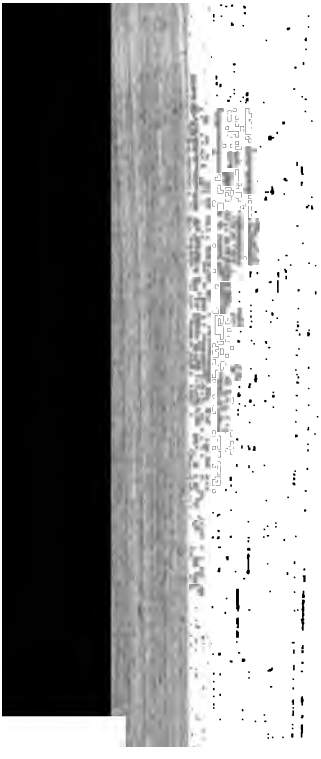
$$= q^q - 1 - \frac{q}{1}\left\{(q-1)^q - 1\right\}$$

$$+ \frac{q(q-1)}{1.2}\left\{(q-2)^q - 1\right\}$$

$$- \frac{q(q-1)(q-2)}{1.2.3}\left\{(q-3)^q - 1\right\}$$

$$+ \ldots\ldots$$

Alle Binomialcoefficienten sind, da q eine positive ganze Zahl ist, positive ganze Zahlen, wie aus der Entstehung jeder Potenz eines Binomiums mit positivem ganzen Expo-



Dieſer in der
zuerſt in Warin
aber ohne Beweis,
gewiſſen John W
gab Lagrange in
— 137. Der zu
mene (Théorie d
lichen mit dem ob
Lacroix (Traité
ſeine Erfindung au
Beweis hat Eule
p. 329.), mit welch
p. 74.) übereinkan
a. a. O.

Der erſte von
nur manches Eige
zugleich auch allge
Grundzügen hier n

Entwickelt man

$$(x+1)($$

nach Potenzen von
von der Form

$$(x+p)\{x^{p-1} + A'x^{p-2} + A''x^{p-3} + \ldots + A^{(p-1)}\}$$
$$= (x+1)\{(x+1)^{p-1} + A'(x+1)^{p-2} + A''(x+1)^{p-3} + \ldots + A^{(p-2)}\},$$

da offenbar jedes dieser beiden Producte

$$= (x+1)(x+2)(x+3)\ldots\ldots(x+p)$$

ist.

Entwickelt man nun diese beiden Producte nach Potenzen von x, und setzt die Coefficienten gleicher Potenzen von x einander gleich; so erhält man nach einigen leichten Reductionen, mit Anwendung der im Art. Wahrscheinlichkeitsrechnung (29.) gebrauchten Bezeichnung der Binomialcoefficienten, folgende Gleichungen:

$$A' = \left[\frac{p}{2}\right],$$

$$2A'' = \left[\frac{p}{3}\right] + \left[\frac{p-1}{2}\right]A',$$

$$3A''' = \left[\frac{p}{4}\right] + \left[\frac{p-1}{3}\right]A' + \left[\frac{p-2}{2}\right]A'',$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(p-1)A^{(p-1)} = \left[\frac{p}{p}\right] + \left[\frac{p-1}{p-1}\right]A' + \left[\frac{p-2}{p-2}\right]A'' + \ldots + \left[\frac{2}{2}\right]A^{(p-2)}.$$

Alle Binomialcoefficienten sind ganze Zahlen, und, weil p eine Primzahl ist, alle Binomial-Coefficienten der pten Potenz durch p theilbar. Denn es ist, vorausgesetzt, daß q nicht $= o$ ist,

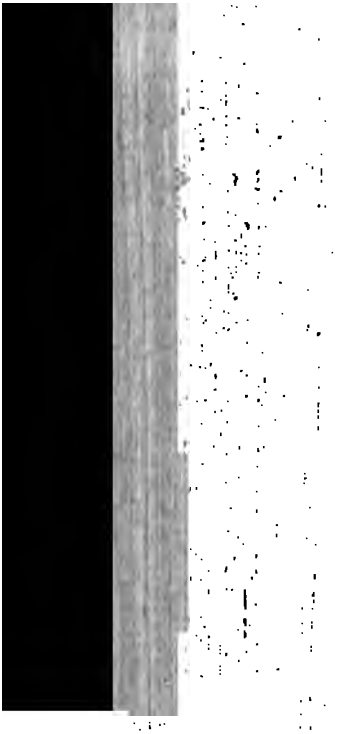
$$\left[\frac{p}{p-q}\right] = \frac{p(p-1)(p-2)\ldots(q+1)}{1.2.3\ldots(p-q)} = e$$

eine ganze Zahl; also

$$(p-1)(p-2)\ldots(q+1) = \frac{1.2.3\ldots(p-q).e}{p}$$

eine ganze Zahl, so daß folglich die Primzahl p in $1.2.3\ldots(p-q).e$, und folglich, weil p offenbar in keinem Factor von $1.2.3\ldots(p-q)$ aufgeht, in e aufgehen muß, so daß also $\left[\frac{p}{p-q}\right]$ durch p theilbar, wenn q nicht $= o$ ist (I. 5.).

Also geht p in A', folglich auch in 2A'', und demnach, weil $2 < p$ ist, auch in A'' auf (I. 5.); also, wegen der obigen Gleichungen, auch in 3A''', und folglich, weil $3 < p$, in A''', u. s. f., so daß also p in



also geht p in 1.2
Wilsonsche Satz is

$$(x+1)($$
$$x^{p-1} + A'x^{p-2}$$
$$(x+1)(x+2)($$
$$A'x^{p-2} + A''$$

ist; so erhellet aus

$$(x+1)(x+2$$

aufgeht, oder

$$(x+1)(x+2)(x$$

ist, welches der
Satz ist.

Dies gilt für
durch p theilbar;
ducts

$$(x+1)$$

gewiß immer ein
$py + \varrho$, wo ϱ,
$< p$ ist; ist nun
so ist $x = py +$
folglich $x + p'$ ein

Wilson'sche und Fermat'sche Satz, sondern auch noch ein allgemeinerer Satz, zugleich gerechtfertigt sind.

4. Ist p keine Primzahl, so ist

$$1.2.3.4 \ldots (p-1) + 1$$

nicht durch p theilbar. Sey $p = qq'$, wo weder q noch $q' = 1$, aber jeder dieser Factoren $< p$ ist, und sey obige Summe durch p theilbar, oder

$$\frac{1.2.3.4 \ldots (p-1) + 1}{qq'} = e,$$

eine ganze Zahl; so wäre auch

$$\frac{1.2.3.4 \ldots (p-1) + 1}{q} = eq'$$

eine ganze Zahl. Da aber $q < p$ ist, so kommt q unter den Factoren des Products

$$1.2.3.4 \ldots (p-1)$$

nothwendig vor, so daß also auch

$$\frac{1.2.3.4 \ldots (p-1)}{p} = e'$$

eine ganze Zahl, und folglich auch

$$\frac{1}{q} = eq' - e'$$

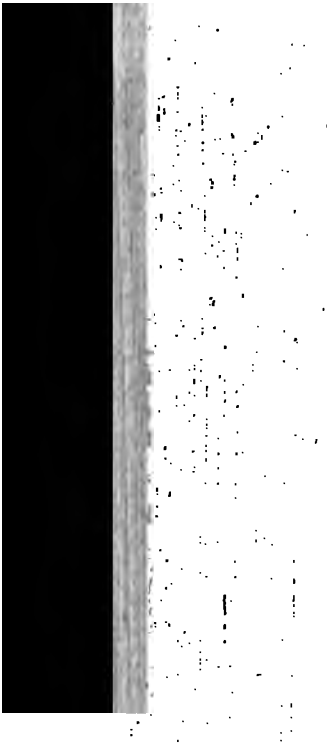
eine ganze Zahl, also $q = 1$ seyn müßte, welches gegen die Annahme.

5. Hieraus ergiebt sich eine allgemeine Methode, zu prüfen, ob irgend eine Zahl p eine Primzahl ist, oder nicht. Man bilde nämlich die Größe

$$1.2.3.4 \ldots (p-1) + 1;$$

so ist p eine Primzahl oder keine, jenachdem diese Größe durch p theilbar ist, oder nicht. In der Ausübung wird aber diese Methode, wenn p auch nur einigermaßen groß ist, sehr weitläufig. Durch eine weit fortgesetzte Tafel der Permutationszahlen (s. Versetzungen. 2.) würde sich aber, wie hieraus erhellet, leicht eine Tafel der Primzahlen bilden lassen.

6. Durch einfache Rechnung überzeugt man sich von der Richtigkeit folgender Gleichungen:



durch eine passende
jeder der folgenden Fo
aufgehen muß:

$$1.2.3.4\ldots$$
$$1^2.2.3.4\ldots$$
$$1^2.2^2.3.4\ldots$$
$$1^2.2^2.3^2.4\ldots$$
$$1^2.2^2.3^2.4\ldots$$
$$1^2.2^2.3^2.4\ldots$$

Hierdurch kann
Zahl p eine Primzahl
dem sich mittelst (5.
keine Primzahl ist, in

7. Für jedes q i

$$1.2\ldots$$
$$1.2.3\ldots(p-q-$$
$$1.2.\ldots$$
$$1.2.3.4\ldots(p-q$$

folglich, wenn wir d
durch $\{p\}$ bezeichnen,

$$\{p-$$

Folglich, wenn ma

Die letzte Congruenz erhellet von selbst. Also durch Multiplication (II. 6.)

$$|1||2| \dots |p-q-1||p-q| \equiv q(q+1)(q+2)..(p-1)|1||2| \dots |p-q-1|.(-1)^{p-q},$$

wo diese Potenz der negativen Einheit nur wegen des Vorzeichens beigefügt worden. Ist nun p eine Primzahl, so geht es in dem Producte

$$|1||2||3| \dots |p-q-1|,$$

wie leicht erhellet, nicht auf (I. 4.), und es ist folglich (II. 12.)

$$|p-q| \equiv q(q+1)(q+2) \dots (p-1).(-1)^{p-q};$$

also auch, wenn man mit

$$1.2.3.4 \dots (q-1) = \{q-1\}$$

multiplicirt (II. 6.),

$$|q-1||p-q| \equiv |p-1|.(-1)^{p-q}.$$

Setzen wir nun

$$q-1 = \frac{p-1}{p},\ p-q = p - \frac{p-1}{2} - 1 = \frac{p-1}{2};$$

so erhält man sogleich

$$\left|\frac{p-1}{2}\right|^2 \equiv |p-1|.(-1)^{\frac{p-1}{2}}.$$

Nach dem Wilson'schen Satze ist aber immer

$$|p-1| \equiv -1,\ |p-1|.(-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv -(-1)^{\frac{p-1}{2}} \text{ (II. 6.)}.$$

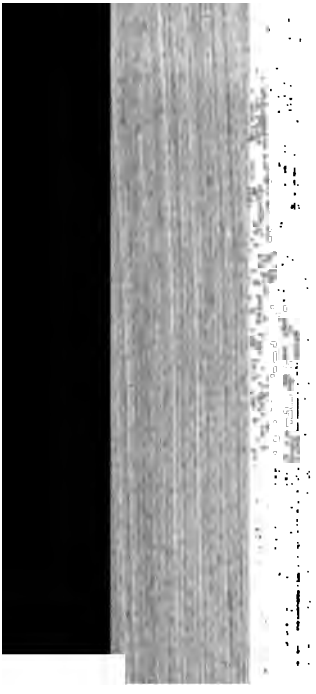
Also auch (II. 3.)

$$\left|\frac{p-1}{2}\right|^2 \equiv -(-1)^{\frac{p-1}{2}};$$

d. i. $\left|\frac{p-1}{2}\right|^2 \equiv -1$, wenn $\frac{p-1}{2}$ eine gerade Zahl, oder p von der Form $4n+1$, und $\left|\frac{p-1}{2}\right|^2 \equiv 1$, wenn $\frac{p-1}{2}$ eine ungerade Zahl, oder von der Form $4n+3$ ist. In letztern Falle also auch immer (2.2,)

$$\left|\frac{p-1}{2}\right| \equiv \pm 1;$$

d. h., wenn p eine Primzahl von der Form $4n+3$ ist, so ist immer



8. Wenn p eine
niedrigern Grade al
nten Grades iſt, wel

aufgeht; ſo giebt es
und $+\frac{1}{2}p$, welche di

auflöſen, oder das
Alle Coefficienten de
ganze Zahlen.

Sey $x^{p-1}+p$
vom Grade $p-n$
iſt $x^{p-1}-1$, alſo
zwiſchen $-\frac{1}{2}p$ und
p theilbar:

$$\pm 1, \pm 2, \pm$$

da p in keinem die
Werthe auch nega
Iſt nämlich $p>2$

t, entweder in P, oder in P'. Nach (II. 20.) ist die An-
ahl der Werthe von x zwischen $-\frac{1}{2}p$ und $+\frac{1}{2}p$, welche
ie Congruenz $P \equiv o$ auflösen, oder P durch p theilbar
nachen, nicht $> n$. Wäre nun ihre Anzahl $< n$, z. B.
$= n - m$, so würde es nach dem so eben Bewiesenen
$-1-(n-m) = p-n-1+m$ Werthe von x zwi-
hen $-\frac{1}{2}p$ und $+\frac{1}{2}p$ geben, welche die Congruenz $P' \equiv$
auflößen. Dies ist aber nicht möglich, da P' nur ein
Polynom vom Grade $p-n-1$ ist, und demnach nicht
ehr als $p-n-1$ Auflösungen der Congruenz $P' \equiv o$
wischen $-\frac{1}{2}p$ und $+\frac{1}{2}p$ zulassen kann (II. 20.). Also
t unter den obigen Voraussetzungen die Anzahl der zwi-
hen $-\frac{1}{2}p$ und $+\frac{1}{2}p$ liegenden Werthe von x, welche die
Congruenz $P \equiv o$ auflösen, oder P durch p theilbar ma-
en, weder $> n$, noch $< n$, d. i. $= n$, w. z. b. w.

9. Wenn p eine Primzahl ist, welche > 2 ist, und
a nicht aufgeht, für irgend einen Werth von x aber
$^2 \equiv a$ (Mod. p) ist; so ist immer

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \text{ (Mod. p)}.$$

Nach der Voraussetzung ist

$$x^2 \equiv a, \text{ also } (x^2)^{\frac{p-1}{2}} \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \text{ (Mod. p) (II. 8.)},$$

i.

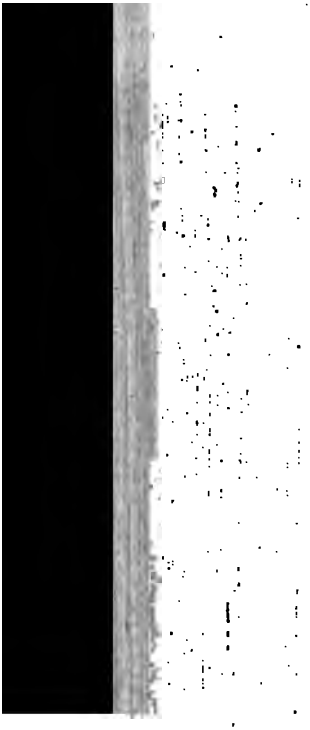
$$x^{p-1} \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \text{ (Mod. p)}.$$

olglich auch

$$x^{p-1} - 1 \equiv a^{\frac{p-1}{2}} - 1 \text{ (Mod. p) (II. 5.)}.$$

a nun p in a nicht aufgeht; so kann es, wegen der Con-
uenz $x^2 \equiv a$, immer für p als Modulus, auch in x^2
cht aufgehen, weil, wegen dieser Congruenz, bei der
ivision von x^2 durch p, und a durch p, gleiche Reste blei-
n müssen. Also geht auch offenbar p in x nicht auf,
daß also nach dem Fermat'schen Satze

$$x^{p-1} - 1 \equiv o \text{ (Mod. p)}.$$



so muß es immer e
welchen

Da $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1$
p theilbar, und ma

$$a^{\frac{p-}{2}}$$

ſetzen, wo α eine
Vorauſetzung $p >$
folglich $= 2q$ geſet

$$x^{p-1} - a^{\frac{p-1}{2}}$$

Aber

$x^{2q} - a^q = (x^2 -$

Alſo geht $x^2 - a$
da $x^2 - a$ vom zw
aufgeht, zwei Wer
che $x^2 - a \equiv 0$ (
dieſe beiden Werth
Zeichens unterſchei
ſo fallen ſie in eine

der $a^{\frac{p-1}{2}} - 1$ durch p theilbar ſeyn (10.). Nun iſt
der

$$a^{p-1} - 1 = \left\{a^{\frac{p-1}{2}} - 1\right\}\left\{a^{\frac{p-1}{2}} + 1\right\},$$

nd nach dem Fermat'ſchen Satze $a^{p-1} - 1$ durch p, nach
m ſo eben Bewieſenen aber $a^{\frac{p-1}{2}} - 1$ nicht durch p
eilbar; alſo muß in dieſem Falle $a^{\frac{p-1}{2}} + 1$ durch p theil-
ar, oder

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \text{ (Mod. p)}$$

yn (I. 3.).

12. Iſt umgekehrt

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \text{ (Mod. p)},$$

nd p wie immer eine nicht in a aufgehende Primzahl > 2;
kann es keinen Werth von x geben, für welchen $x^2 - a$
urch p theilbar, oder

$$x^2 \equiv a \text{ (Mod. p)}$$

Wäre nämlich, für irgend einen Werth von x,

$$x^2 \equiv a \text{ (Mod. p)};$$

wäre

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \text{ (Mod. p) (9.)};$$

er $a^{\frac{p-1}{2}} - 1$ durch p theilbar. Folglich könnte, da
> 2 iſt, nicht $a^{\frac{p-1}{2}} - 1 + 2 = a^{\frac{p-1}{2}} + 1$ durch
theilbar, d. i. nicht

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \text{ (Mod. p)}$$

yn, wie doch angenommen wurde.

13. Iſt demnach p eine nicht in a aufgehende Prim-
hl > 2, ſo geht p in $a^{\frac{p-1}{2}} - 1$ auf, oder es iſt

wenn es keinen Re
durch p theilbar, ob

ist (11.).

Nennen wir n
Bezug auf eine ge
Quadrate congruen
ein Quadrat finden
dividirt, denselben
den Modulus divid
dulus; alle die Z
Beziehung giebt, n
dulus (residua q
tica); so läßt sich
auch so ausdrücken

Wenn p eine i
so ist immer

$$\left(\frac{a}{p}\right)$$

und das obere ode
a quadratischer Res

Auch erhellet

oder

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \text{ (Mod. p)} \quad (12.)$$

ist.

Um noch ein Beispiel zu der vorhergehenden wichtigen Theorie zu geben, so sey $p = 5$, $a = 9$. Dann ist

$$a^{\frac{p-1}{2}} = 9^2 = 81, \quad a^{\frac{p-1}{2}} - 1 = 80;$$

also durch 5 theilbar, oder

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \text{ (Mod. 5)}.$$

Es ist aber auch, für $x = 3$, $x^2 - a = 9 - 9 = 0$ durch 5 theilbar. Für $a = 8$ dagegen wäre

$$a^{\frac{p-1}{2}} = 8^2 = 64, \quad a^{\frac{p-1}{2}} + 1 = 65;$$

also durch 5 theilbar, oder

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \text{ (Mod. 5)}.$$

Also kann es keinen Werth von x geben, für welchen $x^2 - 8$ durch 5 theilbar, oder $x^2 \equiv 8$ (Mod. 5) ist. Ist a selbst ein Quadrat, so folgt aus dem Fermat'schen Satze leicht, daß immer $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1$ (Mod. p), oder $a^{\frac{p-1}{2}} - 1$ durch p theilbar ist.

Nach dem Wilson'schen Theorem ist immer

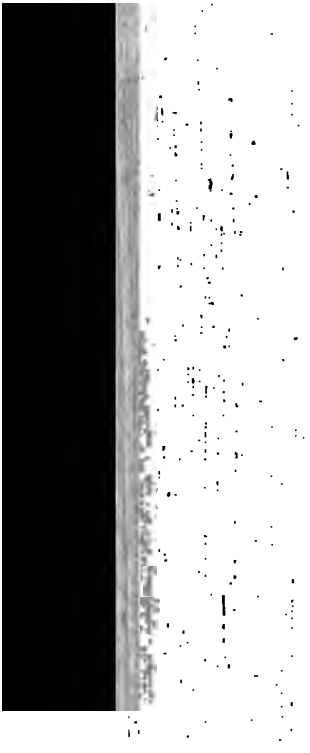
$$1.2.3.4 \ldots (p-1) \equiv -1 \text{ (Mod. p)},$$

Also

$$1.2.3.4 \ldots (p-1) \equiv \mp a^{\frac{p-1}{2}} \text{ (Mod. p)},$$

und das obere oder untere Zeichen zu nehmen, je nachdem a quadratischer oder nicht quadratischer Rest von p ist.

Hier schließen wir nun einen der wichtigsten und merkwürdigsten Sätze der ganzen Zahlenlehre an.



von $a^{\frac{2}{}}$ durch p b
dieſer Bezeichnung l
ſo ausdrücken:

Wenn p, q zw
ſo ſind, wenn p, q
die Reſte $\left(\frac{p}{q}\right)$ und
beide $= -1$;
$4n+3$; ſo iſt imm
der andere $= -$
$\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)$, im

Mittelſt des Z
wichtige Satz ſo aus

Wenn p, q zw
ſo iſt, wenn nicht b

$$p^{\frac{q-1}{2}} \equiv \pm 1$$

wenn aber beide von

$$p^{\frac{q-1}{2}} \equiv \pm 1$$

Daß beide Ausdrü

durch p bleibenden Reste, deren jeder natürlich $< p$ ist, $< \frac{1}{2}p$, ein Theil dagegen $> \frac{1}{2}p$ seyn. Bezeichnen wir nun die Reste der ersten Art durch

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots \alpha_\lambda ;$$

die der andern durch

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \ldots \beta_\mu ;$$

so ist nach Legendre's Bezeichnung,

$$\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^\mu ,$$

dieser Rest nämlich $= +1$, oder $= -1$, jenachdem μ gerade oder ungerade ist; oder, was dasselbe ist,

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^\mu \pmod{p}.$$

Zuerst erhellet, daß die obigen Reste alle unter einander ungleich sind. Wären nämlich irgend zwei einander gleich, und folglich die entsprechenden Glieder der gegebenen Reihe, welche wir durch ka und $k'a$ bezeichnen wollen, einander kongruent, so daß

$$ka \equiv k'a \pmod{p}$$

wäre; so wäre auch

$$(k-k')\,a \equiv 0 \pmod{p} ;$$

folglich $(k-k')a$ durch die Primzahl p theilbar, welches aber nicht möglich ist, da sowohl a nach der Voraussetzung durch p nicht theilbar, als auch $k < \frac{1}{2}p$, $k' < \frac{1}{2}p$, $k - k' < \frac{1}{2}p$, und demnach ebenfalls durch p nicht theilbar ist (I. 2.).

Folglich sind auch die Differenzen

$$p-\beta_1, p-\beta_2, p-\beta_3, \ldots p-\beta_\mu$$

alle untereinander ungleich, und jede $< \frac{1}{2}p$, da die Reste

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \ldots \beta_\mu$$

alle $> \frac{1}{2}p$ sind. Auch läßt sich leicht zeigen, daß keine dieser Differenzen einem der Reste

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots \alpha_\lambda$$

gleich ist. Seyen nämlich α und β zwei allgemeine Glieder der beiden in Rede stehenden Reihen von Resten, welche

$k < \frac{1}{2}$

also, so wie nach
Primzahl p nicht t
seyn.

Da folglich alle

α_1

$p-\beta_1, p-$

unter einander ungl
überhaupt $= \lambda +$
Größen keine ande

1, 2,

seyn, wenn nur v
abstrahirt wird.

$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \ldots \alpha_\lambda$

$=$

Denkt man sich d
man, wenn x eine
Gleichung von folg

$px + \alpha_1 \alpha_2$

rgiebt, immer für p als Modulus. Da aber die Diffe-enzen zwischen den Größen

$$a, 2a, 3a, 4a, \ldots \frac{p-1}{2}a$$

nd ihren entsprechenden Resten offenbar durch p theil-ar, folglich diese Größen den entsprechenden Resten con-ruent sind; so ist (II. 6. 7.)

$$a.2a.3a.4a \ldots \frac{p-1}{2}a \equiv \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_\lambda \beta_1 \beta_2 \beta_3 \ldots \beta_\mu,$$

$$a.2a.3a.4a \ldots \frac{p-1}{2}a.(-1)^\mu \equiv \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_\lambda \beta_1 \beta_2 \beta_3 \ldots \beta_\mu.(-1)^\mu;$$

Also auch (II. 3.) nach dem Obigen

$$a.2a.3a.4a \ldots \frac{p-1}{2}a.(-1)^\mu \equiv 1.2.3.4 \ldots \left(\frac{p-1}{2}\right),$$

$$\text{d. } 1.2.3.4 \ldots \frac{p-1}{2}.a^{\frac{p-1}{2}}.(-1)^\mu \equiv 1.2.3.4 \ldots \left(\frac{p-1}{2}\right).$$

Da nun aber der Modulus p eine offenbar in

$$1.2.3.4 \ldots \left(\frac{p-1}{2}\right)$$

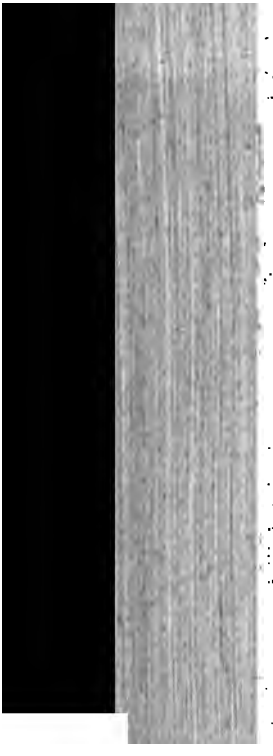
nicht aufgehende Primzahl ist; so ist, wenn man auf beiden Seiten mit diesem Producte dividirt nach (II. 12.)

$$a^{\frac{p-1}{2}}.(-1)^\mu \equiv 1, \quad a^{\frac{p-1}{2}}(-1)^{2\mu} \equiv 1.(-1)^\mu \text{ (II. 7.)}$$

d. i., weil $(-1)^{2\mu}$ immer $= 1$ ist, $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^\mu$ (Mod. p), oder, nach Legendre's Bezeichnung, $\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^\mu$, d. h. der bei der Division von $a^{\frac{p-1}{2}}$ durch p bleibende Rest $= (-1)^\mu$, w. z. b. w.

3. Fermats Satz ist aus diesem Satze eine unmittelbare Folge. Da nämlich μ gerade und ungerade seyn kann, so wird nach dem Bewiesenen p immer entweder in

$$a^{\frac{p-1}{2}} + 1 \text{ oder in } a^{\frac{p-1}{2}} - 1,$$



Zahl (17.), die g
$G(x)$, so daß alsd
Bruch ist, welcher
ganze Zahl ist. k
von a, und α, β d
Alles wie in (2.)

$$\frac{ka}{p} - G\left(\frac{k}{p}\right.$$

Aber $\alpha < \frac{1}{2}p$, β

$$\frac{ka}{p} - G\left(\frac{k}{p}\right.$$

$$\frac{2k\alpha}{p} < 2G\left(\right.$$

Folglich, wie leich

$$G\left(\frac{2ka}{p}\right) = 2G$$

$$G\left(\frac{2ka}{p}\right) - 2G$$

Eine Gleichung v
zug auf jedes Viel
werden. Die An
Unter ihnen kommt

Es kommt aber, wie auch schon aus (2.) erhellet, hier nicht sowohl auf den absoluten Werth von μ, sondern bloß darauf an, ob μ gerade oder ungerade ist, so daß man also in dieser Beziehung kürzer

$$G\left(\frac{2a}{p}\right)+G\left(\frac{4a}{p}\right)+G\left(\frac{6a}{p}\right)+\ldots+G\left(\frac{(p-1)a}{p}\right)=\mu$$

setzen kann, wodurch der Zweck, den wir hier im Auge haben, völlig erreicht wird. Um den wirklichen Werth von μ zu erhalten, müßte man sich freilich der unverkürzten Formel bedienen. Hat man μ, so ist auch λ gefunden, weil $\lambda+\mu=\frac{1}{2}(p-1)$ ist.

5. Unsere Formel ist aber noch einiger Abkürzungen fähig. Zu dem Ende ist zunächst zu bemerken, daß immer

$$G\left(\frac{(2k+1)a}{p}\right)+G\left(\frac{(p-2k-1)a}{p}\right)=a-1$$

ist. Sey nämlich $a=mp+\Theta$; so erhält man leicht

$$\frac{(p-2k-1)a}{p}=mp+\Theta-(2k+1)m-\frac{(2k+1)\Theta}{p}$$

$$=a-(2k+1)m-\frac{(2k+1)\Theta}{p}$$

$$\frac{(2k+1)a}{p}=(2k+1)m+\frac{(2k+1)\Theta}{p}.$$

Setzt man nun

$$\frac{(2k+1)\Theta}{p}=G\left(\frac{(2k+1)\Theta}{p}\right)+\frac{\varrho}{p};$$

so wird

$$\frac{(p-2k-1)a}{p}=a-(2k+1)m-G\left(\frac{(2k+1)\Theta}{p}\right)-\frac{\varrho}{p}$$

$$=a-(2k+1)m-G\left(\frac{(2k+1)\Theta}{p}\right)-1+\frac{p-\varrho}{p},$$

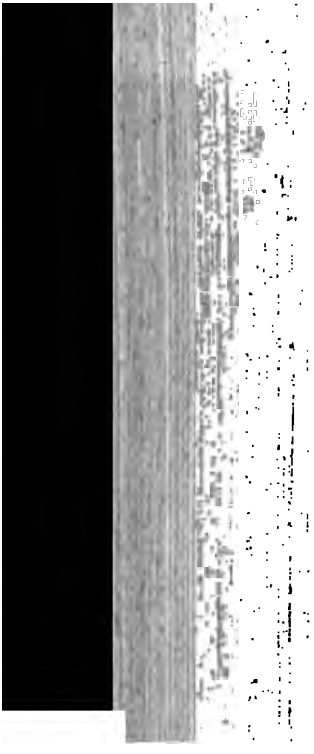
$$\frac{(2k+1)a}{p}=(2k+1)m+G\left(\frac{(2k+1)\Theta}{p}\right)+\frac{\varrho}{p}.$$

Also, weil $\varrho<p$, $p-\varrho<p$ ist,

$$G\left(\frac{(p-2k-1)a}{p}\right)=a-1-(2k+1)m-G\left(\frac{(2k+1)\Theta}{p}\right),$$

$$\left(\frac{(2k+1)a}{p}\right)=(2k+1)m+G\left(\frac{(2k+1)\Theta}{p}\right),$$

woraus, wenn man addirt, die zu beweisende Formel augenblicklich folgt.



Zahl (17.), die gr
$G(x)$, ſo daß alſo
Bruch iſt, welcher n
ganze Zahl iſt. ka
von a, und α, β di
Alles wie in (2.)

$$\frac{ka}{p} - G\left(\frac{ka}{p}\right.$$

Aber $\alpha < \frac{1}{2}p$, β

$$\frac{ka}{p} - G\left(\frac{ka}{p}\right.$$

$$\frac{2ka}{p} < 2G\left(\right.$$

Folglich, wie leicht

$$G\left(\frac{2ka}{p}\right) = 2G$$

$$G\left(\frac{2ka}{p}\right) - 2G$$

Eine Gleichung vo
zug auf jedes Viel
werden. Die Anz

Es kommt aber, wie auch schon aus (2.) erhellet, hier nicht sowohl auf den absoluten Werth von μ, sondern bloß darauf an, ob μ gerade oder ungerade ist, so daß man also in dieser Beziehung kürzer

$$G\left(\frac{2a}{p}\right)+G\left(\frac{4a}{p}\right)+G\left(\frac{6a}{p}\right)+\ldots+G\left(\frac{(p-1)a}{p}\right)=\mu$$

setzen kann, wodurch der Zweck, den wir hier im Auge haben, völlig erreicht wird. Um den wirklichen Werth von μ zu erhalten, müßte man sich freilich der unverkürzten Formel bedienen. Hat man μ, so ist auch λ gefunden, weil $\lambda+\mu=\frac{1}{2}(p-1)$ ist.

5. Unsere Formel ist aber noch einiger Abkürzungen fähig. Zu dem Ende ist zunächst zu bemerken, daß immer

$$G\left(\frac{(2k+1)a}{p}\right)+G\left(\frac{(p-2k-1)a}{p}\right)=a-1$$

ist. Sey nämlich $a=mp+\Theta$; so erhält man leicht

$$\frac{(p-2k-1)a}{p}=mp+\Theta-(2k+1)m-\frac{(2k+1)\Theta}{p}$$

$$=a-(2k+1)m-\frac{(2k+1)\Theta}{p}$$

$$\frac{(2k+1)a}{p}=(2k+1)m+\frac{(2k+1)\Theta}{p}.$$

Setzt man nun

$$\frac{(2k+1)\Theta}{p}=G\left(\frac{(2k+1)\Theta}{p}\right)+\frac{\varrho}{p};$$

so wird

$$\frac{(p-2k-1)a}{p}=a-(2k+1)m-G\left(\frac{(2k+1)\Theta}{p}\right)-\frac{\varrho}{p}$$

$$=a-(2k+1)m-G\left(\frac{(2k+1)\Theta}{p}\right)-1+\frac{p-\varrho}{p},$$

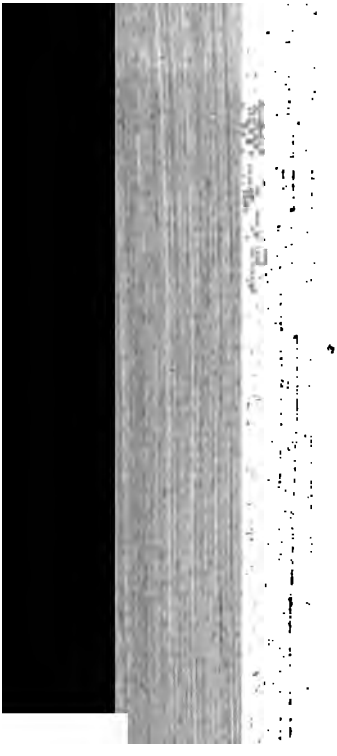
$$\frac{(2k+1)a}{p}=(2k+1)m+G\left(\frac{(2k+1)\Theta}{p}\right)+\frac{\varrho}{p}.$$

Also, weil $\varrho<p$, $p-\varrho<p$ ist,

$$G\left(\frac{(p-2k-1)a}{p}\right)=a-1-(2k+1)m-G\left(\frac{(2k+1)\Theta}{p}\right),$$

$$\left(\frac{(2k+1)a}{p}\right)=(2k+1)m+G\left(\frac{(2k+1)\Theta}{p}\right),$$

woraus, wenn man addirt, die zu beweisende Formel augenblicklich folgt.



$$G\left(\frac{(2n+2)a}{p}\right)$$

$$=$$

$$= n(a-1) - G$$

Folglich, da $n = \frac{1}{2}$

$$\mu = \tfrac{1}{2}(p-1)(a-1) +$$

$$- G\left(\frac{a}{p}\right) - G\left(\frac{3}{1}\right.$$

Da es aber, wie f

$$\mu = \tfrac{1}{4}(p-1)(a-1) + G\left(\frac{a}{p}\right) + G\left(\frac{2a}{p}\right) + G\left(\frac{3a}{p}\right) + \cdots,$$
$$\cdots + G\left(\frac{(2n-1)a}{p}\right) + G\left(\frac{2na}{p}\right),$$

ohne Rückſicht auf den wirklichen Werth von μ, immer nur in der Beziehung, ob μ gerade oder ungerade iſt, worauf es hier allein ankommt.

2) $p = 4n + 3$.

Die abgekürzte Reihe für μ in (4.) hat $\frac{1}{2}(p-1) = 2n+1$ Glieder, alſo in dieſem Falle immer ein Mittelglied. Die n erſten Glieder ſind:

$$G\left(\frac{2a}{p}\right) + G\left(\frac{4a}{p}\right) + G\left(\frac{6a}{p}\right) + \cdots + G\left(\frac{2na}{p}\right);$$

das Mittelglied iſt:

$$G\left(\frac{(2n+2)a}{p}\right);$$

die n letzten Glieder ſind:

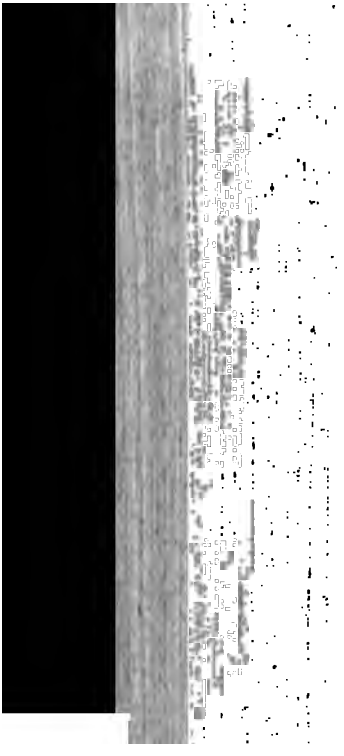
$$G\left(\frac{(2n+4)a}{p}\right) + G\left(\frac{(2n+6)a}{p}\right) + G\left(\frac{(2n+8)a}{p}\right) + \cdots + G\left(\frac{(p-1)a}{p}\right)$$
$$= a - 1 - G\left(\frac{(2n-1)a}{p}\right)$$
$$+ a - 1 - G\left(\frac{(2n-3)a}{p}\right)$$
$$+ a - 1 - G\left(\frac{(2n-5)a}{p}\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$+ a - 1 - G\left(\frac{a}{p}\right) \quad (\text{ſ. } 5.).$$

Transformirt man nun das Mittelglied auf ähnliche Art; ſo erhält man

$$G\left(\frac{(2n+2)a}{p}\right) = a - 1 - G\left(\frac{(2n+1)a}{p}\right);$$

und folglich, da die Anzahl der letzten Glieder, vom Mittelgliede an, $= n+1 = \frac{1}{4}(p+1)$ iſt:

$$\mu = \tfrac{1}{4}(p+1)(a-1) + G\left(\frac{2a}{p}\right) + G\left(\frac{4a}{p}\right) + G\left(\frac{6a}{p}\right) + \cdots + G\left(\frac{2na}{p}\right)$$
$$- G\left(\frac{a}{p}\right) - G\left(\frac{3a}{p}\right) - G\left(\frac{5a}{p}\right) - G\left(\frac{7a}{p}\right) - \cdots - G\left(\frac{(2n+1)a}{p}\right),$$



mein auf

$$\mu = G\left(\frac{a}{p}\right) + G\left($$

reducirt werden
$= 4n$, $\frac{1}{2}(p -$
$p - 1 = 4n +$
gerade, alſo a –
gerade oder unge
ungerade iſt. D

$$\mu = \frac{1}{4}(p \mp 1) + G\left($$

ſetzen, und das
$\frac{1}{4}(p \mp 1)$ eine g

7. Sind nu
len, die Einheit
der andern auf,
Bedeutung hat,

$$q^{\frac{p-1}{p}} \equiv$$

Da p und q beid
gehenden

$$\mu = G\left(\frac{q}{p}\right) +$$

d. h. nach dem Vorhergehenden nichts anders, als $\mu + \nu$ ist eine gerade oder ungerade Zahl, jenachdem die Größe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens gerade oder ungerade ist, indem es hier immer nur auf ein solches Kriterium ankommt.

Setzen wir nun

$$\frac{q}{p} = x,\ p = 2p' + 1,\ q = 2q' + 1,\ \frac{p}{q} = \frac{1}{x};$$

so erhält obige Formel folgende Gestalt:

$$\mu + \nu = G(x) + G(2x) + G(3x) + \ldots + G(p'x) + G\left(\frac{1}{x}\right) + G\left(\frac{2}{x}\right) + G\left(\frac{3}{x}\right) + \ldots + G\left(\frac{q'}{x}\right).$$

Zugleich wollen wir, welches offenbar, ohne der Allgemeinheit zu schaden, verstattet ist, annehmen, daß q die kleinere der beiden gegebenen Primzahlen p, q ist; so ist also x immer ein echter Bruch, und folglich $G(x) = 0$.

Ferner ist

$$p'x = \frac{p'q}{p} = \frac{\frac{1}{2}(p-1)(2q'+1)}{p} = \frac{2pq' - 2q' + p - 1}{2p}$$
$$= q' + \frac{p - (q-1) - 1}{2p} = q' + \frac{p-q}{2p}.$$

Folglich ist, weil nach der Annahme $p - q$ positiv und $< p$ ist, $G(p'x) = q'$. Hieraus, und aus dem Obigen sieht man nun, daß die Glieder der Reihe

$$Z = G(x) + G(2x) + G(3x) + \ldots + G(p'x)$$

von 0 bis q' wachsen. Um aber diese Glieder noch näher bestimmen, nehme man die Größen

$$m_1, m_2, m_3, m_4, \ldots m_{q'},$$

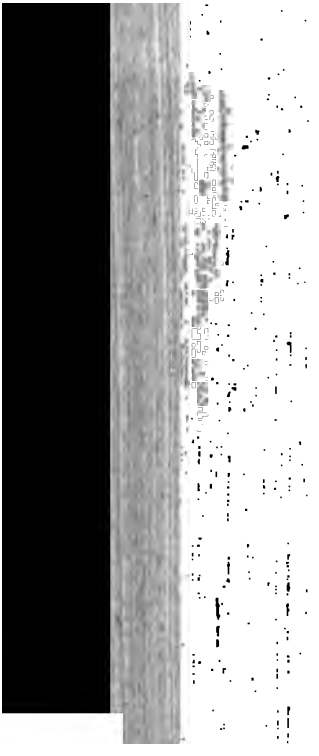
an, daß

$$m_1 x = 1,\ m_2 x = 2,\ m_3 x = 3,\ \ldots m_{q'} x = q'$$

werd, welches offenbar immer möglich ist; so erhellet leicht, daß keiner dieser Factoren eine ganze Zahl seyn kann. Sey überhaupt

$$m_z x = z,\ m_z = \frac{z}{x} = z.\frac{1}{x} = \frac{pz}{q};$$

geht, weil p eine Primzahl, und nach dem Vorhergehenden z höchstens $= q'$, also $< q$ ist, die Primzahl q weder in p, noch in z, also auch nicht in pz auf (I. 2.), so



$G(x)$,

höchstens den Wer

leicht, daß

ist. Denn es ist

z

aber x ein echter

$z+1 >$

Demnach

$z < (M$

also offenbar

Aus dem Bisherig

tigkeit folgender

$G(x) = G(2x) =$

$G((M_1+1)x) =$

$G((M_2+1)x) =$

$G((M_{q'-1}+1)x) =$

$G((M_{q'}+1)x) =$

Es ist aber

$m_{q'+1}x$

Also

Aber

$$\frac{q'+q}{x} = p' + \frac{p+q}{2q},$$

wie leicht erhellen wird; und, da $p > q$, $p+q > 2q$ ist, $\frac{p+q}{2q}$ ein unechter Bruch; also

$$G\left(\frac{q'+1}{x}\right) > p', \; M_{q'+1} > p'.$$

Setzt man nun q' für $q'+1$, so erhält man wie vorher

$$M_{q'} = G\left(\frac{q'}{x}\right).$$

Aber

$$\frac{q'}{x} = p' - \frac{p-q}{2q},$$

folglich, weil $p > q$, also $\frac{p-q}{2q}$ ein positiver Bruch ist,

$$G\left(\frac{q'}{x}\right) < p', \; M_{q'} < p'.$$

Also ist auch

$$M_{q'} + 1 \text{ nicht} > p'.$$

In der Reihe

$$M_{q'}+1, \; M_{q'}+2, \; M_{q'}+3, \; \ldots \; M_{q'+1}$$

ist also das niedrigste Glied nicht $> p'$, das höchste dagegen $\geq p'$; folglich muß in dieser Reihe immer ein Glied vorkommen, welches $= p'$ ist, so daß man also die letzte der obigen Reihen mit diesem Gliede abgebrochen denken, und statt jener Reihe kürzer

$$G((M_{q'}+1)x) = G((M_{q'}+2)x) = \ldots = G(p'x) = q'$$

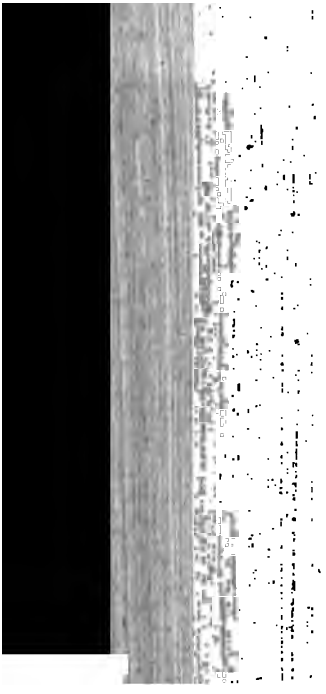
schreiben kann. Dies vorausgesetzt, so ist die Anzahl der Glieder der obigen Reihen für jede einzeln nach der Ordnung

$$M_1, \; M_2 - M_1, \; M_3 - M_2, \; \ldots \; M_{q'} - M_{q'-1}, \; p' - M_{q'}.$$

Folglich, wenn man die obigen Reihen zu einander addirt, da

$$Z = G(x) + G(2x) + G(3x) + \ldots + G(p'x)$$

gesetzt worden ist,



$$Z = p'q' - G\left(-$$

$$= G(x) + G$$

$$p'q' = \quad G(x) +$$

$$+ G\left(\frac{1}{x}\right) +$$

Oben iſt aber gefu

$$\mu + \nu = \quad G(x) +$$

$$+ G\left(\frac{1}{x}\right) -$$

alſo iſt, inſofern e
rade oder ungerade

$$\mu + \nu = p'q' = \frac{1}{2}$$

ſo daß alſo $\mu + \nu$
rade und ungerade

8. Hieraus, in
folgt unmittelbar
dieſem Lemma iſt

$$p^{\frac{q-1}{2}} \equiv (-1$$

$$p^{\frac{q-1}{2}} \equiv \pm 1 \pmod{q},\ q^{\frac{p-1}{2}} \equiv \pm 1 \pmod{p};$$

lches der erſte Theil des Satzes von der Reciprocität iſt.

Sind aber p, q beide von der Form

$$4n+3;\ \text{ſo iſt } \tfrac{1}{2}(4n+3-1) = 2n+1,$$

i. eine ungerade Zahl. Folglich iſt auch

$$\tfrac{1}{2}(p-1)\tfrac{1}{2}(q-1) = \tfrac{1}{4}(p-1)(q-1),$$

beide Factoren ungerade ſind, eine ungerade Zahl, und glich auch $\mu+\nu$ ungerade, d. i. immer eine der beiden hlen μ, ν gerade, die andere ungerade, folglich die Po- zen $(-1)^{\nu}$, $(-1)^{\mu}$ immer einander entgegengeſetzt, daher

$$p^{\frac{q-1}{2}} \equiv \pm 1 \pmod{q},\ q^{\frac{p-1}{2}} \equiv \mp 1 \pmod{p};$$

ches der zweite Theil des Satzes von der Recipro- t iſt.

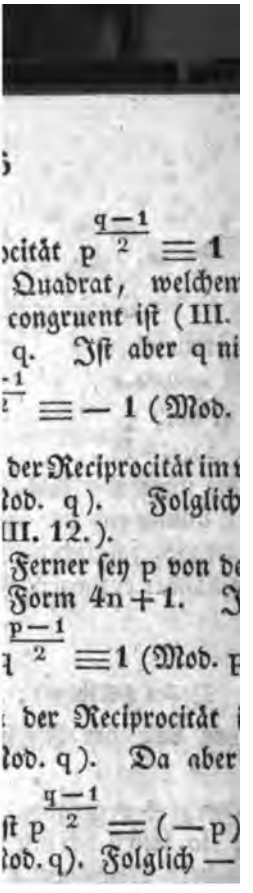
Da das Erſte ſtatt findet, wenn $\mu+\nu$ gerade, das eite, wenn $\mu+\nu$ ungerade iſt; ſo laſſen ſich mit An- dung der von Legendre gebrauchten Bezeichnung bei- Fälle auf folgende Art zuſammenfaſſen:

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)\cdot(-1)^{\frac{1}{4}(p-1)(q-1)}.$$

9. Gauß hat in den Disq. arithm. p. 132. den Satz folgenden merkwürdigen Ausdruck gebracht:

Wenn p eine Primzahl von der Form $4n+1$ iſt, ſo p; wenn aber p eine Primzahl von der Form $4n+3$ ſo iſt $-p$ quadratiſcher Reſt oder nicht quadratiſcher r einer jeden Primzahl q, welche, poſitiv genommen, dratiſcher Reſt, oder nicht quadratiſcher Reſt von p iſt.

Sey zuerſt p von der Form $4n+1$. Iſt nun q eine nzahl, welche quadratiſcher Reſt von p iſt; ſo muß es gewiſſes Quadrat geben, welches, für p als Modulus, 1 iſt, nach dem oben mitgetheilten Begriffe des quadra- en Reſtes. Folglich iſt $q^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$ (III. 9.). bei obiger Form von p nach dem Satze von der Re-



ɔcität $p^{\frac{q-1}{2}} \equiv 1$
Quadrat, welchen
congruent iſt (III.
q. Iſt aber q ni
$^{\frac{-1}{2}} \equiv -1$ (Mod.

der Reciprocität im
lod. q). Folglich
III. 12.).
Ferner ſey p von de
Form $4n+1$. I
$^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1$ (Mod. p

der Reciprocität
lod. q). Da aber
$^{\frac{q-1}{2}} = (-p)$
lod. q). Folglich —

$-p)^{\frac{q-1}{2}} - 1$ durch q theilbar, d. i. $(-p)^{\frac{q-1}{2}} \equiv 1$ Mod. q). Folglich $-p$ quadratischer Rest von q (III. 10.). Ist

ndlich q nicht quadratischer Rest von p; so ist $q^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1$ Mod. p) (III. 11.), und folglich nach dem Satze von

r Reciprocität in diesem Falle $p^{\frac{q-1}{2}} \equiv 1$ (Mod. q).

lso, ganz wie vorher, $(-p)^{\frac{q-1}{2}} \equiv -1$ (Mod. q),

i. $-p$ nicht quadratischer Rest von q (III. 12.).

10. Unter vorstehender Gestalt macht der Satz die rundlage der für die Zahlenlehre so wichtigen Theorie r quadratischen Reste. Unter der ersten Gestalt kommt zuerst in Legendre Recherches d'Analyse indeerminée. Hist. de l'Ac. des Sc. 1785. p. 465. sqq. r, aber nur mit einem unvollständigen Beweise versehen. egendre nennt ihn den Satz von der Reciprocität. nter der zweiten Form hat ihn Gauß in die Zahlenlehre ngeführt, und (a. a. O. Sect. IV. V.) auf doppelte Art eng bewiesen. Gauß nennt den Satz den Fundaentalsatz in der Lehre von den quadratischen este n, und hat noch vier andere Beweise gegeben in den handlungen: Summatio quarundam serierum singularium. Comm. Soc. Gotting. recent. Vol. I. und heorematis fundamentalis in doctrina de residuis adraticis demonstrationes et ampliationes novae. tting. 1818. In letzterer Abhandlung (p. 4.) führt auß als Grund seiner vielfältigen Bemühungen um die Satz auch den an, daß er dadurch zu einer zur Unterung der cubischen und biquadratischen Reste geschickten thode zu gelangen geglaubt habe, welches ihm auch end gelungen sey. Die Resultate dieser für die Zahlenre höchst wichtigen Arbeit hat Gauß der Göttingischen ademie der Wissenschaften vorgelegt, und in einer bedern Abhandlung bekannt gemacht. M. s. auch einige merkungen von Jacobi über diesen wichtigen Gegenand in Crelles Journal. II. 1. S. 66. Legendre den Satz in der Théorie des nombres. p. 198—

; p. 386—393 a
Beweis iſt, wie der
nd; der zweite geh
getheilten im Ganzen
bemüht, dieſen, d
nders völlig würdige
uſtellen, weshalb er
en hat. Die Form
ich beruht, geſtatte
vendungen, worüber
uerlich hat auch Ca
kwürdigen Satzes ge
gen. M. ſ. Férussac
. 1829. p. 205.

11. -1 iſt quadra
m $4n+1$, nicht qua
Form $4n+3$.

Sey $p = 4n+1$,

$\frac{p-}{2}$

folglich (-1)

$$G\left(\frac{a}{p}\right)+G\left(\frac{2a}{p}\right)+\ldots+G\left(\frac{\frac{1}{2}(p-1)a}{p}\right)=$$
$$=G\left(\frac{a}{p}\right)+G\left(\frac{2a}{p}\right)+\ldots+G\left(\frac{p-1}{p}\right)=0$$

Es ist also μ mit $\frac{1}{4}(p\mp1)$ gleichzeitig gerade und gerade. Das zweideutige Zeichen muß wie in (6.) bestimmt werden. Sey nun

$1, p=8n+1$; so ist $\frac{1}{2}(p-1)=2n$,

so auch μ, eine gerade Zahl. Folglich

$$2^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1 \text{ (Mod. p) (2.)}.$$

er auch $\frac{p-1}{2}=4n$, eine gerade Zahl. Also auch

$$(-2)^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1 \text{ (Mod. p)}.$$

mnach sowohl $+2$, als auch -2 ein quadratischer st von p (III. 10.).

$2, p=8n+3, \frac{1}{2}(p+1)=2n+1$,

ngerade; also

$$2^{\frac{p-1}{2}}\equiv -1 \text{ (Mod. p) (2.)}.$$

er $\frac{p-1}{2}=4n+1$, ungerade; also $(-2)^{\frac{p-1}{2}}$ $-2^{\frac{p-1}{2}}$, und folglich, so wie $2^{\frac{p-1}{2}}+1$ durch p lbar ist, auch $(-2)^{\frac{p-1}{2}}-1$ durch p theilbar, d. i.

$$(-2)^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1 \text{ (Mod. p)}.$$

glich $+2$ nicht quadratischer Rest von p (III. 12.); r -2 quadratischer Rest von p (III. 10.).

$3, p=8n+5, \frac{1}{2}(p-1)=2n+1$,

ungerade, folglich

$$2^{\frac{p-1}{2}}\equiv -1 \text{ (Mod. p) (2.)}.$$

er $\frac{p-1}{2}=4n+2$, gerade; also auch

$$(-2)^{\frac{p-1}{2}}\equiv -1 \text{ (Mod. p)}.$$

ich ſowohl + 2, al
von p.

4) $p = 8n + 7$

rade; alſo

$$2^{\frac{p-1}{2}} \equiv$$

$\frac{p-1}{2} \equiv 4n + 3$

$- 2^{\frac{p-1}{2}}$, und folgli

bar iſt, auch (-2)

$$(-2)^{\frac{p-1}{2}} \equiv$$

lich + 2 quadratiſch
quadratiſcher Reſt
13. Setzen wir fer
rade, in (6.)

$= G\left(\frac{a}{\ }\right) + G\left(\frac{2a}{\ }\right) +$

$$3^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \text{ (Mod. p) (2.).}$$

Aber $\frac{p-1}{2} = 6n$, eine gerade Zahl. Also auch

$$(-3)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \text{ (Mod. p).}$$

Folglich sowohl + 3 als — 3 ein quadratischer Rest von p (III. 10.),

2) $p = 12n + 7$, $p - 3 = 12n + 4 = 2(2n + 4)$, $q = 2n$, $q + 1 = 2n + 1$. Also μ eine ungerade Zahl. Folglich

$$3^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \text{ (Mod. p) (2.).}$$

Auch ist $\frac{p-1}{2} = 6n + 3$, eine ungerade Zahl, $(-3)^{\frac{p-1}{2}} = -3^{\frac{p-1}{2}}$. So wie nun $3^{\frac{p-1}{2}} + 1$ durch p theilbar, ist, so ist auch $(-3)^{\frac{p-1}{2}} - 1$ durch p theilbar, d. i.

$$(-3)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \text{ (Mod. p).}$$

Demnach ist 3 nicht quadratischer Rest von p (III. 12.), aber — 3 ist quadratischer Rest von p (III. 10.).

3) $p = 12n + 5$, $p - 3 = 12n + 2 = 2(2n + 2)$, $q = 2n$, $q + 1 = 2n + 1$; also μ ungerade. Folglich

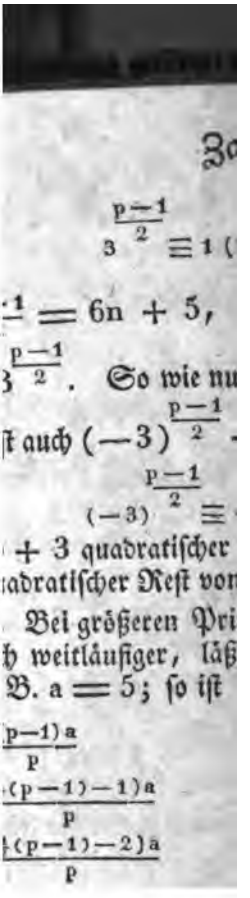
$$3^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \text{ (Mod. p) (2.).}$$

Aber $\frac{p-1}{2} = 6n + 2$, gerade. Also auch

$$(-3)^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \text{ (Mod. p).}$$

Folglich sowohl + 3, als — 3, nicht quadratischer Rest von p (III. 12.).

4) $p = 12n + 11$, $p - 3 = 12n + 8 = 4(2n + 1) + 2$, $q = 2n + 1$, $q + 1 = 2n + 2$, gerade. Folglich



Zo

$3^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 ($

$\frac{\cdot 1}{} = 6n + 5,$

$3^{\frac{p-1}{2}}$. So wie nu

ſt auch $(-3)^{\frac{p-1}{2}}$

$(-3)^{\frac{p-1}{2}} \equiv$

+ 3 quadratiſcher
adratiſcher Reſt vor

Bei größeren Pri
h weitläufiger, läß
B. $a = 5$; ſo iſt

$\frac{(p-1)a}{p}$

$\frac{(p-1)-1)a}{p}$

$\frac{(p-1)-2)a}{p}$

Sey nun z. B. die Primzahl p von der Form $20n + 11$; so ist $p - 5 = 20n + 6 = 10.2n + 6$, $q = 2n$, $3p - 5 = 60n + 28$, $3p - 5 - 10q = 40n + 28 = 10.(4n + 2) + 8$, $q' = 4n + 2$; also μ gerade, und folglich

$$5^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \ (2.) .$$

Aber $\frac{p-1}{2} = 10n + 5$. Also $(-5)^{\frac{p-1}{2}} = -5^{\frac{p-1}{2}}$, und es ist folglich, so wie $5^{\frac{p-1}{2}} - 1$ durch p theilbar ist, auch $(-5)^{\frac{p-1}{2}} + 1$ durch p theilbar, d. i.

$$(-5)^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 .$$

Folglich + 5 quadratischer Rest, — 5 nicht quadratischer Rest von $p = 20n + 11$.

Für $p = 20n + 17$ ist $p - 5 = 20n + 12 = 10.(2n + 1) + 2$, $q = 2n + 1$, $3p - 5 = 60n + 46$, $3p - 5 - 10q = 40n + 36 = 10.(4n + 3) + 6$, $q' = 4n + 3$, μ ungerade. Also

$$5^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \ (2.) .$$

$\frac{p-1}{2} = 10n + 8$ ist gerade. Also

$$(-5)^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 .$$

Folglich weder + 5 noch — 5 quadratischer Rest von $p = 20n + 17$.

Für $p = 20n + 1$ ist $p - 5 = 20n - 4 = 10.(2n - 1) + 6$, $q = 2n - 1$, $3p - 5 = 60n - 2$, $3p - 5 - 10q = 40n + 8 = 10.4n + 8$, $q' = 4n$, $\frac{p-1}{2} = 10n$. Also sowohl μ als $\frac{p-1}{2}$ gerade. Folglich

$$5^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \ (2.), \quad (-5)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 .$$

Demnach + 5 und — 5 quadratischer Rest von $p = 20n + 1$.

nz auf ähnliche Wei
= 20n + 1, + 3, + 7,
ıchen.

. Sowohl ± 3, al
rimzahl p iſt quadra
p durch 2 theilbar iſ
tiſcher Reſt von ſi
ĸ theilbar iſt. Alſo
5 quadratiſcher Reſ

ı Bezug auf die qua
n Zahlen beweiſen n

. Wenn p eine Pri
t; ſo iſt a quadratiſ
Reſt von p^n, jenac
uadratiſcher Reſt vo

t a quadratiſcher Re
^{2}, für welches α^2
a (Mod. p) iſt.
≡ a (Mod. p^n) iſt,
p^m) ſetzen, wobei

$q \mp 2ax = p^{n-m}y$, $q = p^{n-m}y \pm 2ax$

aufzulösen. Die Auflösung dieser Gleichung in ganzen Zahlen ist aber jederzeit möglich. Denn nach der Voraussetzung ist die Primzahl $p > 2$, und geht in $\alpha^2 - a$ auf, müßte also, wenn sie in α oder α^2 aufginge, auch in a aufgehen, welches gegen die Voraussetzung ist, so daß also p und 2α offenbar relative Primzahlen sind. Die Größe x kann also immer bestimmt werden (M. v. d. Art. Unbestimmte Analytik. 1.). So wie man hier von p^m zu p^n überging, wo n nicht $> 2m$; so kann man von p zu p^2, von p^2 zu p^4, von p^4 zu p^8 übergehen, u. s. f., so daß also überhaupt a quadratischer Rest von p^n ist, wenn a quadratischer Rest von p ist. Ist aber α nicht quadratischer Rest von p, so kann auch a nicht quadratischer Rest von p^n seyn, weil, wenn p^n in $z^2 - a$ aufginge, offenbar auch p in $z^2 - a$ aufgehen, und folglich a quadratischer Rest von p seyn würde.

17. Geht p in a auf, so daß $a = p^\alpha a'$, wo a' nicht mehr durch p theilbar ist; so muß man drei Fälle unterscheiden:

1) Wenn $\alpha =$ oder $> n$ ist; so ist offenbar a durch p^n theilbar; also $a \equiv o^2$ (Mod. p^n), d. i. a quadratischer Rest von p^n.

2) Ist $\alpha < n$ und ungerade, $= 2\gamma + 1$; so ist a nicht quadratischer Rest von p^n.

Wäre nämlich $x^2 \equiv a \equiv p^{2\gamma+1} a'$ (Mod. p^n); so wäre $x^2 - p^{2\gamma+1} a'$ durch p^n, also auch, da $2\gamma + 1 < n$ ist, durch $p^{2\gamma+1}$ theilbar. Folglich wäre auch x^2 durch $p^{2\gamma+1}$, und also x durch $p^{\gamma+1}$ theilbar, weil, wenn x bloß durch die Potenz $p^{\gamma+1-\delta}$ theilbar wäre, auch x^2 bloß durch die Potenz $p^{2\gamma+1-(2\delta-1)}$ theilbar seyn würde. Demnach müßte also auch x^2 durch $p^{2\gamma+2}$, und, da $2\gamma + 2$ nicht $> n$ ist, auch $p^{2\gamma+1} a'$ durch $p^{2\gamma+2}$, d. i. a' durch p theilbar seyn, welches gegen die Annahme. Also ist a nicht quadratischer Rest von p^n.

3) Ist $\alpha < n$ und gerade; so ist a quadratischer Rest, oder nicht quadratischer Rest von p^n, jenachdem a' quadratischer Rest, oder nicht quadratischer Rest von p ist.

nämlich a' quadratischer Rest von p; so ist es au
scher Rest von $p^{n-\alpha}$ (16.). Setzen wir nu
(Mod. $p^{n-\alpha}$); so geht $p^{n-\alpha}$ in $x^2 - a'$, al
in $p^\alpha x^2 - p^\alpha a'$ auf, oder es ist $p^\alpha x^2 \equiv p^\alpha$
Mod. p^n), d. i., weil $p^\alpha x^2$ ein Quadrat ist,
scher Rest von p^n. Ist aber a' nicht quadratisch
n p, so kann auch $a = p^\alpha a'$ nicht quadratisch
p^n seyn. Wäre nämlich $x^2 \equiv p^\alpha a'$ (Mod. p^n
weil $\alpha < n$, $x^2 - p^\alpha a'$, also auch x^2 durch
und folglich, für $\alpha = 2\gamma$, $\left(\frac{x}{p^\gamma}\right)^2$ eine ganze Za
$x^2 - p^{2\gamma} a'$ durch p^n theilbar ist; so ist offenb
$\left(\frac{x}{p^\gamma}\right)^2 - a'$ durch $p^{n-2\gamma}$, also um so mehr $\left(\frac{x}{p^\gamma}\right)^2 -$
theilbar, d. i. $\left(\frac{x}{p^\gamma}\right)^2 \equiv a'$ (Mod. p), oder a' q
r Rest von p, gegen die Voraussetzung. Folgl
ot quadratischer Rest von p^n.

Der Werth $p = 2$ ist vorher ausgeschlossen w
Wir müssen also für denselben noch einige Bestim
beifügen.

3) $8\alpha + 1$ ist immer ein quadratischer Rest von $2^3 = 8$. Denn $(4x + 1)^2$ ist von der Form $8y + 1$, also offenbar $(4x + 1)^2 - (8\alpha + 1)$ durch 8 theilbar, d. i. $(4x + 1)^2 \equiv 8\alpha + 1 \pmod 8$, oder $8\alpha + 1$ quadratischer Rest von 8.

4) Sey $a^2 \equiv 8\alpha + 1 \pmod{2^m}$ und $m > 2$; so kann man sich n so genommen denken, daß $n > m$, aber nicht $> 2m - 2$ ist, welches für $m = 2$ nicht möglich wäre, da dann $2m - 2$ auch $= 2$. Ich behaupte nun, daß es ein Quadrat giebt, welches $\equiv 8\alpha + 1 \pmod{2^n}$. Man setze die Wurzel dieses Quadrats $= \pm a + 2^{m-1}x$; so ist also

$$a^2 \pm 2^m ax + 2^{2m-2}x^2 \equiv 8\alpha + 1 \pmod{2^n}.$$

Also, da n nicht $> 2m - 2$, auch

$$a^2 \pm 2^m . ax \equiv 8\alpha + 1 \pmod{2^n}.$$

Aber nach der Voraussetzung

$$(8\alpha + 1) - a^2 = 2^m . q;$$

also $\pm 2^m . ax \equiv 2^m . q \pmod{2^n}$, und folglich, da $n > m$, offenbar auch

$$\pm ax \equiv q \pmod{2^{n-m}}.$$

Man muß also x so bestimmen, daß $q \mp ax$ durch 2^{n-m} theilbar ist, d. h. die unbestimmte Gleichung des ersten Grades

$$q \mp ax = 2^{n-m} . y, \quad q = 2^{n-m} . y \pm ax$$

auflösen. Diese Auflösung ist aber möglich, da 2^{n-m} und a relative Primzahlen sind. Denn, ginge 2 in a auf, so müßte es, da dann auch 2 in a^2 aufginge, und nach der Voraussetzung 2^m in $a^2 - (8\alpha + 1)$ aufgeht, auch in $8\alpha + 1$ aufgehen, welches unmöglich ist. Also ist $8\alpha + 1$ quadratischer Rest von 2^n. Da nun $8\alpha + 1$ wirklich quadratischer Rest von 2^3 ist, wo $3 > 2$; so ist $8\alpha + 1$ quadratischer Rest aller höhern Potenzen bis $2^{6-2} = 2^4$, folglich wieder alle Potenzen bis $2^{8-2} = 2^6$, $2^{12-2} = 2^{10}$, $2^{20-2} = 2^{18}$, $2^{36-2} = 2^{34}$, u. s. f. überhaupt von jeder höhern Potenz als 2^3.

5) Die ungeraden Zahlen von der Form $8\alpha + 3$, $8\alpha + 5$, $8\alpha + 7$ sind dagegen nicht quadratische Reste von

der einer höhern Po
raus erhellet, daß de
r Form $4x + 1$ od
$y - 1$ von der Form
ie ein ungerades Qu
$5, 8\alpha + 7$ in Bezu
n kann, eben ſo wer
) Für die durch 2 th
nen Beſtimmungen

). Iſt nun der Mo
$= pqrs \ldots$, wo p
Potenzen ungleicher
Augen, daß, wenn
auch ein quadratiſch
und daß folglich u
Reſt von einer der
quadratiſcher Reſt vo
pten, daß a quadra
atiſcher Reſt von p,
, nehmen wir zuerſt

urch pq theilbar, und demnach $x^2 \equiv a$ (Mod. pq), der $x^2 \equiv a$ (Mod. m), d. i. a quadratiſcher Reſt von ı iſt. Von zwei Factoren ſchließt man nun leicht auf :ei, u. ſ. f., woraus die Allgemeinheit des Satzes folgt.

20. Mit Hülfe der bisher bewieſenen Sätze iſt man n Stande, in allen Fällen über die quadratiſchen Reſte :r einfachen und zuſammengeſetzten Zahlen mit Sicherheit ı urtheilen, obgleich wir wegen weiterer Ausführung die= r wichtigen Lehre auf die Disq. arithm. Sect. IV. von) a u ß verweiſen müſſen. Wir ſchließen mit folgenden ıerkwürdigen Sätzen:

+ 2 iſt quadratiſcher Reſt jeder Zahl, welche weder urch 4, noch durch Primzahlen von der Form $8n + 3$, $n + 5$ theilbar iſt; von allen andern nicht quadratiſcher eſt.

Denkt man ſich eine Zahl m von der angegebenen Be= haffenheit in ihre Primfactoren zerlegt; ſo iſt das Pro= uct von der Form $2.(8n + 1)^\alpha.(8n + 7)^\beta$. Nun t 2 quadratiſcher Reſt von 2 (15.), von $8n + 1$ nd $8n + 7$ (12.), alſo, da 2 durch $8n + 1$ und $n + 7$ nicht theilbar iſt, auch von $(8n + 1)^\alpha$, $(8n + 7)^\beta$ 16.), folglich auch von $2.(8n + 1)^\alpha.(8n + 7)^\beta$, d. i. on m (19.). Iſt aber m z. B. durch $8n + 3$ theilbar;) iſt, weil 2 nicht quadratiſcher Reſt von $8n + 3$ iſt (12.), auch nicht quadratiſcher Reſt von m (16. 19.). Eben) in andern Fällen.

Auf ähnliche Art überzeugt man ſich von der Richtig= eit des folgenden Theorems:

— 2 iſt quadratiſcher Reſt jeder Zahl, welche weder urch 4, noch durch eine Primzahl von der Form $8n + 5$ der $8n + 7$ theilbar iſt; von jeder andern nicht quadrati= cher Reſt.

Von 4 iſt weder + 2, noch — 2, quadratiſcher Reſt, a, x mag gerade oder ungerade ſeyn, offenbar weder $x^2 - 2$, noch $x^2 + 2$ durch 4 theilbar ſeyn kann.

+ 3 iſt quadratiſcher Reſt aller Zahlen, welche weder urch 4, noch durch 9, noch durch eine Primzahl von der

)

n 12n + 5 oder 12n
nicht quadratiſcher R

Iſt m von der angeg
Primfactoren zerlegt
n + 11)$^{\beta}$. Es iſ
3. 1.), von 3 (15.),
(12n + 1)$^{\alpha}$, (12
en Product (19.),
) 9 theilbar; ſo iſt,
von 9 iſt, wie leich
quadratiſcher Reſt v
Fällen.

— 3 iſt quadratiſcher
) 8, noch durch 9,
n 12n + 5 oder 1
+ 5, theilbar iſt; v
quadratiſcher Reſt.

Die Richtigkeit dieſe
vorher.

Der Erfinder dieſer

und u relative Primzahlen sind. Wären nämlich t und u nicht relative Primzahlen, sondern z. B. $t = \Theta t'$, $u = \Theta u'$; so wäre

$$t^2 + au^2 = \Theta(\Theta t'^2 + a\Theta u'^2),$$

also $t^2 + au^2$ durch Θ theilbar, so daß man also, da Θ jede Zahl bezeichnen kann, t und u immer so bestimmen könnte, daß $t^2 + au^2$ durch jede willkührliche Zahl theilbar wäre, folglich, ohne die Beschränkung, daß t und u relative Primzahlen sind, von gar keiner besondern Form der Divisoren der Formel $t^2 + au^2$ die Rede seyn könnte.

3. Zwei zusammengehörende Divisoren unserer Formel seyen p und p_1, so daß also

$$t^2 + au^2 = pp_1$$

ist. Zunächst erhellet, daß p (und eben so natürlich auch p_1) mit u relative Primzahl ist. Wäre nämlich die Primzahl Θ ein gemeinschaftlicher Divisor von p und u, so wäre auch

$$t^2 = pp_1 - au^2,$$

also, da Θ eine Primzahl ist, auch t durch Θ theilbar (I. 3.), und t und u wären folglich, gegen die vorher festgesetzte Bedingung, nicht relative Primzahlen. Also ist die Auflösung der unbestimmten Gleichung des ersten Grades

$$t = px + uq$$

in ganzen Zahlen jederzeit möglich (Unbestimmte Analytik.). Man kann also

$$t = px + uq$$

setzen, welches, in die Gleichung

$$t^2 + au^2 = pp_1$$

für t gesetzt,

$$px^2 + 2uxq + \frac{(q^2+a)u^2}{p} = p_1$$

giebt. Also muß

$$\frac{(q^2+a)u^2}{p}$$

eine ganze Zahl seyn, oder p in $(q^2+a)u^2$, folglich auch, weil p und u nach dem Obigen relative Primzahlen sind, in $q^2 + a$ aufgehen (I. 7.), so daß man also

$\frac{q^2 + a}{p} = r$, px^2

'ann. Von dieſer
von $t^2 + au^2$ bed
:mel. Zugleich erhel
ahlen. Wäre näml
zeichnet, x und u du
folglich auch in

$t^2 +$

da Θ in u aufgeht,
3.) aufgehen, ſo da
ung nicht relative P
nengehörenden Divi
ſo immer von der F

$p_1 = px^2 +$
$p = p_1x_1^2 +$

'olgt aus der obigen
Factor von $t^2 + a$
ern Formel $q^2 +$
:hergehenden entſpri

Folglich p und p_1 zusammengehörende Divisoren von $t^2 + au^2$.

Kann man überhaupt p, q so bestimmen, daß $\frac{q^2+a}{p}$ eine ganze Zahl ist; so kann man zugleich q immer so bestimmen, daß es $\frac{1}{2}p$ nicht übersteigt. Ist nämlich $q^2 + a$ durch p theilbar; so ist auch für jedes z

$$\frac{(q-pz)^2+a}{p} = \frac{q^2+a}{p} + pz^2 - 2qz$$

eine ganze Zahl. Nimmt man nun für z die ganze Zahl, welche dem Bruche $\frac{q}{p}$ am nächsten kommt; so ist, wie leicht erhellet, immer entweder $\frac{q}{p} - z \leqq \frac{1}{2}$, oder $z - \frac{q}{p} \leqq \frac{1}{2}$, jenachdem $z \lesseqgtr \frac{q}{p}$ ist. Also $q - pz \leqq \frac{1}{2}p$ oder $pz - q \leqq \frac{1}{2}p$, folglich der positive Werth von $q - pz \leqq \frac{1}{2}p$, so daß also $q - pz = q'$ immer so bestimmt werden kann, daß $q'^2 + a$ durch p theilbar, und q' nicht $> \frac{1}{2}p$ ist.

5. Lagrange (Mém. de Berlin. 1773.) hat gezeigt, daß überhaupt die Formel

$$py^2 + 2qxy + rx^2$$

immer so transformirt werden kann, daß der mittlere Coefficient 2q keinen der beiden äußern p, r übersteigt.

Wir wollen annehmen, daß 2q einen der beiden äußern, z. B. p, welches willkührlich ist, da obige Formel in Bezug auf p, r eine ganz symmetrische Form hat, übersteige, und daß p, wenn 2q beide äußere Coefficienten übersteigt, der kleinere von beiden sey. Die ganze Zahl, welche dem Bruche $\frac{q}{p}$ am nächsten kommt, sey $= n$; so können folgende Fälle eintreten:

$$n - \frac{q}{p} = 0,\ 2np - 2q = \sigma;$$

$$n - \frac{q}{p} \leqq \frac{1}{2},\ 2np - 2q \leqq p;$$

$$\frac{q}{p} - n \leqq \frac{1}{2},\ 2q - 2np \leqq p;$$

und der absolute Werth von $2np - 2q$ übersteigt also den Werth des Coefficienten p nicht. Auch ist zu bemerken, daß, für $2q > p$, n nicht $= 0$ seyn kann, weil $\frac{q}{p} > \frac{1}{2}$, und

Zah

dem Bruche $\frac{q}{p}$ am

$> o$ iſt. Iſt abe

zu ſetzen, wie leicht

tze nun $y = y' -$

$y'^2 - 2ny'x + n^2x^2)$

$- 2(pn - q)xy' +$

$- 2q'xy' + r'x^2$,

$pn - q$, $r' = p$

ransformirten For

h erhellet, daß im

$pr' - q'^2 =$

es iſt

$= p(pn^2 - 2nq +$

$= pr - q^2 + p^2n^2$

$< q$. Denn $2q$

der derselben endliche ganze Zahlen sind. Man muß folglich immer irgend einmal auf eine transformirte Formel kommen, in welcher der mittlere Coefficient keinen der beiden äußern übersteigt. In diesem Falle wird dann, wie schon oben erwähnt, die ganze Zahl $n = o$, und q, r behalten ihre absoluten Werthe, wie aus den für q' und r' gefundenen Ausdrücken unmittelbar folgt.

Die gegebene Formel sey z. B.

$$35y^2 + 172xy + 210x^2 ;$$

so ist $172 > 35$, $p = 35$, $2q = 172$, $q = 86$, $\frac{q}{p} = \frac{86}{35}$, $n = 2$, $q' = 70 - 86 = -16$, $r' = 140 - 344 + 210 = 6$. Also die transformirte Formel:

$$35y'^2 + 32xy' + 6x^2 .$$

Hier ist noch $32 > 6$. Also $p = 6$, $2q = 32$, $q = 16$, $r = 35$, $\frac{q}{p} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$, $n = 3$, $q' = 18 - 16 = 2$, $r' = 54 - 96 + 35 = -7$, und demnach die transformirte Formel:

$$6x'^2 - 4y'x' - 7y'^2 ,$$

wo nun $4 < 6$, $4 < 7$, wie verlangt wurde.

6. In der Formel

$$px^2 + 2uxq + ru^2$$

in (3.) sind x und u relative Primzahlen (3.). Verwandelt man nach (5.) diese Formel in

$$px'^2 + 2ux'q + r'u^2 ,$$

wo also $x = x' - nu$ gesetzt werden muß; so erhellet leicht, daß auch in der transformirten Formel x' und u relative Primzahlen sind, weil, wenn dies nicht der Fall wäre, der gemeinschaftliche Factor auch in x aufgehen müßte, so daß also x und u nicht relative Primzahlen wären. Auch ist nach dem Vorigen immer

$$pr' - q'^2 = pr - q^2 , \text{ und } q' < q .$$

Folglich sind offenbar auch bei öfterer Anwendung voriger Transformation in der endlich resultirenden Formel die unbestimmten Größen relative Primzahlen, wovon man sich durch einen leichten Schluß überzeugt.

7. Man unterscheide nun zwei Fälle, jenachdem a in

el $t^2 + au^2$ poſitiv oder negativ iſt. Die bei
ſeyen, indem man c immer als poſitiv annimm

$$t^2 + cu^2 \text{ und } t^2 - cu^2 .$$

nen der Diviſoren dieſer beiden Formeln ſind

$$px^2 + 2qxu + \left(\frac{c+q^2}{p}\right)u^2 ,$$

$$px^2 + 2qxu - \left(\frac{c-q^2}{p}\right)u^2 ;$$

$$px^2 + 2qxu + ru^2 ,$$

$\frac{c+q^2}{p}$, $pr - q^2 = c$; und

$$px^2 + 2qxu - ru^2 ,$$

$\frac{c-q^2}{p}$, $pr + q^2 = c$. Denkt man ſich
toren nach (5.) transformirt; ſo iſt in beiden

$$2q \lessgtr p , \quad 2q \lessgtr r .$$

$\lessgtr pr$, $q^2 \lessgtr \frac{1}{4}pr$. Aber im erſten Falle pr
alſo

$q^2 \lessgtr \frac{1}{4}(c+q^2)$, $3q^2 \lessgtr c$, $q \lessgtr r\frac{1}{3}c$.

eführt gedacht, ſind alle Diviſoren der Formel $t^2 + u^2$ on der Form

$$px^2 + 2qxy + ry^2,$$

nd es iſt, da hier $o = 1$ (V. 7.),

$$pr - q^2 = 1, q < r\frac{1}{2} \text{ (V. 7.)}.$$

olglich, da q eine ganze Zahl iſt, offenbar $q = o$; alſo $r = 1$, und folglich $p = 1$, $r = 1$, da p und r eben- lls ganze Zahlen ſind. Dadurch verwandelt ſich die obige orm der Diviſoren hier in $x^2 + y^2$, und x, y ſind re- tive Primzahlen, wie ſchon vorher (V. 6.) allgemein be- ieſen worden.

2. Jede Primzahl von der Form $4n + 1$ iſt die ſumme zweier Quadrate.

Sey $4n + 1 = \gamma$; ſo iſt

$$x^{\gamma-1} - 1 = x^{4n} - 1 = (x^{2n} - 1)(x^{2n} + 1).$$

a nun $x^{2n} + 1$ in $x^{\gamma-1} - 1$ aufgeht; ſo giebt es im- er 2n Werthe von x zwiſchen $-\frac{1}{2}\gamma$ und $+\frac{1}{2}\gamma$, welche : Congruenz

$$x^{2n} + 1 \equiv o \text{ (Mod. } \gamma)$$

löſen (III. 8.), oder für welche $x^{2n} + 1$ durch $\gamma =$ $+ 1$ theilbar wird. Es iſt aber $x^{2n} + 1 = (x^n)^2 + 1^2$ Summe zweier Quadrate, oder von der Form $t^2 + u^2$. ſo iſt auch jeder Theiler von $x^{2n} + 1$, d. i. auch die rimzahl $4n + 1$, von der Form $x^2 + y^2$ (1.), oder die umme zweier Quadrate.

So iſt z. B. $13 = 4.3 + 1 = 9 + 4$, $29 = 7 + 1 = 25 + 4$, $37 = 4.9 + 1 = 36 + 1$, $73 = 18 + 1 = 64 + 9$.

Da $8n + 1 = 4.2n + 1$, $8n + 5 = 4.(2n+1) + 1$; ſo iſt auch jede Primzahl von der Form $8n + 1$ oder $+ 5$ die Summe zweier Quadrate.

Dieſen Satz hat Fermat gefunden, ſ. Primzahl (13.).

3. Jede Primzahl von der Form $8n + 1$ hat zu glei- r Zeit die Formen

$$x^2 + y^2, x^2 + 2y^2, x^2 - 2y^2.$$

Sey $8n + 1 = \gamma$. Aus dem ſo eben Bewieſenen

vir ſchon, daß $8n + 1$ immer von der
^{2} iſt (2.). Nun iſt

$$x^{\gamma-1} - 1 = x^{8n} - 1 = (x^{4n} - 1)(x^{4n} + 1),$$

$-1 - 1$ durch $x^{4n} + 1$ theilbar. Folglich gie
$- \frac{1}{2}\gamma$ und $+ \frac{1}{2}\gamma$ nach (III. 8.) 4n Werthe
welche $x^{4n} + 1$ durch γ theilbar wird. Aber

$$x^{4n} + 1 = (x^{2n} - 1)^2 + 2.(x^n)^2,$$

und $x^{2n} - 1$ relative Primzahlen ſind, weil e
aftlicher Theiler derſelben offenbar auch in x^{2n},
h in 1 aufgehen müßte, und demnach nur die
bſt ſeyn könnte. Alſo iſt $x^{4n} + 1$ unter der
1^2, für $c = 2$, enthalten, und der Factor
1 demnach von der Form

$$px^2 + 2qxy + ry^2,$$

$< V\frac{2}{3}$, d. i., weil q eine ganze Zahl iſt, $q =$
$q^2 + c$, $pr = 2$ (V. 7.); alſo immer entweder
$= 2$, oder $p = 2$, $r = 1$, und folglich $8n$
von der Form $x^2 + 2y^2$. Es iſt aber auch

$$x^{4n} + 1 = (x^{2n} + 1)^2 - 2(x^n)^2,$$

ähnliche Art wie vorher erhellet, daß x^n und x^{2n}

4. Jede Primzahl von der Form $8n + 3$ ist von der orm $x^2 + 2y^2$.

Sey wieder $8n + 3 = \gamma$; also

$$x^{\gamma-1} - 1 = x^{8n+2} - 1 = (x^{4n+1} - 1)(x^{4n+1} + 1).$$

Setzt man nun $x = 2$; so wird,

$$2^{\gamma-1} - 1 = |2.(2^{2n})^2 - 1||2^{4n+1} + 1|.$$

Da nun $2^{\gamma-1} - 1$ immer durch γ theilbar ist (III. 1.); muß entweder $2.(2^{2n})^2 - 1$, oder $2^{4n+1} - 1$ durch theilbar seyn (I. 3.). Fände das Erste statt, so müßte natürlich auch $1 - 2.(2^{2n})^2$ durch γ theilbar seyn, und müßte folglich ganz wie in (3.) von der Form $x^2 - 2y^2$ oder $2x^2 - y^2$, oder, weil diese beiden Formen nur eine bilden (3.), überhaupt z. B. von der Form $x^2 - 2y^2$ seyn. Daß dies aber nicht möglich ist, läßt sich so zeigen. Wäre nämlich $\gamma = 8n + 3 = x^2 - 2y^2$; so ist, da $2y^2$ gerade, aber $8n + 3$ ungerade ist, auch x^2 ungerade. Sey daher $x = 2z + 1$; so ist

$$x^2 = 4z^2 + 4z + 1 = 4z(z+1) + 1$$
$$= 8.\frac{z(z+1)}{2} + 1 = 8\nu + 1,$$

wenn wir $\frac{z(z+1)}{2}$, welches offenbar eine ganze Zahl ist, $= \nu$ setzen. Jedes ungerade Quadrat ist also von der Form $8\nu + 1$, jedes gerade von der Form 4ν. Also ist auch y^2 entweder von der Form $4\nu'$ oder $8\nu' + 1$. Im ersten Falle ist

$$x^2 - 2y^2 = 8\nu + 1 - 8\nu'$$
$$= 8(\nu - \nu') + 1;$$

im andern dagegen

$$x^2 - 2y^2 = 8\nu + 1 - 2(8\nu' + 1)$$
$$= 8(\nu - 2\nu' - 1) + 7;$$

in keinem Falle also von der Form $8n + 3$. Also kann auch $8n + 3$ nicht von der Form $x^2 - 2y^2$, also auch nicht von der Form $2x^2 - y^2$ (3.), und demnach auch $.(2^{2n})^2 - 1$ nicht durch γ theilbar seyn. Also ist $^{4n+1} + 1 = 1 + 2.(2^{2n})^2$ durch $\nu = 8n + 3$ theilbar, woraus ganz wie in (3.) folgt, daß jede Primzahl von der Form $8n + 3$ von der Form $x^2 + 2y^2$ ist.

Z. B. $11 = 3^2 + 2.1^2$, $19 = 1^2 + 2.3^2$.

Jede Primzahl von der Form $8n+7$ ist vo
$x^2 - 2y^2$.

y $\gamma = 8n+7$; so ist
$2^{\gamma-1} - 1 = 2^{8n+6} - 1 = (2^{4n+3} - 1)(2^{4n+3} + 1)$,
durch γ theilbar (III. 1.). Da nun
$$2^{4n+3} + 1 = 1^2 + 2.(2^{2n+1})^2$$
würde γ, wenn $2^{4n+3}+1$ durch γ theilbar
uf ähnliche Art wie in (3.) bei einem ähnlichen
Form $x^2 + 2y^2$ seyn. Da aber $2y^2$ gerad
7 ungerade ist; so ist auch x^2 ungerade, so
Form $8\nu + 1$ (4.). Also entweder
$x^2 + 2y^2 = 8\nu + 1 + 8\nu' = 8(\nu + \nu') + 1$,

$+ 2y^2 = 8\nu + 1 + 2(8\nu' + 1) = 8(\nu + 2\nu') + 3$
in keinem Fall von der Form $8n+7$. Den
in $2^{4n+3}+1$ nicht aufgehen, und muß al
-1 oder $1 - 2^{4n+3} = 1 - 2.(2^{2n+1})^2$
Hieraus folgt ganz wie in (3.), daß jede P
n der Form $8n+7$ von der Form $x^2 - 2y^2$
y^2 ist, welche zwei Formen sich aber auf die

irgend eine ungerade Zahl, aber Divisor der Formel $x^2 + au^2$, oder, was Dasselbe ist (V. 3.), der Formel $x^2 + a$; so ist immer $A^{\frac{a-1}{2}} \equiv 1 \pmod{a}$, wenn A von der Form $4n+1$, dagegen $A^{\frac{a-1}{2}} \equiv -1 \pmod{a}$, wenn A von der Form $4n+3$ ist.

Seyen α, β irgend zwei Primzahlen, die erste von der Form $4n+1$, die andern von der Form $4n+3$, aber beide Divisoren von $x^2 + a$; so ist also

$$x^2 \equiv -a \pmod{\alpha}, \quad x^2 \equiv -a \pmod{\beta}.$$

folglich, da α, β in der Primzahl a natürlich nicht aufgehen, nach (III. 9.)

$$(-a)^{\frac{\alpha-1}{2}} \equiv 1 \pmod{\alpha}, \quad (-a)^{\frac{\beta-1}{2}} \equiv 1 \pmod{\beta}.$$

Da aber $\frac{\alpha-1}{2}$ gerade, $\frac{\beta-1}{2}$ ungerade ist; so ergiebt sich daraus leicht

$$a^{\frac{\alpha-1}{2}} \equiv 1 \pmod{\alpha}, \quad a^{\frac{\beta-1}{2}} \equiv -1 \pmod{\beta}.$$

folglich, weil weder a, α noch a, β beide von der Form $4n+3$ sind, nach dem Satze von der Reciprocität (IV. 1.)

$$a^{\frac{\alpha-1}{2}} \equiv 1 \pmod{\alpha}, \quad \alpha^{\frac{a-1}{2}} \equiv 1 \pmod{a};$$

$$a^{\frac{\beta-1}{2}} \equiv -1 \pmod{\beta}, \quad \beta^{\frac{a-1}{2}} \equiv -1 \pmod{a}.$$

Sey nun A in seine Primfactoren zerlegt, so daß

$$A = \alpha\alpha'\alpha'' \ldots \beta\beta'\beta'' \ldots,$$

wo α, α', α'', ... lauter Primzahlen von der Form $4n+1$; β, β', β'', ... lauter Primzahlen von der Form $4n+3$ bezeichnen. Ist nun A von der Form $4n+1$, so ist die Anzahl der Primfactoren der letztern Gattung immer gerade. Wäre diese Anzahl nämlich ungerade, z. B. $= 2m+1$; so wäre der von den durch 4 nicht theilbaren Theilen der einzelnen Primfactoren herührende Theil von A offenbar

$$= 3^{2m+1} = (4-1)^{2m+1} = 4e + \frac{2m+1}{1}.4 - 1$$
$$= 4(e+2m) + 3,$$

e eine ganze Zahl bezeichnet, und man ſich
ng des Binomiums $4 - 1$ nach dem binomiſch
entwickelt denkt. Alſo wäre A offenbar v
n $4n + 3$, da es doch von der Form $4n + 1$ ſe
agegen A von der Form $4n + 3$; ſo iſt die An
β bezeichneten Primfactoren ungerade, weil,
$= 2m$ wäre, der oben bezeichnete Theil de
s aller Primfactoren offenbar

$$= 3^{2m} = (4-1)^{2m} = 4e - \frac{2m}{1}.4 + 1$$
$$= 4(e - 2m) + 1,$$

daher A ſelbſt von der Form $4n + 1$ ſeyn würde.
usgeſetzt, haben wir nun nach dem Obigen

$$\alpha^{\frac{a-1}{2}} \equiv 1 \text{ (Mod. a)}, \quad \beta^{\frac{a-1}{2}} \equiv -1 \text{ (Mod. a)};$$
$$\alpha'^{\frac{a-1}{2}} \equiv 1 \text{ (Mod. a)}, \quad \beta'^{\frac{a-1}{2}} \equiv -1 \text{ (Mod. a)};$$
$$\alpha''^{\frac{a-1}{2}} \equiv 1 \text{ (Mod. a)}, \quad \beta''^{\frac{a-1}{2}} \equiv -1 \text{ (Mod. a)};$$
&c. &c. &c. &c.

8. Wenn a eine Primzahl von der Form $4n+3$, und irgend ein ungerader Divisor der Formel t^2+au^2 er x^2+a ist; so ist immer $A^{\frac{a-1}{2}} \equiv 1$ (Mod. a).

Seyen wieder α, β zwei Primzahlen, respective von r Form $4n+1$ und $4n+3$, beide Divisoren von ^2+a; so ist, wie vorher,

$$(-a)^{\frac{\alpha-1}{2}} \equiv 1 \text{ (Mod. } \alpha), \quad (-a)^{\frac{\beta-1}{2}} \equiv 1 \text{ (Mod. } \beta);$$
$$a^{\frac{\alpha-1}{2}} \equiv 1 \text{ (Mod. } \alpha), \quad a^{\frac{\beta-1}{2}} \equiv -1 \text{ (Mod. } \beta).$$

a aber hier a, α nicht beide von der Form $4n+3$, dagen a, β beide von der Form $4n+3$ sind, so ist nach m Satze von der Reciprocität

$$a^{\frac{\alpha-1}{2}} \equiv 1 \text{ (Mod. } \alpha), \quad \alpha^{\frac{a-1}{2}} \equiv 1 \text{ (Mod. } a);$$
$$a^{\frac{\beta-1}{2}} \equiv -1 \text{ (Mod. } \beta), \quad \beta^{\frac{a-1}{2}} \equiv 1 \text{ (Mod. } a).$$

ey nun wieder

$$A = \alpha\alpha'\alpha'' \ldots\ldots \beta\beta'\beta'' \ldots\ldots,$$

o aber, weil A nach der Voraussetzung ungerade ist, kein rimfactor $= 2$ ist, welches wegen der Anwendung des ßatzes von der Reciprocität nothwendig ist (IV. 1.); so ist

$$A^{\frac{a-1}{2}} = a^{\frac{a-1}{2}} \cdot \alpha'^{\frac{a-1}{2}} \cdot \alpha''^{\frac{a-1}{2}} \ldots \beta^{\frac{a-1}{2}} \cdot \beta'^{\frac{a-1}{2}} \cdot \beta''^{\frac{a-1}{2}} \ldots\ldots$$
$$\equiv 1 \text{ (Mod. } a) \text{ (II. 6.)}.$$

9. Sey jetzt a eine Primzahl von der Form $4n+1$, nd α, α', α'', α''' seyen Primzahlen respective von der orm $8n+1$, $8n+3$, $8n+5$, $8n+7$, alle aber ivisoren von t^2+2au^2 oder x^2+2a; so ist nach (III. 9.)

$$(-2a)^{\frac{\alpha-1}{2}} \equiv 1 \text{ (Mod. } \alpha), \quad (-2a)^{\frac{\alpha'-1}{2}} \equiv 1 \text{ (Mod. } \alpha'),$$
$$(-2a)^{\frac{\alpha''-1}{2}} \equiv 1 \text{ (Mod. } \alpha''), \quad (-2a)^{\frac{\alpha'''-1}{2}} \equiv 1 \text{ (Mod. } \alpha''');$$

er, weil die Exponenten der Potenzen nach der Ordnung rade, ungerade, gerade, ungerade sind,

$$\alpha^{\frac{\alpha-1}{2}} \equiv 1 \pmod{\alpha}, \quad (2a) \qquad \alpha'^{\frac{\alpha'-1}{2}} \equiv -1 \pmod{\alpha'},$$

$$\alpha''^{\frac{\alpha''-1}{2}} \equiv 1 \pmod{\alpha''}, \quad (2a) \qquad \alpha'''^{\frac{\alpha'''-1}{2}} \equiv -1 \pmod{\alpha'''}$$

V. 12.)

$$\alpha^{\frac{\alpha-1}{2}} \equiv 1 \pmod{\alpha}, \quad 2^{\frac{\alpha'-1}{2}} \equiv -1 \pmod{\alpha'},$$

$$\alpha''^{\frac{\alpha''-1}{2}} \equiv -1 \pmod{\alpha''}, \quad 2^{\frac{\alpha'''-1}{2}} \equiv 1 \pmod{\alpha'''}.$$

offenbar

$$\alpha^{\frac{\alpha-1}{2}} \equiv 1 \pmod{\alpha}, \quad a^{\frac{\alpha'-1}{2}} \equiv 1 \pmod{\alpha'},$$

$$\alpha''^{\frac{\alpha''-1}{2}} \equiv -1 \pmod{\alpha'}, \quad a^{\frac{\alpha'''-1}{2}} \equiv -1 \pmod{\alpha'''};$$

an ſich mittelſt (II. 6.) und der vorigen Congru
durch einen indirecten Schluß überzeugt.

ich nach dem Satze von der Reciprocität

$$a^{\frac{a-1}{2}}$$

$8.3n + 3 = 8.(3n + 1) + 1$. Folglich das Geſetz allgemein.

Jede Potenz der 5 iſt entweder von der Form $8n + 1$ oder $8n + 5$, wie z. B. $5 = 8.0 + 5$, $25 = 8.3 + 1$, $125 = 8.15 + 5$, $625 = 8.78 + 1$. Sey $5^k = 8n + 1 = 8n' + 5$; ſo iſt $5^{k+1} = 40n + 5 = 40n' + 25 = 8.5n + 5 = 8.(5n' + 3) + 1$, und das Geſetz alſo allgemein. Eben ſo überzeugt man ſich leicht, daß jede Potenz der 7 entweder von der Form $8n + 1$, oder von der Form $8n + 7$ iſt. Zugleich erhellet auch, daß die ungeraden Potenzen von 3, 5, 7, reſpective von der Form $8n + 3$, $8n + 5$, $8n + 7$, die geraden dagegen von der Form $8n + 1$ ſind.

Wäre nun die Anzahl der in A enthaltenen Primfactoren von den Formen $8n + 5$, $8n + 7$ ungerade; ſo wäre, wegen des Vorigen, das Product dieſer Factoren offenbar entweder von der Form $8n + 5$ oder $8n + 7$. Das Product der Primfactoren von den Formen $8n + 1$, $8n + 3$ iſt entweder von der Form $8n + 1$ oder $8n + 3$. Alſo das Product aller Primfactoren von A, d. i. A, entweder von den Formen $8n + 5$, $8n + 7$, oder $8n + 15 = 8n' + 7$, $8n + 21 = 8n' + 5$, alſo nicht von der Form $8n + 1$ oder $8n + 3$, von welchen Formen A doch nur ſeyn ſoll. Alſo iſt die Anzahl der Primfactoren von den Formen $8n + 5$, $8n + 7$ gerade, und demnach, wegen obiger Congruenzen nach (II. 6.)

$$A^{\frac{a-1}{2}} \equiv 1 \text{ (Mod. a)}.$$

Wäre in B die Anzahl der Primfactoren von den Formen $8n + 5$, $8n + 7$ gerade, ſo wäre das Product dieſer Primfactoren entweder von der Form $8n + 1$, oder von der Form $8n + 35 = 8n' + 3$. Das Product der Primfactoren von der Form $8n + 1$, $8n + 3$ hat dieſelben Formen. Folglich iſt offenbar auch das Product aller Primfactoren entweder von der Form $8n + 1$ oder $8n + 3$, da doch B nur von den Formen $8n + 5$ oder $8n + 7$ ſeyn ſoll. Alſo iſt die Anzahl der Primfactoren von den Formen $8n + 5$,

-7 in dieſem Falle ungerade, und demnach we
Congruenzen nach (II. 6.)

$$B^{\frac{a-1}{2}} \equiv -1 \pmod{a}.$$

0. Alles Vorhergehende bleibe unverändert,
ine Primzahl von der Form $4n+3$; ſo folgt
erſten Congruenzen in (9.) nach dem Satze
procität

$$a^{\frac{a-1}{2}} \equiv 1 \pmod{a}, \quad a'^{\frac{a-1}{2}} \equiv -1 \pmod{a}$$

$$a''^{\frac{a-1}{2}} \equiv -1 \pmod{a}, \quad a'''^{\frac{a-1}{2}} \equiv 1 \pmod{a}.$$

nun A von den Formen $8n+1$, $8n+7$, B v
nen $8n+3$, $8n+5$; ſo iſt in Bezug auf A
der Primfactoren von der Form $8n+3$, $8n+$
in Bezug auf B dagegen ungerade, wovon m
auf ähnliche Art wie vorher überzeugt. Alſo
Falle wieder

VII. Ueber die Auflösung der Congruenzen $x^{\frac{a-1}{2}} \equiv 1 \pmod a$, $x^{\frac{a-1}{2}} \equiv -1 \pmod a$, wenn a eine ungerade Primzahl ist.

1. In Bezug auf die erste Congruenz kann man für x jedes y^2 setzen, wenn a nicht darin aufgeht, indem unter dieser Voraussetzung nach dem Fermat'schen Satze (III. 1.) $x^{\frac{a-1}{2}} = y^{a-1} \equiv 1$ ist. Also sind

$$1, 4, 9, 16, 25, \ldots \left(\frac{a-1}{2}\right)^2$$

Werthe von x. Ist nun überhaupt $y^2 = ap + r$, wo $r < a$, ein Glied dieser Reihe; so erhellet, wenn e überhaupt eine ganze Zahl bezeichnet, mittelst des binomischen Lehrsatzes leicht, daß $x^{\frac{a-1}{2}} = (ap + r)^{\frac{a-1}{2}} = ae + r^{\frac{a-1}{2}}$, also $x^{\frac{a-1}{2}} \equiv r^{\frac{a-1}{2}}$ ist; aber $x^{\frac{a-1}{2}} \equiv 1$; also auch $r^{\frac{a-1}{2}} \equiv 1$. Bezeichnen wir nun den bei der Division von y^2 durch a bleibenden Rest überhaupt durch ϱy^2; so haben wir folgende $\frac{a-1}{2}$ Wurzeln unserer Congruenz:

$$\varrho 1, \varrho 4, \varrho 9, \varrho 16, \varrho 25, \ldots \varrho\left(\frac{a-1}{2}\right)^2,$$

deren jede $< a$ und positiv ist. Auch überzeugt man sich leicht, daß alle diese Wurzeln ungleich sind. Wäre nämlich, wenn y^2 und z^2 irgend zwei Glieder der erstern Reihe bezeichnen,

$$y^2 = ap + r, \quad z^2 = aq + r,$$

so daß nämlich die bei der Division von y^2 und z^2 durch a bleibenden Reste einander gleich wären; so wäre

$$y^2 - z^2 = a(p-q) = (y-z)(y+z),$$

und folglich dieses Product, also auch, da a eine Primzahl ist, entweder $y - z$, oder $y + z$ durch a theilbar (I. 3.), welches nicht möglich ist, da $y < \frac{1}{2}a$, $z < \frac{1}{2}a$, also immer $y - z$ sowohl, als auch $y + z < a$ ist. Die obigen $\frac{a-1}{2}$ Wurzeln sind also alle positiven Wurzeln unserer Congruenz, die $< a$ sind (II. 26.).

$x = 26z + \{5, 7, 11, 15, 19, 21,$

lt.

z. B. $5^{\frac{13-1}{2}} = 5^6 = 15625$, $5^6 +$
$= 13.1202.$

n a, a′ zwei ungleiche **Primzahlen** ſind;
ongruenzen

$$\frac{1}{} \qquad \frac{a'-1}{2}$$
$$\equiv \pm 1 \text{ (Mod. a)}, \; x \equiv \pm 1 \text{ (Mod. a')};$$

ie obern und untern **Zeichen** ſich auf einand
mmer zu gleicher **Zeit** in ungeraden Zahlen g
.

der der vorhergehenden **Congruenzen** einzeln
Zahlen genügt werden; ſo iſt nach dem Vorig

$x = 2az + a$ und $x = 2a'z' + a'$

Da nun beiden **Congruenzen** zugleich genüg
ſo ſetze man

$$+ a = 2a'z' + a', \; az - a'z' = \frac{a'-a}{2}.$$

Primzahlen sind, auf ähnliche Art allen drei Congruenzen in ungeraden Zahlen genügt werden kann. Die Ausdehnung dieser Schlußart auf noch mehrere Congruenzen ist leicht.

VIII. Einige merkwürdige Sätze von den Potenzen.

1. Die unbestimmte Gleichung

$$x^2 + y^2 = z^2$$

läßt sich immer in ganzen Zahlen auflösen; d. h. man kann immer zwei Quadrate finden, deren Summe wieder ein vollkommenes Quadrat ist. Man braucht nämlich bloß zu setzen:

$$x = p^2 - q^2,\ y = 2pq,\ z = p^2 + q^2;$$

weil, wie leicht erhellet, immer

$$(p^2 - q^2)^2 + (2pq)^2 = p^2 + q^2$$

ist. Drei Zahlen, welche den obigen unbestimmten Gleichung genügen, bilden ein rechtwinkliges Dreieck. Eine schöne Reihe von Aufgaben über solche Dreiecke enthält Diophant's sechstes Buch.

2. Man kann aber auch umgekehrt zeigen, daß jede drei Zahlen, welche der Gleichung

$$x^2 + y^2 = z^2$$

genügen, von den Formen

$$p^2 - q^2,\ 2pq,\ p^2 + q^2$$

seyn müssen.

Zunächst ist klar, daß man immer annehmen kann, daß x, y, z kein gemeinschaftliches Maaß haben, weil ein solches offenbar immer durch Division weggeschafft werden könnte. Eben so leicht überzeugt man sich aber auch, daß je zwei der Zahlen x, y, z kein gemeinschaftliches Maaß haben können. Ginge nämlich z. B. die Primzal Θ in x und y auf, so müßte, wegen obiger Gleichung, Θ auch in z^2, folglich (I. 3.) auch in z aufgehen, so daß also Θ ein Maaß von x, y, z wäre, gegen das Obige. Also können x, y nicht beide gerade seyn. Es können aber auch

$p = \gamma$, $q = \lambda^2$,

γ, λ, wie p, q, relative Primz

der Gleichung $p^2 - q^2 = a^2$ so

$$\gamma^4 - 4\lambda^4 = a^2,\ a^2 + (2\lambda^2)^2 =$$

(2.)

$$a = f^2 - g^2,\ 2\lambda^2 = 2fg,\ \gamma^2 =$$

wieder f, g, wie γ, λ, relative Pr

dann wegen der Gleichung $\lambda^2 = fg$

$$f = \alpha^2,\ g = \beta^2$$

, wo α, β ebenfalls relative Prim

n der Gleichung $f^2 + g^2 = \gamma^2$:

$$\alpha^4 + \beta^4 = \gamma^2 .$$

nun

$= f^2 - g^2 = \alpha^4 - \beta^4$,

$= \sqrt{2pq} = 2\gamma\lambda = 2\sqrt{fg(f^2+g^2)} = 2\alpha\beta$

hellet zunächſt, daß weder α, noch

ſonſt, gegen die Vorausſetzung,

ɔe. Ferner iſt

$+ g^2 = \alpha^4 + \beta^4 = \gamma^2 = \sqrt{a^2 + 4\lambda^4}$ =

$= a^2 + q^2,\ 4p^2q^2 = b^4,\ 4(a^2+q^2)$

$$q^4 + a^2q^2 = \tfrac{1}{4}b^4 .$$

ist, weil b nicht = o; so ist

$$\tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{2}\sqrt{a^4 + b^4} < \sqrt{a^4 + b^4},$$
$$\alpha^4 + \beta^4 < \gamma\sqrt{a^4 + b^4},$$
$$\alpha^4 + \beta^4 < \sqrt[4]{a^4 + b^4}, \gamma^2 < \sqrt[4]{c^2},$$
$$\gamma^2 < \sqrt{c}, \gamma < \sqrt[4]{c}.$$

Da weder α, noch β, = o; so ist auch γ nicht = o.

Aus diesem allgemeinen Beweise ergiebt sich nun, daß, wenn $a^4 + b^4 = c^2$ seyn könnte, wo a, b relative Primzahlen sind, und keine = o ist, aus dieser Gleichung eine Reihe Gleichungen von der Form

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 &= c^2, \\ a'^4 + b'^4 &= c'^2, \\ a''^4 + b''^4 &= c''^2, \\ a'''^4 + b'''^4 &= c'''^2, \\ &\text{&c.} \qquad \text{&c.} \end{aligned}$$

abgeleitet werden könnte, in denen alle durch a, b bezeichneten Größen relative Primzahlen sind, und keine = o ist, die Größen

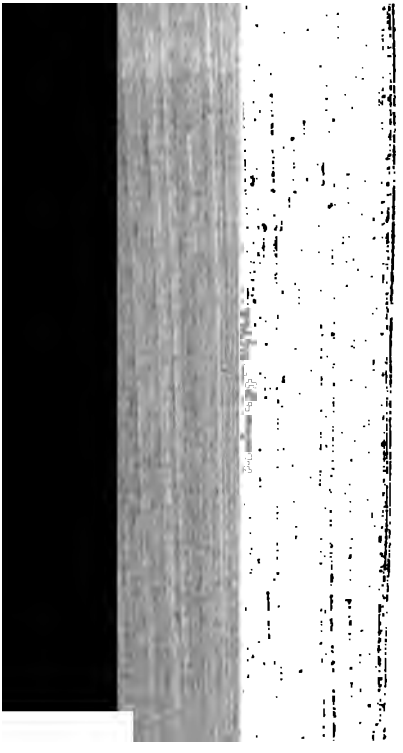
$$c, c', c'', c''', c'''', \ldots\ldots$$

aber eine abnehmende Reihe bilden würden, ohne daß man jemals auf ein Glied = o käme, so daß also diese Reihe in's Unendliche abnehmen würde, welches ungereimt ist, da c eine endliche ganze Zahl bezeichnet. Also kann die Gleichung $a^4 + b^4 = c^2$ nicht Statt finden, und unser Satz ist folglich bewiesen.

Aus diesem Satze folgt unmittelbar, daß auch die Summe zweier Biquadrate nie ein Biquadrat seyn kann.

Könnte $a^4 - b^4 = c^4$ seyn, so wäre $a^4 = b^4 + c^4$, welches nach dem so eben Bewiesenen nicht möglich ist. Also kann auch die Differenz zweier Biquadrate nie ein Biquadrat seyn. Uebrigens kann auch auf eine der vorigen ähnliche Art gezeigt werden, daß die Differenz zweier Biquadrate nie ein Quadrat seyn kann (Legendre a. a. O. p. 343. Élémens d'Algèbre par L. Euler. Nouv. éd. Paris. 1807. II. p. 179.).

4. Wir haben den vorigen Satz vorzüglich der Beweisart wegen hier mitgetheilt, da dieselbe bei Untersu-



also offenb
folglich kei
keine durch
dem erste
Glieder be
dem Obige
geschlossen

Die R
zusetzen, al
die Glieder
Sey nun

so ist

und folglich
Zahl durch
zahl der du
Progression

3. Sind Θ, λ zwei in A nicht aufgehende Primzahlen; so ist die Anzahl der durch Θ theilbaren Glieder $= G\left(\frac{n+\Theta^0}{\Theta}\right)$, die Anzahl der durch λ theilbaren Glieder $= G\left(\frac{n+\lambda^0}{\Theta}\right)$, und weil auch A und $\Theta\lambda$ relative Primzahlen sind, die Anzahl durch $\Theta\lambda$ theilbaren Glieder $= G\left(\frac{n+(\Theta\lambda)^0}{\Theta\lambda}\right)$ (1).

Folglich offenbar die Anzahl der durch Θ und λ nicht theilbaren Glieder $=$

$$y = n - G\left(\frac{n+\Theta^0}{\Theta}\right) + G\left(\frac{n+(\Theta\lambda)^0}{\Theta\lambda}\right) - G\left(\frac{n+\lambda^0}{\lambda}\right)$$

$$= n - \int G\left(\frac{n+\Theta^0}{\Theta}\right) + G\left(\frac{n+(\Theta\lambda)^0}{\Theta\lambda}\right),$$

wo das Summenzeichen bloß die Bedeutung hat, daß für sowohl Θ, als auch λ zu setzen ist. Daß $G\left(\frac{n+(\Theta\lambda)^0}{\Theta\lambda}\right)$ subtrahirt werden muß, fällt sogleich in die Augen, wenn man überlegt, daß mit $G\left(\frac{n+\Theta^0}{\Theta}\right)$ und $G\left(\frac{n+\lambda^0}{\lambda}\right)$ die durch $\Theta\lambda$ theilbaren Glieder offenbar einmal zu viel abgezogen sind.

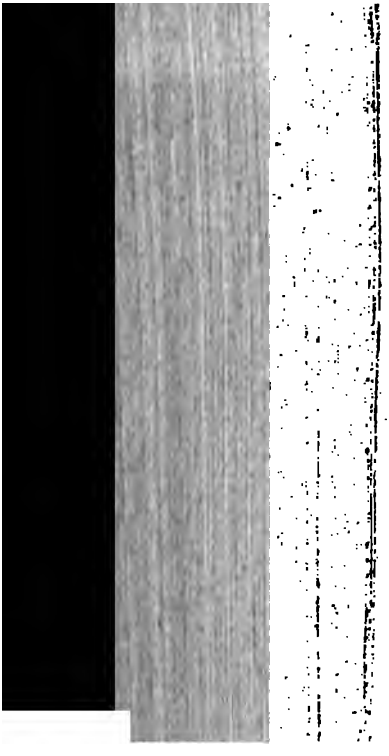
4. Seyen ferner Θ, λ, μ drei nicht in A aufgehende Primzahlen; so ist die Anzahl der durch Θ, λ nicht theilbaren Glieder, nach dem Vorhergehenden

$$= n - G\left(\frac{n+\Theta^0}{\Theta}\right) + G\left(\frac{n+(\Theta\lambda)^0}{\Theta\lambda}\right) - G\left(\frac{n+\lambda^0}{\lambda}\right).$$

Die Anzahl der durch μ theilbaren Glieder, in denen aber zugleich weder Θ, noch λ, aufgeht, ist

$$= G\left(\frac{n+\mu^0}{\mu}\right) - G\left(\frac{n+(\Theta\mu)^0}{\Theta\mu}\right) + G\left(\frac{n+(\Theta\lambda\mu)^0}{\Theta\lambda\mu}\right) - G\left(\frac{n+(\lambda\mu)^0}{\lambda\mu}\right)$$

wovon man sich leicht auf ähnliche Art, wie vorher, überzeugt. Diese Anzahl muß, um die Anzahl der durch Θ,



= 12 iſt.

Mehrere
digen Forme
Anzahl der
Legendre

X. Fern
jeder

1. Wen
geht, ſo laſ
ſtimmen, da
Zahlen ſeyn,

durch B theil

Ginge n
Vielfache v
blicklich erre
annehmen,

Für n =
man für y i

Für $n > 2$ sey $n = 2a + 1$, und man unterscheide nun folgende Fälle.

1) Giebt es für y einen Werth, für welchen $Ay^2 + B$ durch n theilbar wird, so nehme man für x ein Vielfaches von n; dann ist offenbar

$$x^2 - Ay^2 - B$$

durch n theibar.

2) Giebt es aber keinen Werth von y, für welchen n in $Ay^2 + B$ aufgeht, so setze man

$$Ay^2 + B = V, \; x^2 - Ay^2 - B = x^2 - V.$$

Nun ist, wie leicht erhellet

$$\frac{x^{2a} - V^a}{x^2 - V} = P =$$
$$x^{2a-2} + x^{2a-4}V + \ldots + x^2 V^{a-2} + V^{a-1};$$

also P eine ganze Zahl. Folglich

$$x^{2a} - V^a = (x^2 - V)P = x^{2a} - 1 - (V^a - 1),$$
$$(x^2 - V)PQ = (x^{2a} - 1)Q - (V^{2a} - 1),$$

für $Q = V^a + 1$. Nach der Fermat'schen Satze (III. 1.) geht die Primzahl $n = 2a + 1$ in $x^{2a} - 1$ auf, wenn sie in x nicht aufgeht, und eben so in $V^{2a} - 1$, wenn sie in V nicht aufgeht. Also geht, wenn n weder in x, noch in V aufgeht, n in $(x^2 - V)PQ$, folglich, wenn es weder in P, noch in Q aufgeht, in

$$x^2 - V = x^2 - Ay^2 - B$$

auf (I. 5.). Hieraus erhellet nun, daß x und y, wenn n in

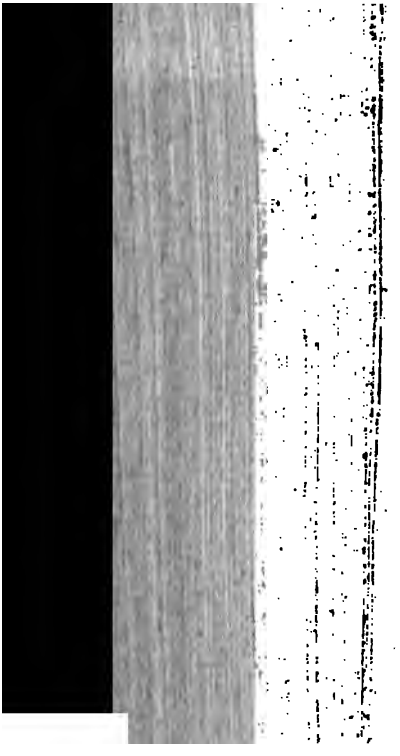
$$x^2 - Ay^2 - B$$

aufgehen soll, so bestimmt werden müssen, daß folgenden Bedingungen genügt wird:

n darf in V nicht aufgehen;
n darf in Q nicht aufgehen;
n darf in P nicht aufgehen;
n darf in x nicht aufgehen.

Es fragt sich nun, ob die gleichzeitige Erfüllung dieser Bedingungen immer möglich ist.

Die erste ist als erfüllt anzusehen, da es nach der



α) $B^a +$
und die zwei
β) Ist
$Q' = A^a y^{2a-}$

Dies ist
der Voraus
aufgeht.
Werthe von
durch n the
giebt es zw
gerechnet,
gesetzt werd
Werthe wi
schen den a
$2a + 1 -$ (
Q′ nicht dur
und es geht
wird, n in
(I. 4.).
auf: also ni

es dieses Polynoms vom Grade $2a-2$ ist $=1$, und olglich durch $n>2$ nicht theilbar. Also giebt es zwischen $-\frac{1}{2}n$ und $+\frac{1}{2}n$ höchstens $2a-2$ Werthe von x, für welche P durch n theilbar ist (II. 20.); die Anzahl aller Werthe von n zwischen diesen Gränzen, die Null mit gerechnet, ist wie vorher $=2a+1$, so daß es also zwischen diesen Gränzen wenigstens $2a+1-(2a-2)=3$ Werthe von x giebt, für welche P durch n nicht theilbar ist, wodurch ferner die dritte Bedingung erfüllt ist. Mit ihr ist aber auch zugleich die vierte erfüllt, weil die in Rede stehenden 3 Werthe von x alle $<n$ sind, und demnach keiner derselben, wenn man ihn für x setzt, durch n, also auch x nicht durch n theilbar ist.

Also lassen sich x, y immer so bestimmen, daß die obigen vier Bedingungen gleichzeitig erfüllt werden, und man kann folglich x, y immer so bestimmen, daß die in n nicht aufgehende Primzahl n in

$$x^2 - Ay^2 - B$$

aufgeht. Dieser Satz gilt also auch von den speciellern Formeln

$$x^2 + y^2 + 1 \text{ und } x^2 + y^2 - 1,$$

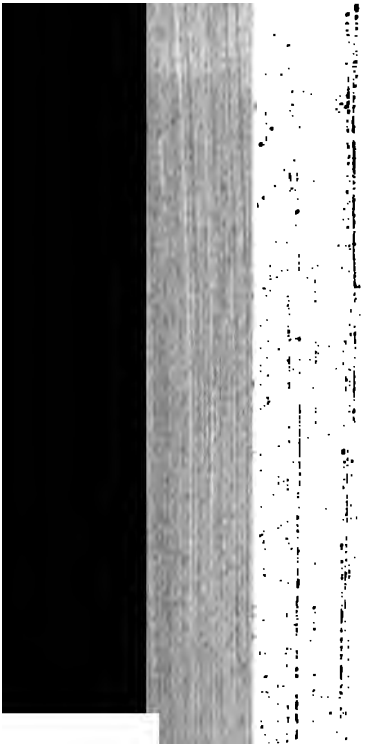
wenn man $A=-1, B=-1$, oder $A=-1, B=1$ setzt.

Der Erfinder dieses merkwürdigen Satzes ist Lagrange (Mém. de Berlin. 1770.). Die zuletzt erwähnten speciellen Fälle hatte schon Euler gefunden (Nov. comm. Petrop. T. V.). M. s. auch Legendre. a. a. O. p. 182.

2. Das Quadrat jeder viertheiligen Größe $a+b+c+d$ besteht aus den Quadraten der einzelnen Theile, und den doppelten Producten von je zwei Theilen in einander. Denn es ist

$$(a+b+c+d)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2 + 2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd.$$

3. Das Product zweier Summen von vier Quadraten in einander ist wieder eine Summe von vier Quadraten. Denn es ist, wovon man sich durch wirkliche Entwicke-



Da n eine
ſtimmen, daß
laſſen ſich für
$r^2 + s^2 - 1$
ſo beſtimmen, t
$(p^2 + q^2 + 1$
aufgeht, ſo daß

wo n' eine ganz
p
reſpective für p
$(p - \alpha n)^2$
$= p^2 +$
$- 2p\alpha n$
$+ \alpha^2$
welches offenba
$r^2 + s^2$ es iſt.
Vielfache von
immer ſo anneh
$r - \gamma n$, $s -$

$$p'^2 + q'^2 + r'^2 + s'^2$$

if, da diese Quadratensumme $= nn''$ ist.

Wie vorher schließt man also hieraus ferner, daß

$$p''^2 + q''^2 + r''^2 + s''^2 = n''n'''$$

yn wird, wo jede der Größen p'', q'', r'', $s'' < \frac{1}{2}n''$, ıd $n''' < n''$ ist.

Entwickelt man nun das Product

$$nn''.n''n''' = (p'^2 + q'^2 + r'^2 + s'^2)(p''^2 + q''^2 + r''^2 + s''^2)$$
$$= (p'^2 + q'^2 + r'^2 + s'^2)$$
$$\times |(p' - \alpha' n'')^2 + (q' - \beta' n'')^2 + (r' - \gamma' n'')^2 + (s' - \delta' n'')^2|$$

ıch (3.), so findet man, wenn in der Entwickelung nur

$$p'^2 + q'^2 + r'^2 + s'^2 = nn''$$

setzt wird, daß dieses Product wieder eine Summe von er Quadraten ist, deren jedes durch n''^2 theilbar ist. Al- ist auch nn''' die Summe von vier Quadraten, und lglich

$$p'''^2 + q'''^2 + r'''^2 + s'''^2 = nn'''.$$

Wäre nun $n''' = 1$, so wäre der Satz bewiesen. Wäre ıer $n''' > n$, so könnte man, ganz wie vorher wieder ne Zahl $n^{IV} < n'''$ finden, für welche nn^{IV} die Summe ın vier Quadraten ist, und der Satz würde bewiesen seyn, enn $n^{IV} = 1$ wäre. In jedem Falle erhellet aber, daß an nach dem hier gelehrten Verfahren eine Reihe von roducten

$$nn'', nn''', nn^{IV}, nn^{V}, \ldots.$$

ıden kann, deren jedes eine Summe von vier Quadra- n ist, und daß die Factoren

$$n'', n''', n^{IV}, n^{V}, \ldots.$$

ne abnehmende Reihe bilden. Da nun aber diese Reihe cht in's Unendliche fortlaufen kann, welches der Fall yn würde, wenn man nie auf ein Glied $= 1$ käme, erhellet, daß man immer endlich einmal auf ein sol- es Glied kommen muß, also jede Primzahl n die Summe von vier Quadraten ist.

5. Jede Zahl läßt sich in vier Quadrate zerlegen.

Jede Zahl läßt sich in Primfactoren zerlegen (Theiler ner Zahl. 1.). Jeder Primfactor ist die Summe

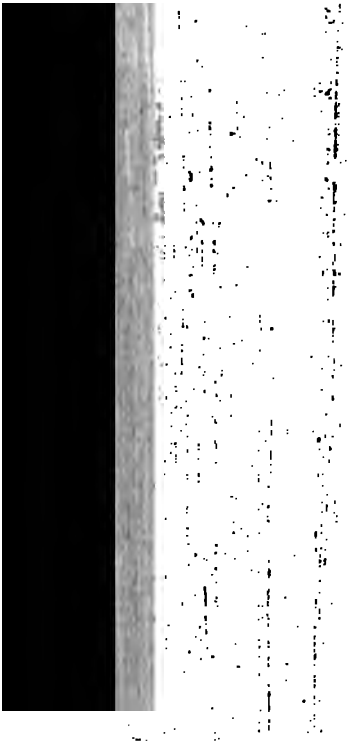
Den erſten B
Satzes gab Eule
erklärte denſelben
gend. Darauf g
Beweis in den M
von Euler noch
P. II. 1777. M
theilte dem Weſen
Satzes iſt Ferm
beſonderer Fall ſ
gung jeder Zahl
Fermat's Lehr
Zerlegung jeder
gendre (Théor
wieſen worden.
ſogenannten recip
mittelbar zuſamm
Theorie aufzuneh
konnte. Gewiß
dirt hat, Legen
zu leſen ſich gedr
eine Vorbereitung

l'essai sur la théorie des nombres. Février. 1816.) und Cauchy (Exercices de Mathematiques par A. L. Cauchy. 10. Livraison. Paris. 1826. p. 265.) gegebenen Beweise des allgemeinen Satzes von Fermat über die Zerlegung jeder Zahl in Polygonalzahlen; so wird man sich dadurch die vollständigste Kenntniß dieser überaus merkwürdigen Folge von Sätzen verschaffen.

XI. Historische Bemerkungen.

Im Vorhergehenden sind bereits die Namen der Geometer, welche sich vor Andern um die Zahlenlehre verdient gemacht haben, und ihre Schriften, so oft genannt worden, daß hier nur noch eine ganz kurze Uebersicht im Zusammenhange nöthig ist.

Die arithmetischen Bücher des Euclides sind als die erste Schrift anzusehen, in welcher Untersuchungen aus der Zahlenlehre vorkommen. Außer vielen andern merkwürdigen Sätzen enthalten sie vorzüglich eine Reihe von Sätzen über die Primzahlen, unter denen das oben in I. bewiesene wichtige Theorem als die Grundlage der ganzen Zahlenlehre anzusehen ist, da fast keine Untersuchung über die Zahlen desselben entbehren kann. Von dem großen arithmetischen Werke des Diophantus ist in dem Artikel: Unbestimmte Analytik, ausführlich die Rede gewesen, worauf wir also hier, so wie überhaupt auf die dort mitgetheilte Geschichte der unbestimmten Analytik verweisen. Dieses Werk gehört indeß mehr zur unbestimmten Analytik, als zur Theorie der Zahlen im eigentlichen Sinne, insofern wir darunter vorzugsweise die Lehre von den Eigenschaften der Zahlen, und zwar immer der ganzen Zahlen, verstehen. Die meisten Entdeckungen verdankt diese Wissenschaft Fermat, Parlamentsrath zu Toulouse. Von dem größten Theile der vielen von ihm entdeckten merkwürdigen Sätze ist in dem Obigen ausführlich die Rede gewesen. Er hat kein eignes Werk über die Zahlenlehre hinterlassen, sondern seine wichtigen Entdeckungen sind bloß als Randbemerkungen in der von seinem Sohne S.



kung zur 31ſten
derſelben Anmer
lerdings die Abſ
ausführlichen A
kannt zu machen
Zeit haben die A
Aufgabe ihres G
auch hier wieder
bloß viele Ferm
ſehen, ſondern a
gen bereichert.
in den Schrifte
Man findet ein
in Reuss Rep
tatibus litter. e
13, worauf ich
iſt ſchon oben a
dienſt um unſere
dem er in ſeine
Sec. édit. Paris
ſtändigen Lehrbe
reich an eigenth

griffs und des Zeichens der Congruenz der Zahlen, wodurch die Beweise vieler wichtigen Sätze von den Zahlen in hohem Grade vereinfacht werden, der Fundamentalsatz in der Lehre von den quadratischen Resten, welcher zwar einerlei mit Legendre's Satze von der Reciprocität, aber von Gauß zuerst auf mehrere ganz verschiedene Arten völlig streng und höchst scharfsinnig bewiesen worden ist, die ganze Lehre von den quadratischen und den Resten höherer Grade, würden allein hinreichend seyn, den Namen ihres Erfinders unsterblich zu machen. Aus den beiden zuletzt genannten Werken von Legendre und Gauß werden jetzt alle tiefern Kenntnisse der Zahlenlehre auf dem leichtesten und sichersten Wege geschöpft. Die Namen mehrerer anderer Mathematiker, welche sich um diesen schönen Theil der Mathematik verdient gemacht haben, sind schon oben genannt worden. M. vergl. übrigens auch noch die Artikel Theiler einer Zahl, Theilung, Primzahlen, Fermat's Lehrsätze, Vollkommene Zahl und überhaupt die besonderen Formen der Zahlen, vorzüglich aber den Artikel Unbestimmte Analytik.

Zahlensystem. Seyen N und x irgend zwei ganze Zahlen, deren jede hier aber bloß als eine Anzahl von Einheiten betrachtet wird, ohne Rücksicht auf jeden symbolischen Ausdruck dieser Zahlen. Mittelst gewöhnlicher Division, welche hier durch wiederholte Subtraction verrichtet gedacht werden kann, lassen sich in folgenden Gleichungen:

$$N = ax + \alpha$$
$$a = bx + \beta$$
$$b = cx + \gamma$$
$$c = dx + \delta$$
u. s. f. u. s. f.

die Größen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ offenbar so bestimmen, daß sie alle kleiner als x sind. Zugleich erhellet auch, daß $a, b, c, d, \ldots$ eine abnehmende Reihe bilden, und man folglich offenbar immer einmal auf ein Glied dieser Reihe kommen muß, welches = Null ist, weil alle Glieder dieser Reihe positive ganze Zahlen sind, und dieselbe demnach

$$N = ax +$$
$$= bx^2 +$$
$$= cx^3 +$$
$$= dx^4 +$$
$$\cdot \cdot \cdot$$
$$= \nu x^p +$$

oder auch

$$N = \alpha +$$

wo α, β, γ, δ fenbar auch ein o seyn kann.

Man ſieht a ſtellt werden kön Zahl x fortſchreit hen $<$ x ſind. Reihen nach den Coefficienten alle und x deſſen Gru

Will man nu ausdrücken, ſo iſt dieſer Reihen nur x Einheiten enthä

hes Symbol für die Grundzahl nöthig seyn, welches man aber vermeidet, wenn die obigen Reihen auf folgende viel infachere Weise, in welcher jetzt alle gebildete Völker überinkommen, geschrieben werden.

Jede Zahl

$$N = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \ldots + \mu x^{p-1} + \nu x^p$$

wird nämlich auf die Weise symbolisch dargestellt, daß man bloß die Coefficienten dieser Reihe, indem man mit α auf der rechten Seite anfängt, in ihrer natürlichen Ordnung neben einander schreibt, so daß also hiernach

$$N = \nu\mu \ldots \delta\gamma\beta\alpha$$

ist, wobei man sich aber immer zu erinnern hat, daß, wenn es auf die Bestimmung des wahren Werthes der Zahl N inkommt, α, β, γ, δ, ... nach der Reihe mit x^0, x^1, x^2, x^3, ... multiplicirt werden müssen.

Die erste, zweite, dritte, vierte Stelle u. s. f. von der rechten nach der linken Seite hin nennt man bei dieser Art die Zahlen zu schreiben auch die nullte, erste, zweite, dritte Ordnung u. s. f., welches sich, wie man sieht, bloß auf die Potenzen der Grundzahl bezieht, mit welchen die Ziffern in den genannten Stellen multiplicirt werden müssen, wenn der wahre Werth der Zahl N bestimmt werden soll. Da nun die Grundzahl x, wenn 0, 1 die bekannten Zeichen der Null und Eins sind, immer $= 0 + 1.x$ ist, so ist klar, daß in jedem Zahlensystem die Grundzahl 10 geschrieben werden muß, und daß folglich, wie schon oben bemerkt wurde, für die Grundzahl kein einfaches Zeichen nöthig ist.

Nach dieser Methode kann man also in einem Zahlensystem, dessen Grundzahl x ist, alle Zahlen mit x einfachen Zeichen schreiben. Das Wesentliche bei derselben ist, wie man leicht sieht, daß jedem einfachen Zahlzeichen ein verschiedener Werth nach seiner Stelle beigelegt wird. Daß die niedrigste Ordnung auf der rechten Seite beginnt, deutet auf einen orientalischen Ursprung dieser Methode, worüber mit Mehrerem der Artikel Zahlzeichen zu vergleichen ist.

Alle gebildete Völker legen jetzt die Zahl zehn als Basis

durch n theil
Ziffern der Za
x^0, x^1, x^2
nach der linke
ſtehenden Zah
Summe dieſer
$x^m -$
iſt; ſo iſt, we

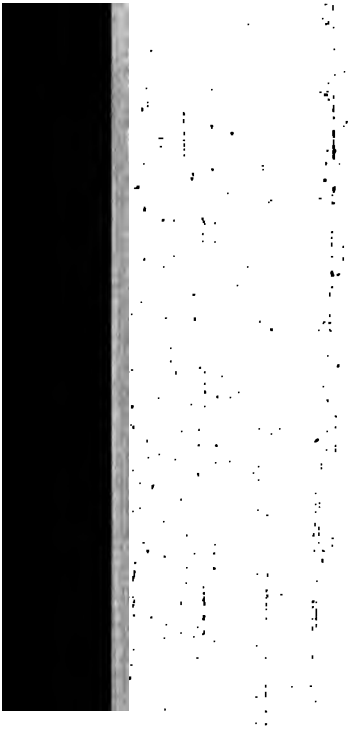
und folglich de
läßt, für jedes
N =
=
durch x — 1 t

durch x — 1 t
bekannten Ken
im dekadiſchen
M. vergl.

Zahl

dieſer Symbole ſelbſt, als vielmehr auf die Methoden ankommt, nach welchen mit einigen wenigen einfachen Zahlzeichen alle Zahlen bezeichnet werden. Von der vollkommenſten dieſer Methoden, welche jetzt alle gebildete Völker des alten und des neuen Continents befolgen, iſt in dem Artikel Zahlenſyſtem ein Abriß gegeben worden. Gegenwärtiger Artikel iſt beſtimmt, ſo weit die uns zu Gebote ſtehenden Mittel und der beſchränkte Raum es geſtatten, die Geſchichte dieſer wichtigen Erfindung zu liefern, von welcher Laplace in der Exposition du système du monde. édit. p. 325. mit Recht ſagt: „der Gedanke, alle Quantitäten durch neun Zeichen auszudrücken, indem man ihnen zugleich einen abſoluten und einen Stellenwerth giebt, iſt ſo einfach, daß man eben deshalb nicht genugſam erkennt, welche Bewunderung er verdient. Aber eben dieſe Einfachheit und Leichtigkeit, welche die Methode dem Calcul zuſichert, erheben das arithmetiſche Syſtem der Indier zu dem Range der nützlichſten Erfindungen. Wie ſchwer es war, eine ſolche Methode aufzufinden, kann man daraus abnehmen, daß ſie dem Genie des Archimedes und Apollonius von Perga, zweier der größten Geiſter des Alterthums, entgangen war.“

1. Den Grund, daß faſt alle Völker bis zehn zählen, hat ſchon Ariſtoteles (Probl. Sect. XV. Probl. III.) in der Geſtalt unſerer Hände und Füße, als fünfäſtiger Organe gefunden, und Alexander von Humboldt führt in dieſer Beziehung in einer trefflichen akademiſchen Abhandlung über die bei verſchiedenen Völkern üblichen Syſteme von Zahlenzeichen und über den Urſprung des Stellenwerthes in den indiſchen Zahlen, welche man in Crelles Journal der reinen und angew. Math. IV. 3. S. 205. findet, verſchiedene intereſſante Thatſachen an, wovon wir hier Einiges ausheben. In der Chibcha-Sprache der Muyskas heißt 10 Fuß (quihieha oder qhieha), weil man den Fuß nennt, wenn ſchon beide Hände durchgezählt ſind; 11, 12, 13 heißen von den Zahlwörtern ata, bosa, mica (eins, zwei, drei) quihieha ata, quihieha bosa, qui



man an beiden
Im Perſiſchen
Fauſt, herſtam
welches nach
quinque, ſo n
führt haben ſoll.

Ariſtotel
ſchen Volkes, r
Erhard Wei
Arithmetik in be
der Artikel Tetr
Ausnahme von
In dem Bullet
Juin. 1827. p.
ſpiele noch die
welche nur bis 5
matik. 1760. un
erwähnt, ſo wie
tic. Paris. 1619
die Baſis der M

2. Die Zahl

ier letzten Buchstaben, und 500 bis 900 durch Zusam-
ienſetzung von 400 mit 100, 200, 300, 400, 500, ſo
aß erſtere, nach orientaliſcher Art zu ſchreiben, voran ſteht,
ezeichnet. Die Tauſender werden wie die Einer mit zwei
arüber geſetzten Punkten bezeichnet. Alle übrigen Zahlen
hielt man durch bloße Nebeneinanderſtellung dieſer Zei-
)en, ſo daß immer die größere Zahl voran ſteht. M. ſ.
esenius Lehrgebäude der hebr. Sprache. Leip-
ig. S. 15. Im hebräiſchen Texte des alten Teſtaments
nd die Zahlen mit Worten geſchrieben. v. Humboldt
at in der angeführten trefflichen Abhandlung ſehr viele
Methoden, die Zahlen mit einer geringen Anzahl einfacher
eichen zu ſchreiben, verglichen, und dieſelben, mit Aus-
hluß der heutigen Zahlenſyſteme, in folgende vier Klaſſen
ebracht.

Erſte Methode. Durch bloße Nebeneinanderſtellung (Juxtapoſition) einiger einfachen Zeichen, wie bei Tuscern, Römern, Griechen bis zur Myriade, Mexicanern und Aegyptern. Wir wählen als Beiſpiel die römiſche Bezeichnungsart.

Einfache Zeichen:

1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000
I, V, X, L, C, IↃ oder D, CIↃ oder M.

Ein einzelnes Stück wurde durch eine ſenkrechte Linie (I) bezeichnet, fünf Stück durch einen ſpitzigen Winkel (V), funfzig Stück durch einen rechten Winkel (L). Aus der Verbindung zweier V entſtand X, ſo wie aus der Verbindung zweier übereinander geſetzten L eine Klammer, und durch deren Abrundung, um des Wortes centum willen, das C. 500 Stück wurden durch ein Quadrat bezeichnet, woraus nach und nach IↃ und D entſtanden. Aus CIↃ entſtand M, weil dieſer Buchſtabe der erſte des Wortes mille war (Lateiniſche Grammatik von Grotefend. 3. Aufl. Bnd. II. Frankf. 1820. S. 163.). Gleiche nebeneinander ſtehende Zeichen bedeuteten eine Vervielfachung des einfachen Zeichens, wie z. B. XX (20), XXX (30), CC (200). Stehen zwei ungleiche Zeichen bei einander,

= 50000,
1000000.
fallen muß,
werden, fällt

Zweite
derung des
Zeichen.

Ein Beisp
zahlen in der
gendes enthält

α	β
1	2
ι	$\varkappa$
10	20
ϱ	σ
100	200
α_{ι}	β_{ι}
1000	2000
$\frac{\alpha}{n\tau}$	

Brüche, deren Zähler die Einheit ist, werden bloß urch den Nenner mit einem Acutus bezeichnet. Z. B. $' = \frac{1}{3}$, $\delta' = \frac{1}{4}$, $\xi\delta' = \frac{1}{64}$. Sonst werden Zähler und Nenner in eine Linie geschrieben, der erstere voran, und urch die Größe der Schrift unterschieden. M. s. Délambre Histoire de l'Astronomie ancienne. T. II. hap. I. p. 6. Oeuvres d'Archimède par F. Peyrard. aris. 1807. Ueber die Arithmetik der Griechen. A. d. ranz. des Herrn Delambre von J. J. J. Hoffmann. Mainz. 1817. A. Matthiä ausführl. griech. Gramm. . Aufl. Lpzg. 1825. I. S. 23. 509.

Vorzüglich wichtig sind die von Silvestre de Sacy i einem Manuscripte aus der Bibliothek der alten Abtey St. Germain du Près entdeckten arabischen Gobar-Zifern. Silvestre de Sacy sagt: le gobar a un rand rapport avec le chiffre indien, mais il n'a pas e Zero (v. Humboldt a. a. O. S. 223.).

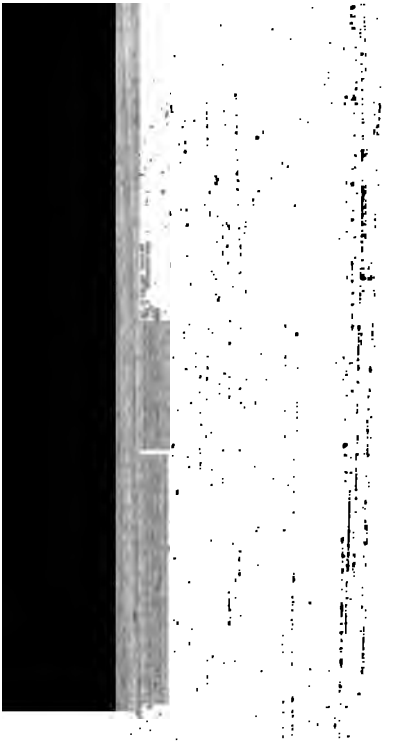
In dieser Gobar- oder Staubschrift werden die ehner, Hunderter u. s. f. durch beigefügte Punkte angeben, wie z. B. $3\cdot = 30$, $4\cdot\cdot = 400$, $6\cdot\cdot = 6000$. S. auch in (3.) das Scholion des Mönchs Neophytos.

Dritte Methode. Vervielfachung des Werthes urch Coefficienten.

Diophantus und Pappus z. B. schreiben βMv ir $2 \times 10000 = 20000$, $\alpha Mv\beta$ bedeutet einmal $0000 + 2 = 10002$.

Vierte Methode. Vervielfältigung und Verinderung, aufsteigend und absteigend, durch Abtheilung on Zahlschichten, deren Werth sich in geometrischer Proression vermindert. M. s. mit Mehrerem v. Humboldt a. O. S. 225.

3. Die Inder haben in uralter Zeit schon unsere genwärtige Bezeichnungsart der Zahlen gebraucht. Ihre zigen Zahlzeichen stimmen zwar nicht mit den unsrigen erein, allein auf die Figur kommt es, wie schon oben innert, hier nicht an, sondern auf die im Art. Zahlensy-



Die Kunſt
der Bibliothe
rin die Zahlz
tens ſagt ein
die Indiſche
ches, das m
und des Sc
Schriftſteller
rede zu einer
bliothek zu L
von Indiſch
iſt von dem
handſchriftlich
vorhanden, w
ψηφοφορια
Rechnungsart
der Zahlen iſt
oder Zahlfigu
men aber faſt
phadi als d
des fügt fern
bedeutenden Z
Dieſe neun

jetzt übliche Rechnungsart in Europa eingeführt ward, nahm man es als ausgemacht an, daß sie von den Indern herkomme. Johannes de Sacro Bosco im 13ten Jahrhundert bezeugt dieses in den Versen, womit sich seine in gebundener Rede geschriebene Arithmetik anfängt:

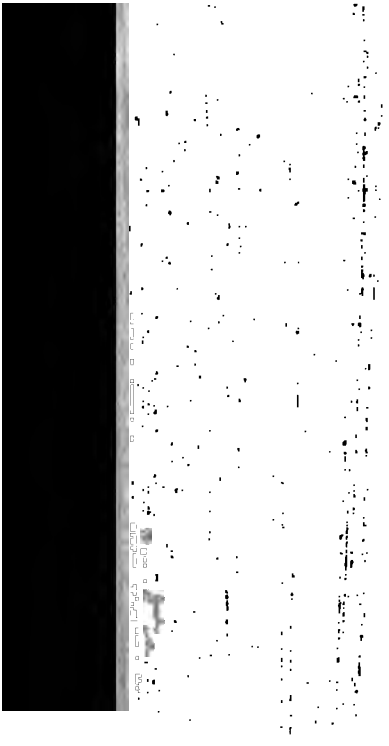
Haec Algorithmus arç praesens dicitur, in qua
Talibus Jndorum fruimur bis quinque figuris.

Die Zahlzeichen des Johannes de Sacro-Bosco sind mit den unsrigen größtentheils einerlei.

Von besonderer Wichtigkeit ist auch folgendes von v. Humboldt a. a. O. S. 227. aus einem Codex der Pariser Bibliothek mitgetheilte Scholion des Mönchs Neophytos:

Tzyphra est et vocatur id, quod cuivis litterae inde a decade et insequentibus numeris quasi *ομικρὸν* inscribitur. Significat autem hac Indica voce tale analogiam numerorum. Ubi igitur scriptum est simile primae litterae *ἄλφα*, pro unitate scriptae, atque superimpositum habet vel punctum vel quasi *ομικρὸν*, addita altera figura litterae Indicae, differentiam et augmentum numerorum declarat. E. g. pro primo graeco numero, *α* scripto, apud Indos sive linea recta perpendicularis, quando non habet superimpositum punctum vel *ομικρὸν*, ipsum hoc denotat unitatem, ubi vero superimpositum sit punctum atque altera littera adscripta sit, figura quidem similis priori, significat XI, propter additamentum similis litterae atque superimpositum unum punctum. Similiter etiam in reliquis litteris, quemadmodum adspectus docet. Si vero plura habet puncta, plura denotat. Quod intelligas, lector, et supputes unumquidque.

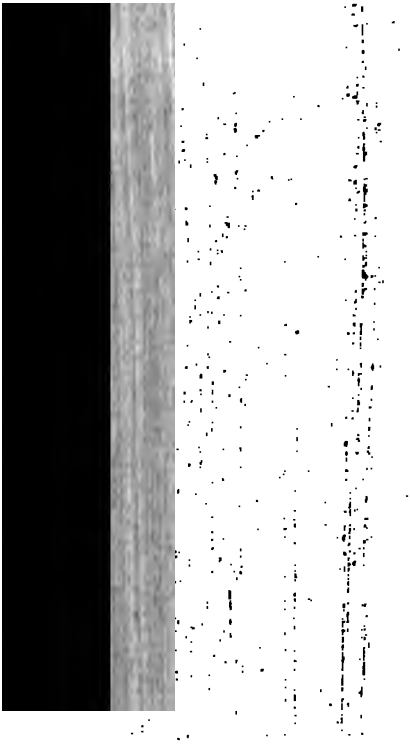
Die 9 Ziffern des Neophytos sind, außer der 4, ganz den persischen ähnlich. Nach dieser Bezeichnungsart wäre also z. B. $\overset{\circ}{2} = 20$, $\overset{\circ}{2}4 = 24$, $\overset{\circ\circ}{5} = 500$, $\overset{\circ\circ}{6} = 6000$, $\overset{\circ}{3}\overset{\circ\circ}{4}\overset{\circ}{6}7 = 3467$. Wie ähnlich, nur weitläufiger,



gewiſſe Zeiche
racteres nenn
ungeachtet der
man doch darc
in einigen Har
Ziffern, die d
ähnlich ſind.
ben Werks Al
Wäre die dek
findung, ſo iſ
Volk als die G
Eutocius,
lebte, bedient
medes Sandre
als Ziffern.
heiten und Ker
welche die unſr
nommen. Viel
andere aſiatiſch
geworden, wohe
richt davon erha
räern zu, die w

riechiſchen Reiche immer mehr in Verfall geriethen. Die lte Rechnungsform hat ſich noch lange weiter hin in dem eſtlichen Aſien erhalten. Man ſieht es daraus, daß der Kaliph Waled (um 700) verboten hat, die griechiſche Sprache und Bezeichnung der Zahlen bei den Rechnungen er Staatskaſſen zu gebrauchen (Gibbon's history of he decline and fall of the Roman empire. Vol. V. . 321.). M. vergl. Weidleri Spicilegium obervationum ad Historiam notarum numeralium ertinentium. Wittenbergae. 1755. Mannert de umerorum quos arabicos vocant vera origine pyagorica. Norimb. 1801.

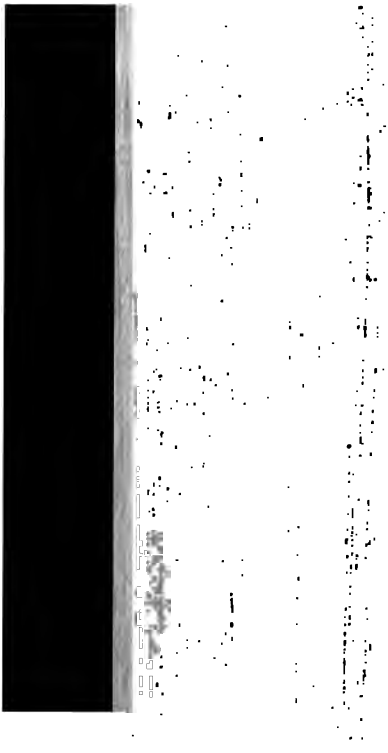
5. Nach einer Bemerkung Sedillots, welche v. umboldt a. a. O. S. 229. anführt, hat die indiſche echnungsart ihren Weg in die Abendländer durch den gehrten Aſtronomen Rihan Muhammed ebn Ahmet lbiruni, welcher ſich in Indien aufhielt, gefunden, elleicht auch durch mauriſche Zollbeamte an der nordrikaniſchen Küſte und den Verkehr derſelben mit italiäſchen Kaufleuten. Nach der gewöhnlichen Meinung achten ſie die Araber, welche ſie von den Indern angeommen hatten, nach Spanien, wo wahrſcheinlich ſchon n zehnten Jahrhundert der wegen ſeiner Gelehrſamkeit rühmte Gerbert, aus Frankreich gebürtig, welcher ter dem Namen Sylveſter II. im Jahre 999 die bſtliche Würde erhielt, ſie von ihnen lernte. In einem ner Briefe ſagt er, daß dieſelbe Zahl modo simplex, odo compositus, nunc digitus, nunc constituar ut articulus. In einem Rechenbuche aus dem kten Jahrhundert heißen 10, 20, 30 numerus artilus, und 11, 12 bis 19 numerus compositus. Käſtners G. d. M. II. S. 699.). Ein Chronikenſchreiber Wilhelm von Malmesbury, der ungefähr 150 Jahre nach Gerbert lebte, ſagt von ihm: Abaim certe primus a Saracenis rapiens regulas dedit, ae a sudantibus Abacistis vix intelligantur. In iem geometriſchen Werke Gerberts, das in eine ammlung verſchiedener Schriften: Thesaurus Anecdo-



konnte. M
des Leona
iſt. Von die
des Targioni
in Toscana.
Florenz. 176
Magliabechiſ
vorhanden.
Handelsmann
der vortrefflich
der zu rechne
habe daraus b
Handlung un
mit vieler Mü
Rechnungsart
errorem) in
Deswegen wol
In dem erſten
und dem Zeich
alle Zahlen ge
Schrift, daß
12ten Jahrhun

macht, als sie aus den arabischen Originalen abgeschrieben und zugleich in's Lateinische übersetzt wurden; hernach habe man die dekadischen Ziffern auch zu andern Rechnungen angewandt. In der Bibliothek zu Oxford sind astronomische Tafeln von einem mauriſch-spaniſchen Verfasser Arzachel, die etwa um 1080 verfertigt sind. In diesen sind dekadische Ziffern gebraucht. Die lateinische Abschrift scheint um 1200 oder doch vor 1250 gemacht zu seyn. Da die Alphonsinischen Tafeln um 1270 oder schon 1252 bekannt gemacht worden sind, so hat man sich gewiß nicht die Mühe gegeben, ältere von geringerem Werthe abzuschreiben. In einer andern Sammlung astronomischer Tafeln, die für den Anfang des Jahres 1150 berechnet sind, werden schon die dekadischen Ziffern angetroffen. Ein Paar Schriften über die Festrechnung aus der ersten Hälfte des 13ten Jahrhunderts zeigen sie auch in alten Exemplaren. Wie früh man sie im gemeinen Leben gebraucht habe, ist nicht zuverlässig auszumachen. Die älteste Spur glaubte Wallis auf einem Kamine zu Helmdon in Northamtonshire gefunden zu haben, folgendergestalt: A° DO'M° 133, d. i. 1133. Nach seiner Zeit meinte man noch frühere Jahreszahlen in England entdeckt zu haben, als 1090 in Colchester, auch M16 = 1016, ferner 1011, sogar 975. Dagegen hat Dr. Ward in den Philos. Transact. erinnert, daß es unwahrscheinlich sey, daß die neuen Zahlzeichen von Handwerksleuten so sehr früher gebraucht seyen, als von Gelehrten, da sie in keinem alten Manuscripte eher vorkämen als in einigen Abschriften von des Johannes de Sacro Bosco Werk, der 1256 gestorben ist. Er bemerkt, daß die Inschrift zu Helmdon 1233 gelesen werden müsse, daß die zu Colchester 1490 sey, daß M16 keine Zahl, sondern die Anfangsbuchstaben MIC eines Namens sey, und daß statt der Jahrzahl 975 die römische Zahl MXV gelesen werden müsse (Martyn's Abridg. Phil. Trans. Vol. 9. p. 420.). Die Zahl 1011 hat man nachgehends für Buchstaben aus dem Namen eines Schutzheiligen erkannt.

In öffentlichen Aufschriften erscheinen nach Gatterers



Kästne

Berliniſc
1. Blatt. 17
vations on t
England by
Society of A

Weidle
ribus et eor

Die einzel
Philos. Tran
p. 79. 1745.
von Wallis
Von Luffki
p. 652.

Vom Urſp
frieden im
2. Band. 177

Zaube

Zehner
diſchen Zahlenſy

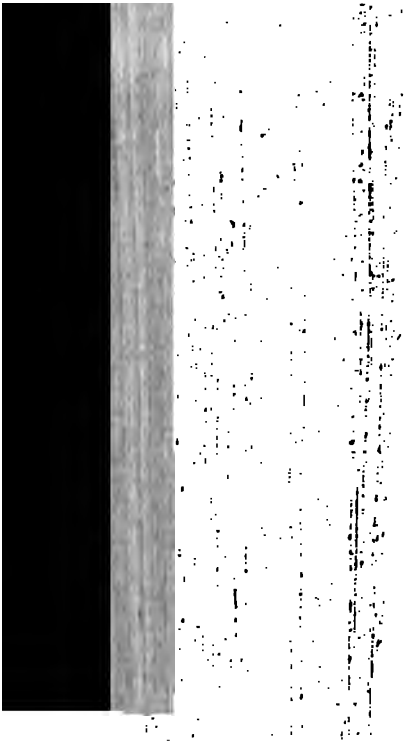
und Zahlzeichen. Die Zeichen unbestimmter Größen sind Buchstaben, s. Bezeichnung und Buchstabenrechnung. In diesem Artikel soll nur eine Uebersicht der gewöhnlichen Zeichen gegeben werden (s. Thl. I. S. 307.).

Das Zeichen der Addition ist +, das Zeichen der Subtraction ist —. Beide Zeichen hat Hutton (Math. Dict. Art. Characters) zuerst bei Stifel gefunden. Cardan, Tartalea u. A. gebrauchten die Buchstaben p und m, d. i. plus oder piu und minus.

Auch bedeuten + und — vor dem Symbol einer Größe das Positive und Negative, wie z. B. + a oder — a (s. Entgegengesetzte Größen). Dieser doppelte Gebrauch der Zeichen + und — hat Einige veranlaßt, für die Beziehung des Entgegengesetzten andere Zeichen vorzuschlagen (s. z. B. H. A. Rothe Lehrb. der Arithm. Thl. I. Lpzg. 1804. Eilftes Kapitel), von denen aber keine allgemein in Gebrauch gekommen sind.

Das Zeichen der Multiplication ist ×, bei bestimmten Zahlen, bei Linien, die durch die beiden Buchstaben an ihren Endpunkten angedeutet werden, etwa bei gebrochenen Factoren, oder zur Absonderung einiger Factoren eines Products von den andern, wenn jene als ein einziger Factor betrachtet und ausgezeichnet werden sollen. Dieses Zeichen ist von Oughtred eingeführt. Werden die Factoren eines Products durch einzelne Buchstaben bezeichnet, so werden sie bloß neben einander geschrieben, wie abcde... Auch ein Punkt (.) zeigt bei numerischen Factoren eine Multiplication an. Z. B. 4.5 ist 20. Bei gebrochenen Factoren in bestimmten oder unbestimmten Größen wird ebenfalls noch oft ein Punkt zur Bezeichnung der Multiplication gebraucht.

Das Zeichen der Division ist entweder ein Strich mit dem Dividendus darüber und dem Divisor darunter, wie $\frac{a}{b}$, oder : , zwischen dem Dividendus und Divisor, so daß ersterer voran steht, wie a : b. Beides heißt a durch b dividirt. Wenn Dividendus und Divisor aus mehreren Theilen bestehen, so ist die erstere Bezeichnung



ſich dieſer A
rührt dieſelb
zog einen S
plexe Größe
Bezeichnung
ter einander
dings auch v
So iſt z. B.

Anſtatt der
wenn es kein
gebraucht, wi
ren in einan
fortſchreiten:

$$\frac{n(n-1)..}{1.2.}$$

Die mte

zel aus der
bezeichnet, w
zeichnungen d
der Art. Pote

Das Zeichen der Gleichheit ist =. Robert Recorde hat es nach Hutton zuerst gebraucht. Descartes bediente sich des Zeichens ∞; eben so Hudde, Colle, Ozanam nach Saverien Dict. Math. Durch Harriot ist das Zeichen = zuerst allgemein geworden.

Das Zeichen der Ungleichheit ist > und <. Nämlich a > b heißt: a ist größer als b, und b < a heißt: a ist kleiner als a. Oughtred, Barrow u. A. bedienten sich der Zeichen ⊐ (größer) und ⊏ (kleiner). Das Zeichen Z zeigt an, daß eine Größe größer, kleiner oder eben so groß als eine andere seyn könne (S. den Art. Verhältniß). Es ist ein neues, etwa in der deutschen Ausgabe des Euklides von Lorenz zuerst gebrauchtes, Zeichen.

Das Zeichen des arithmetischen Verhältnisses zweier Größen ist a — b, des geometrischen Verhältnisses a : b. Der Grund dieser Bezeichnungen durch das Subtractions- und Divisionszeichen erhellet leicht aus der Natur dieser Verhältnisse. Die arithmetische und geometrische Proportion bezeichnet man durch a — b = c — d und a : b = c : d. Letztere Bezeichnung ist seit Wolf in Deutschland gemein eingeführt, und entspricht ihrem Zwecke vollkommen. Englische und französische Schriftsteller bezeichnen die geometrische Proportion gewöhnlich durch a : b :: c : d. Das Zeichen (::) rührt von Oughtred her. Auch findet man a . b = c . d als Bezeichnung einer geometrischen Proportion, nach Saverien a. a. O., aber selten. Ein Verhältniß, welches aus den Verhältnissen a : b, c : d, e : f, u. s. f. zusammengesetzt ist, bezeichnet man durch (a : b) + (c : d) + (e : f) + ... Eine geometrische Progression wird auch bezeichnet durch ÷÷ 3, 6, 12, 24, 48, ...; eben so eine stetige arithmetische Proportion durch ÷ a . b . c, eine stetige geometrische Proportion durch ÷÷ a . b . c. Eine arithmetische Progression durch ÷ 2, 6, 10, 14, 18, 22, ...

∞ bedeutet bei einigen englischen und französischen Schriftstellern, wenn es zwischen zwei Größen steht, wie z. B. a ∞ b, den Unterschied der beiden Größen a und b,

Mit den
Zeichen der
Zahl. II. 1.).
buche, durch

Hat eine
der Inbegriff
Parentheſen,
in eine einfach

$\sqrt[n]{((a+x)}$

Wurzel haben
ſtimmten Wer
the fähigen ar
welche allgem
wendbar.

* bedeutet
Gleichung, n
dieſer Gleichu
fehlt.

Iſt $y =$

den nach der Reihe durch $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{IV}(x)$, ... bezeichnet.

Die Engländer gebrauchen die von Newton eingeführte höchst unbequeme Bezeichnung der auf einander folgenden Differentialverhältnisse $\dot{x}:\dot{y}$, $\ddot{x}:\ddot{y}$, $\dddot{x}:\dddot{y}$, u. s. f. Jetzt mag aber diese Bezeichnung wohl auch größtentheils abgekommen seyn. Ist y eine Function mehrerer veränderlichen Größen x, v, u, ..., so bedeutet $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$ den Differentialquotienten von y in Bezug auf x, wenn bloß diese Größe als veränderlich betrachtet wird, d. h. das partielle Differential von y in Bezug auf x. Eine ähnliche Bedeutung haben Symbole wie $\frac{\partial^4 y}{\partial v \partial x^3}$, $\frac{\partial^6 y}{\partial u \partial v^2 \partial x^3}$, u. s. f.

Das unbestimmte Integral eines Differentials $X dx$ wird durch $\int X dx$ bezeichnet. Soll dieses Integral aber zwischen den Gränzen a, b, d. i. von a bis b, genommen werden, so erhält man ein bestimmtes Integral, und bezeichnet es nach den neuesten französischen Schriftstellern durch $\int_a^b X dx$.

Die nte Variation einer Function V wird durch $\delta^n V$ bezeichnet; s. Variationsrechnung.

Ueber die vielen combinatorischen Zeichen s. m. den Art. Combinatorische Analysis und Localzeichen. Eben so den Art. Facultät über die bei dieser Größenform gewöhnlichen Bezeichnungen, u. s. f.

Von geometrischen Zeichen bemerke man nur noch folgende:

$\triangle$ ein Dreieck.

$\square$ ein Quadrat.

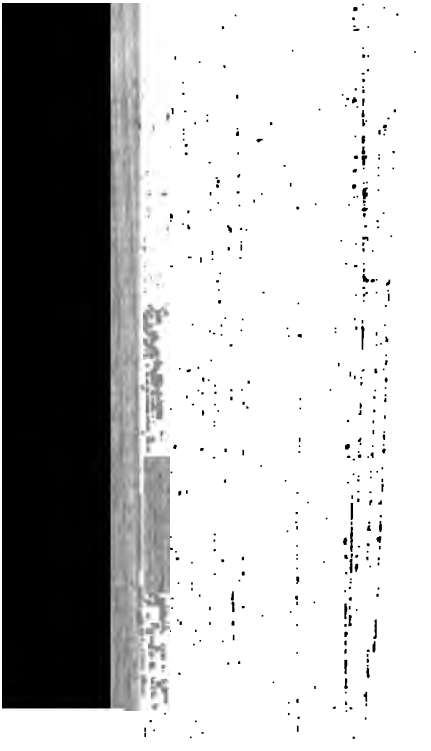
$\square$ ein Rechteck, oder Parallelogramm überhaupt.

$AB \times BC$ das unter den Linien AB und BC als zusammenstoßenden Seiten enthaltene Rechteck.

AB^2 oder AB^q das Quadrat der Linie AB; auch $\square AB$.

$\odot$ ein Kreis.

$\angle$ ein Winkel.



ten u. ſ. f.,

Bei Me
chen Ruthe
Um Zweide
Falle einen
z. B. 16° 9

Die hier
menden Zeic

Zens
(8.).

Zerle
merorum)

Zerſt
niß (13.).

Zero,

Zetet
Harriot un
die Erfindung

einer Curve entstandenen Körpers. Im Art. Sphäroid. (35. ff.) ist von dem Flächeninhalte der Zonen des elliptischen Sphäroids ausführlich gehandelt, weshalb wir hier nur noch einige Bemerkungen über Kugelzonen beibringen wollen.

1. Man bezeichne den Halbmesser der Kugel durch r, und rechne die Abscissen vom Mittelpunkte; so ist die Gleichung des erzeugenden Kreises $x^2 + y^2 = r^2$. Entsprechen nun die Parallelkreise, welche die Zone Z begränzen, den Abscissen α, a; so ist nach Thl. I. S. 514.

$$Z = 2\pi \int_\alpha^a y\partial x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}.$$

Aber

$$x\partial x + y\partial y = 0, \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{x}{y};$$

$$\int y\partial x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = \int y\partial x \sqrt{\frac{r^2}{y^2}} = \int r\partial x = rx.$$

Also $Z = 2\pi r(a - \alpha)$. Da nun offenbar $a - \alpha$ die Höhe der Zone, und $2r\pi$ die Peripherie eines größten Kugelkreises ist; so findet man den Inhalt einer sphärischen Zone, wenn man mit ihrer Höhe die Peripherie eines größten Kugelkreises multiplicirt. Einen elementaren Beweis s. m. in Legendre Elém. de Géom. Livre VIII. Prop. XI. Auch ist, wie schon Archimedes (De Sphaera et Cylindro I. 50. Coroll. 4.) gefunden hat, der Flächeninhalt einer sphärischen Zone der Seitenfläche eines geraden Cylinders gleich, welcher mit der Zone einerlei Höhe und mit der Kugel einerlei Halbmesser hat.

2. Der Inhalt des der Zone entsprechenden Körpers ist nach Thl. I. S. 580., wenn wir denselben durch Z' bezeichnen, $=$

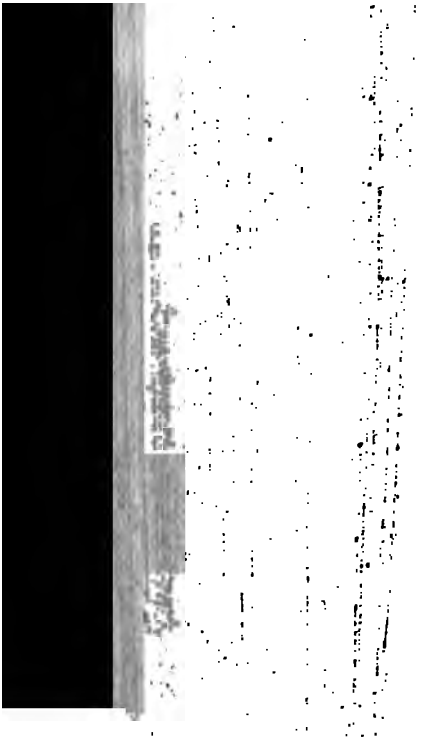
$$Z' = \pi \int_\alpha^a y^2 \partial x.$$

Aber

$$\int y^2 \partial x = \int (r^2 - x^2)\partial x = r^2 x - \tfrac{1}{3}x^3.$$

Folglich

$$\begin{aligned} Z' &= \pi r^2 (a - \alpha) - \tfrac{1}{3}\pi (a^3 - \alpha^3) \\ &= \pi r^2 (a - \alpha) - \tfrac{1}{3}\pi (a - \alpha)(a^2 + a\alpha + \alpha^2) \\ &= \pi r^2 (a - \alpha) - \tfrac{1}{3}\pi (a - \alpha)a^2 - \tfrac{1}{3}\pi (a - \alpha)\alpha^2 \\ &\quad - \tfrac{1}{3}\pi (a - \alpha)a\alpha \end{aligned}$$



andern Be
P. XVIII.

Für ein
fläche =
$2\pi r(r - a$

M. ſ. Ar

3. Sin
einer Zone
oder beide ſi

=

=

Wäre die
umgekehrt;
muß, wodu
ein Pluszeic
der Zone nac

=

=

(Goniometri

L′ = 66° 32′; für die kalten H = 66° 32′, H′ = 90°; ür die heiße Zone H = — 23° 28′, H′ = + 23° 8′; woraus man mittelſt vorſtehender Formel und des ekannten mittlern Halbmeſſers der Erde leicht die Flächenäume der einzelnen Zonen berechnen kann.

4. Sey nun der Flächeninhalt eines ſphäriſchen Vierecks, welches von zwei bekannten Meridianen und zwei ekannten Parallelkreiſen eingeſchloſſen wird, = V. Die ängen und Breiten ſeiner Spitzen ſeyen L, L′ und H, H′. Der zwiſchen den beiden Meridianen enthaltene Bogen des Equators iſt = L′ — L. Iſt nun, wie oben, die Area er ganzen Zone = Z; ſo erhellet leicht die Richtigkeit olgender Proportion:

$$360° : L' - L = Z : V .$$

lſo

$$V = Z . \frac{L' - L}{360°} ,$$

d. nach (3.)

$$V = 4r^2 n \left(\frac{L' - L}{360°}\right) \sin\left(\frac{H' - H}{2}\right) \cos\left(\frac{H' + H}{2}\right)$$

$$= r^2 \pi \left(\frac{L' - L}{90°}\right) \sin\left(\frac{H' - H}{2}\right) \cos\left(\frac{H' + H}{2}\right) .$$

L′ — L muß, ſo wie 90°, in Graden ausgedrückt yn. Wäre L′ — L in Secunden gegeben, ſo müßte an auch 90° auf Secunden bringen.

Zufälliger Punkt, ſ. Perſpectiv (9.).

Zufällige Wurzeln, ſ. Gleichung (171.).

Zugeordneter oder conjugirter unkt, ſ. Conjugirt. III. und Vielfacher Punkt.

Zuglinie, ſ. Tractoria.

Zuſammengeſetzte Gleichung, ſ. eichung (4.).

Zuſammengeſetztes Verhältniß, Verhältniß (14.).

ſammengeſetzte Zahl, ſ. Prim
heiler einer Zahl (1.).

ſammenlaufende Linien (lin
gentes) ſind ſolche gerade Linien, welche, ver
nander ſchneiden.

uſatz, ſ. Corollarium.

weig einer krummen Linie, ſ. Krm
26.).

werchaxe heißt zuweilen die beſtimmte
axe der Hyperbel, welche zwiſchen ihren beiden S
egt.

weitheilige Größe, ſ. Binomium.

Einige Berichtigungen.

S. 16 Z. 2 v. u. st. $\underset{\uparrow m\,1}{V}$ s. m. $\underset{m\uparrow 1}{V}$.
— 19 — 17 tilge man einmal wie oben.
— 22 — 3 st. a s. m. a^2.
— — — 11 Hinter braucht ein Punktum.
— 31 — 13 st. Uutersuchung s. m. Untersuchung.
— 41 — 7 st. $(x-a)^{-\frac{1}{2}}$ s. m. $(x-a)^{-\frac{1}{2}}$.
— 45 — 14 st. in dem s. m. indem.
— 51 — 9 st. anch s. m. auch.
— 60 — 6 v. u. st. Digonale s. m. Diagonale.
— 61 — 7 v. u. st. 7. s. m. 7^a.
— 77 — 1 Bey dem Artikel Theorie wäre auch die Theorie der Zahlen zu erwähnen, und deshalb auf den Art. Zahl. 4. zu verweisen gewesen.
— 81 — 12 v. u. hinter = C ein Komma.
— 91 — 13 st. in versam s. m. inversam.
— 105 — 8 v. u. st. den s. m. der.
— 110 — 13 v. u. st. 25. s. m. 24.
— 111 — 4 st. für s. m. für.
— 111 — 16 st. quos s. m. quas.
— 136 — 1 v. u. st. cendit s. m. scendit.
— 153 — 2 v. u. st. A′, A″, A‴ s. m. A, A′, A″.
— 158 — 8 v. u. st. 27. s. m. 28.
— 268 — 1 u. 2 st. Halbkugel s. m. Hälfte.
— 271 — 9 v. u. st. vierten s. m. dritten.
— 278 — 12 v. u. st. x s. m. x^2.
— 281 — 3 v. u. st. BC^2 s. m. $+ BC^2$.
— 283 — 11 st. α s. m. α_1.
— 288 — 11 st. denn s. m. dann.
— 296 — 10 setze man hinter 4. p. 49. eine Parenthese.
— 300 — 6 u. 9 v. u. s. m. st. $h_1 : h_1$ und h.
— 325 — 7 hinter gebrauch-te ein Komma.
— 332 — 16 v. u. st. den auch ältern s. m. den ältern auch.
— 333 — 10 v. u. st. J. J. Mayer s. m. J. T. Mayer.
— 395 — 5, 6, 8, 9 u. 10 v. u. müssen alle Punkte vor dem Buchstaben $\varkappa$ getilgt werden.
— 463 — 1 st. 400 v. Ch. s. m. 400 n. Ch.
— 537 — 21 st. (22.) s. m. (21.).
— 600 — 6 st. von x s. m. x, y, z ....
— 804 — 4 v. u. muß das erste Pluszeichen im Zähler des Bruchs vor dem Wurzelzeichen ein Minuszeichen seyn.
— 848 — 12 v. u. st. eine s. m. ein.

Fig. 1

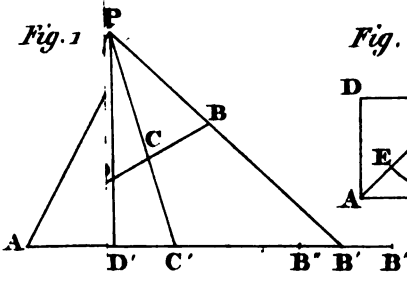


Fig. 1a

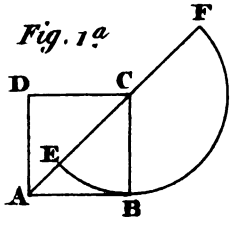


Fig. 6

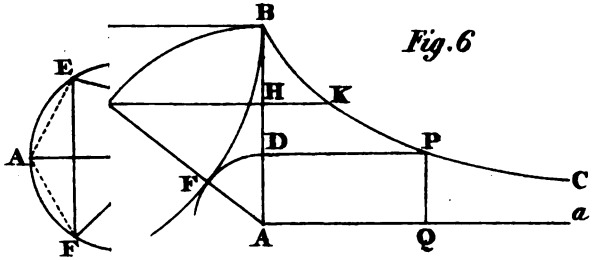


Fig. 8

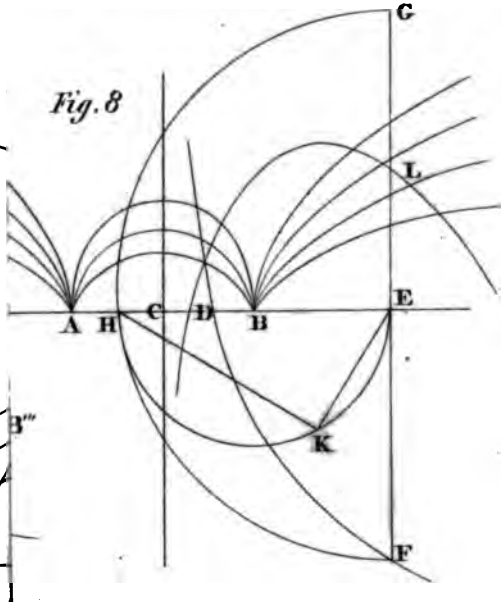
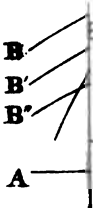


Fig. 7

Fig. 9



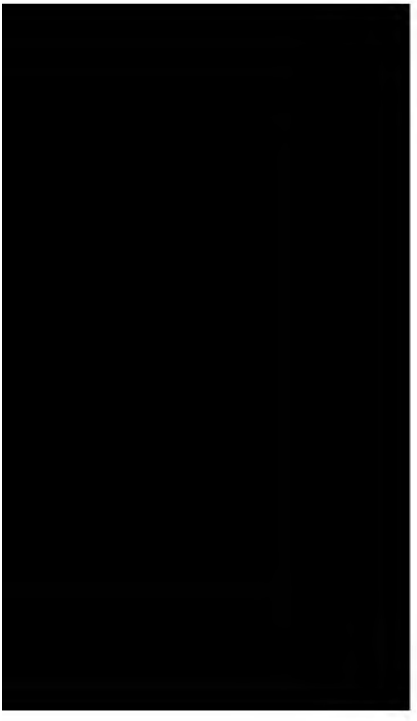


Fig. 1

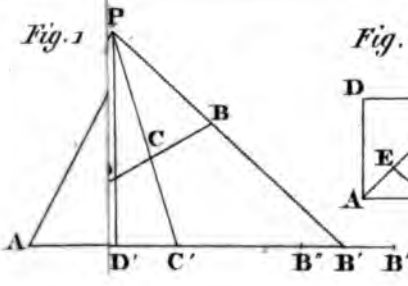


Fig. 1a

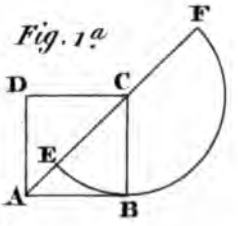


Fig. 6

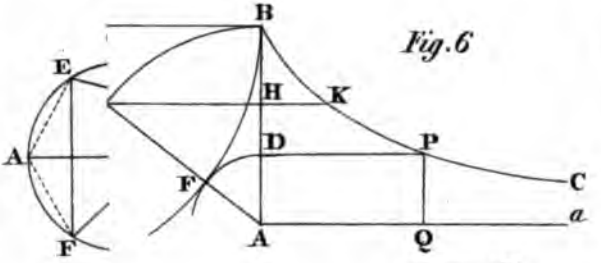


Fig. 8

Fig. 7

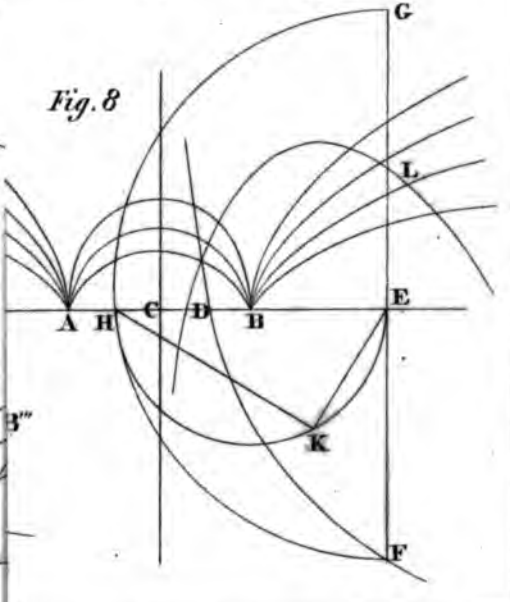


Fig. 9

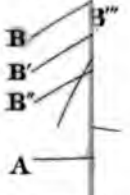


Fig. 12

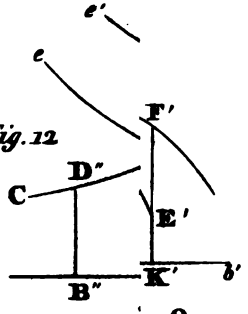


Fig. 15

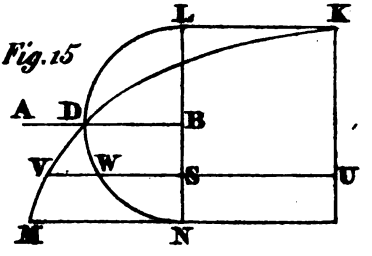


Fig. 16

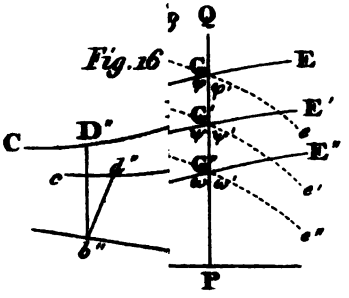


Fig. 19

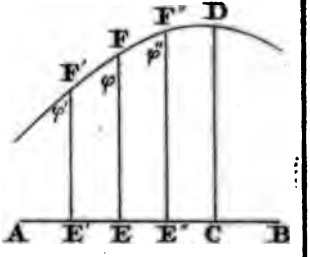
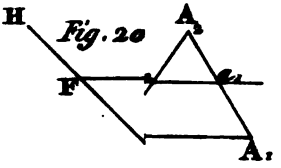


Fig. 20



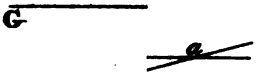
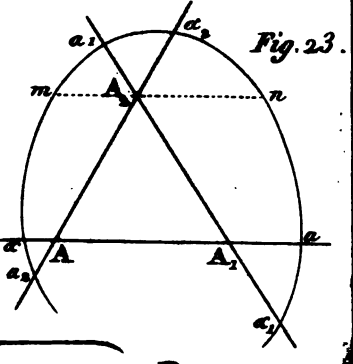


Fig. 23.



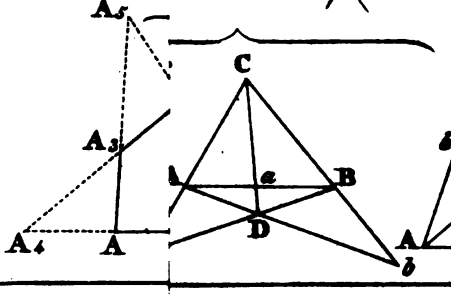


Fig 27

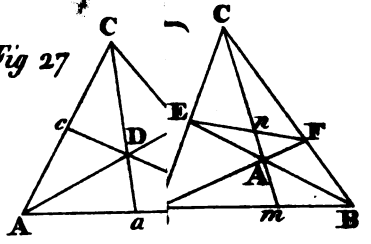


Fig. 30

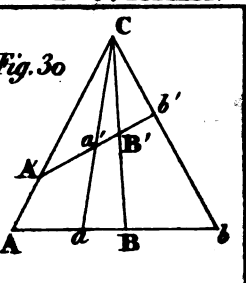


Fig. 31

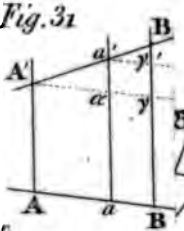


Fig. 34

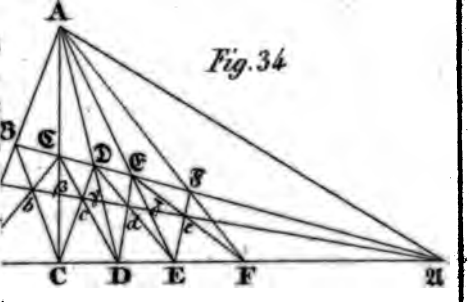


Fig. 3

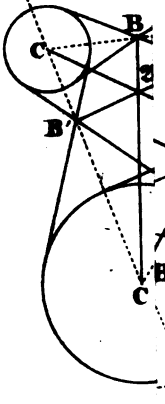
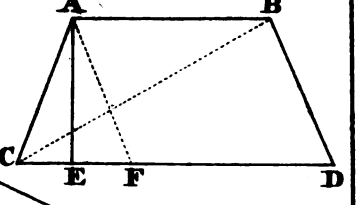
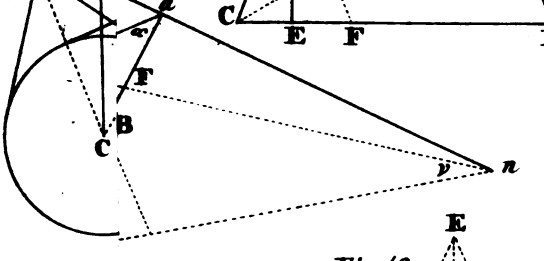


Fig. 41





42

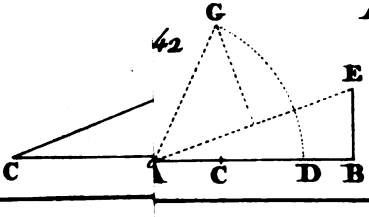
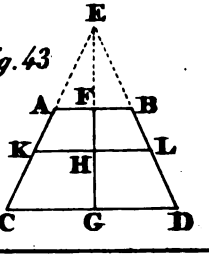


Fig. 43



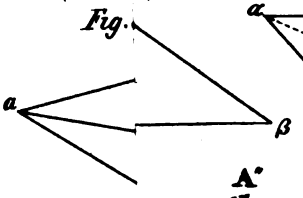
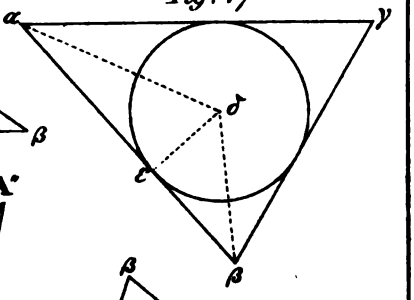


Fig. 47



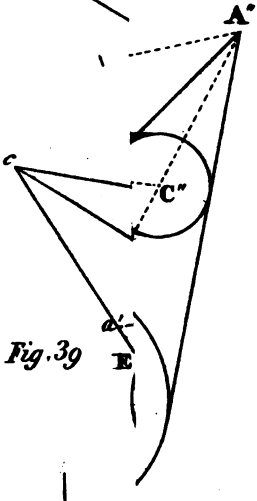


Fig. 39

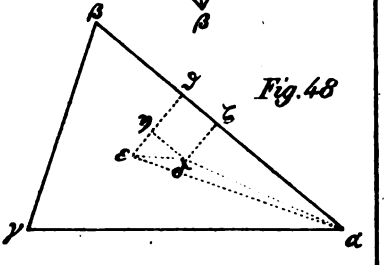


Fig. 48

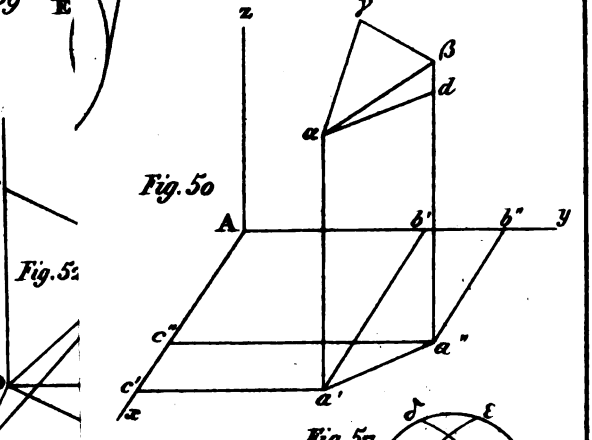


Fig. 50

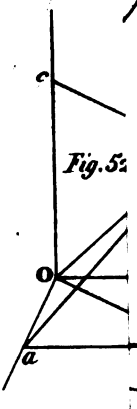


Fig. 52

Fig. 56

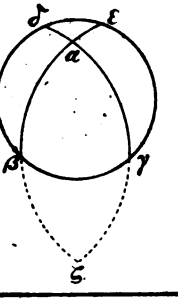


Fig. 57

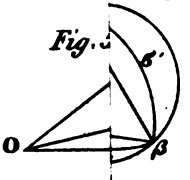
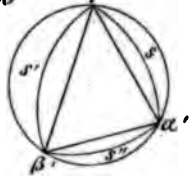
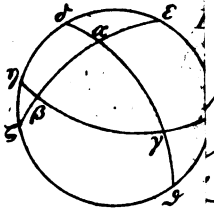


Fig.





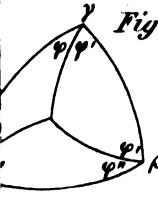


Fig. 62

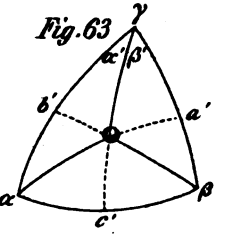


Fig. 63

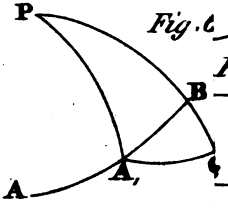


Fig. 66

Fig. 67

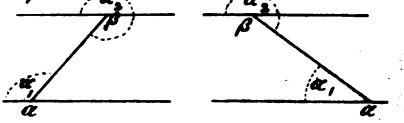
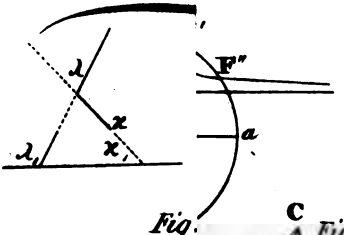


Fig. 75



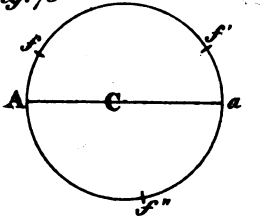


Fig.

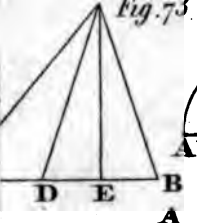
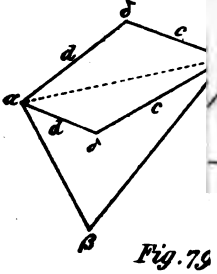


Fig. 73



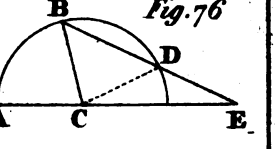


Fig. 76

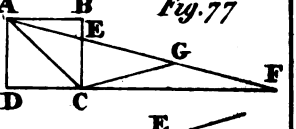
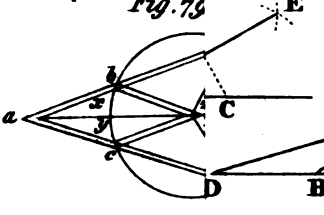


Fig. 77

Fig. 79



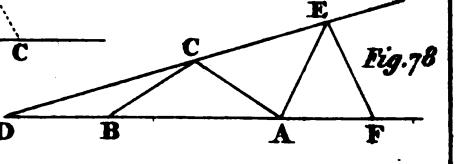
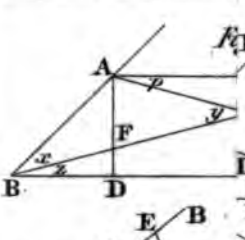
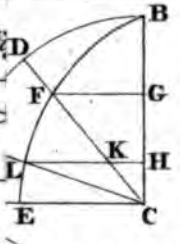
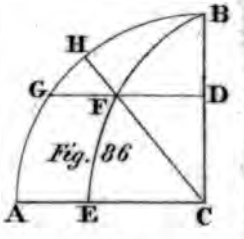


Fig. 78







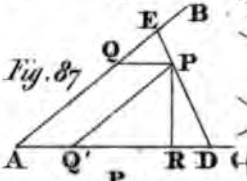


Fig. 87

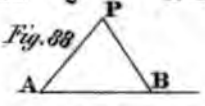


Fig. 88

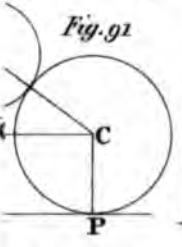


Fig. 91

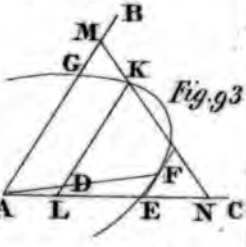


Fig. 93

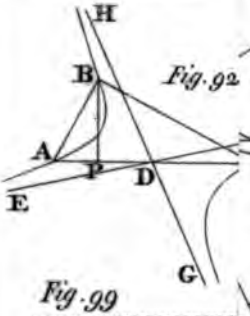


Fig. 92

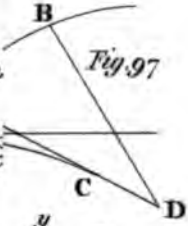


Fig. 97

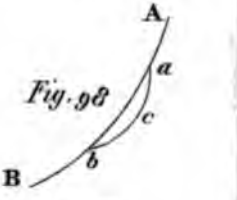


Fig. 98

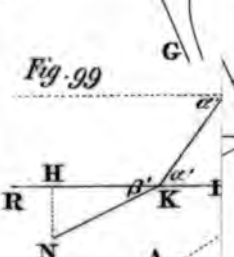
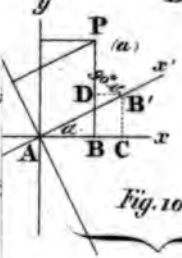


Fig. 99



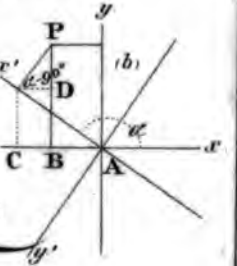


Fig. 103

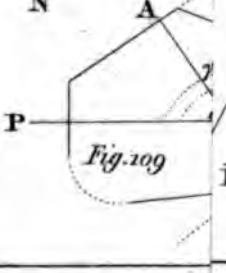


Fig. 109

Fig. 107

Fig. 110

Fig. 111.

Fig.

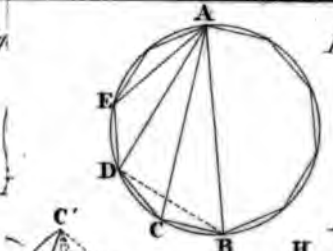


Fig. 117

Fig. 118

Fig. 122

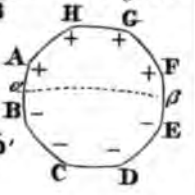
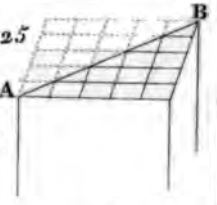


Fig. 125



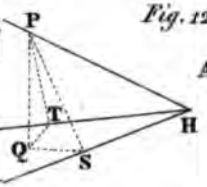


Fig. 119

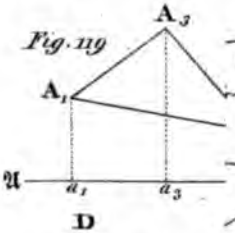
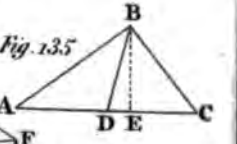


Fig. 135



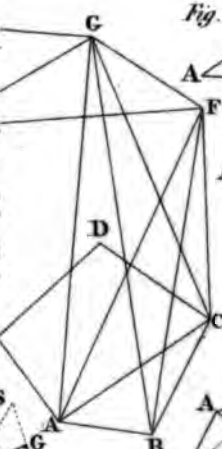


Fig. 126

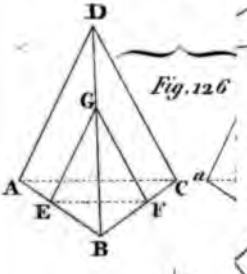


Fig. 136

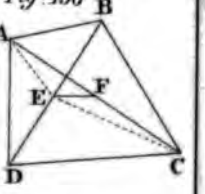


Fig. 131

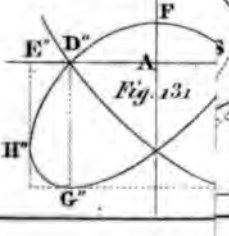


Fig. 137

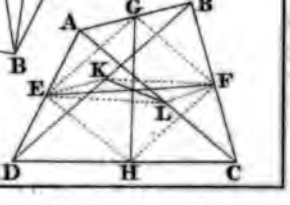


Fig. 138

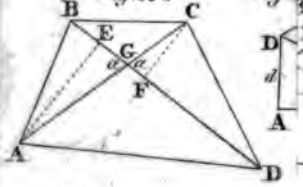


Fig. 143

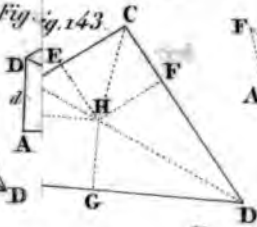


Fig. 145

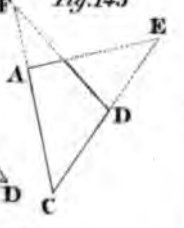
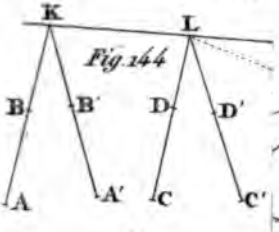


Fig. 144



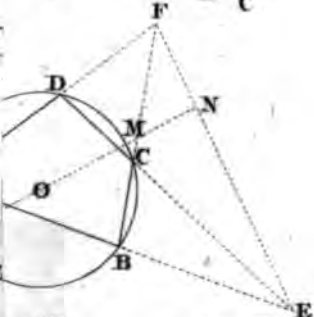


Fig. 141

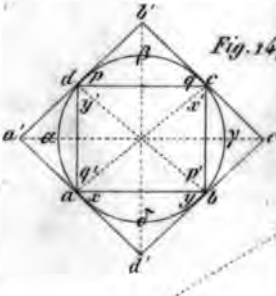
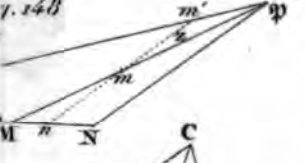


Fig. 148



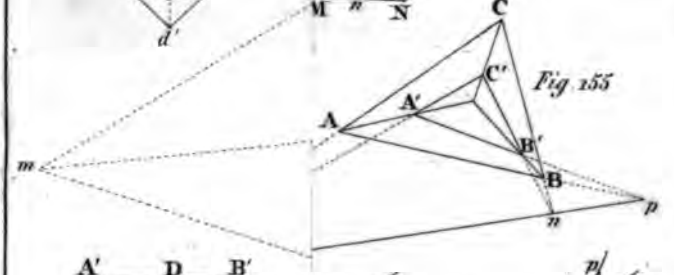
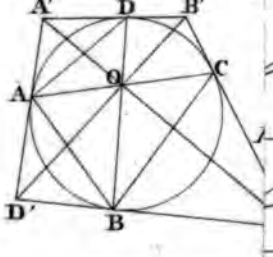


Fig. 155



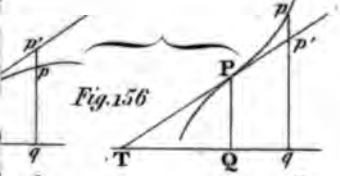


Fig. 156

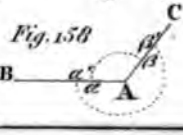
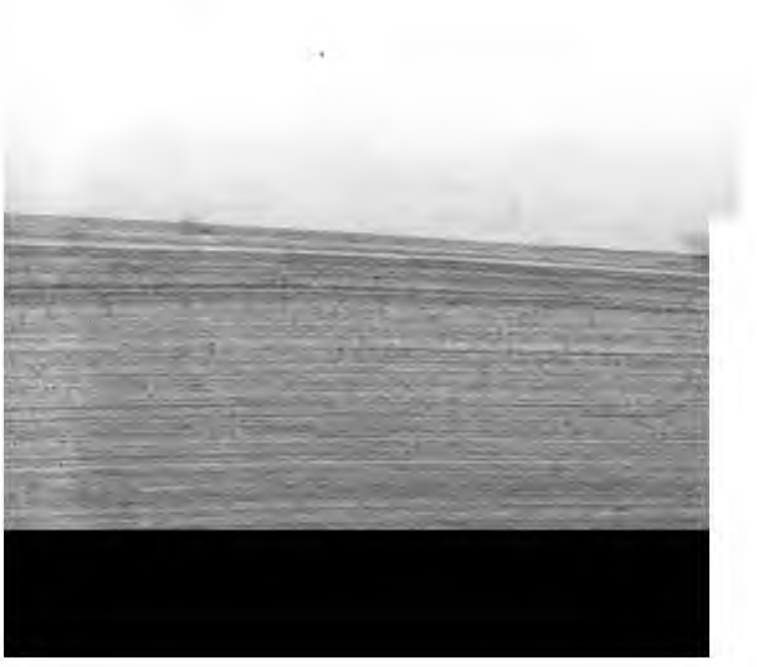
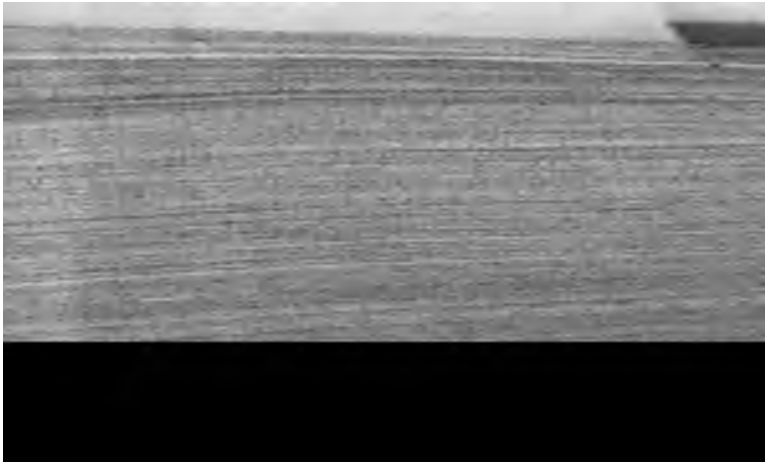



Fig. 158